Полагая в системе (10) $\beta^{-} = 1$, $\beta^{+} = \alpha^{-} = 0$, $\alpha^{+} = \frac{\lambda}{\delta}$, $q^{+} = t_c^{-} = 0$, получаем систему уравнений теплопроводности для случая, когда на поверхности $z = +\delta$ задается температура $t_c(x, y, \tau)$, а на поверхности $z = -\delta$ — тепловой поток:

$$\left(\frac{4}{3}(p\delta)^2 - 1\right)T - \frac{(p\delta)^2}{3}T^* = -\frac{q}{\lambda}\delta - t_c,$$
$$\left(\frac{2}{3}(p\delta)^2 + 1\right)T + \left(2 - \frac{7}{15}(p\delta)^2\right)T^* = -\frac{q}{\lambda}\delta + t_c. \tag{12}$$

Система (12) приводится к такой разрешающей системе уравнений:

$$\Lambda\Delta\varphi_i - \alpha^*\varkappa_i^{+}\varphi_i = C\frac{\partial\varphi_i}{\partial\tau} - Q_i,$$

где $\Lambda = 2\delta\lambda$, $C = 2\delta c_V$, $Q_i = \alpha^*\varkappa_i^{+}t_c + \frac{2}{3}\varkappa_i^{-}q$, $\varphi_i = T + \mu_i T^*$, $\varkappa_i^{-} = 1 - 5\mu_i$, $\varkappa_i^{+} = 1 + \frac{5}{2}\mu_i$, $\alpha^* = \frac{4\lambda}{\delta}$, $\mu_{1,2} = \frac{7 \pm 2\sqrt{31}}{15}$, $i = 1, 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. «Наукова думка», К., 1972.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1974 г.

О ДИФФУЗИОННОМ ПРОНИКНОВЕНИИ РАСТВОРА В КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

О. Р. Мисьснг

Для определения и изучения горных пород и полезных ископаемых в разрезах скважин в геофизике практическое применение находят решения задач о диффузионном проникновении бурового раствора в слоистых средах. Рассмотрим случай кусочно-однородной слоистой среды, когда мощности пластов достаточно велики. В связи с этим для исследования диффузионных явлений в окрестности поверхности контакта пластов в качестве расчетной модели примем полубесконечную среду $y \geqslant 0$, состоящую из однородных пластов бесконечной мощности, каждый из которых представляет собой двухкомпонентный твердый раствор, характеризующийся в начальный момент химическими потенциалами $\overset{0}{\mu}_1$ и $\overset{0}{\mu}_2$ соответственно; границей раздела этих пластов есть плоскость $z = 0$. Внешняя к телу среда (буровой раствор) имеет химический потенциал $\overset{0}{\mu}_c$.

Рассмотрим задачу о диффузионном проникновении бурового раствора в пласты из внешней среды через поверхность $y = 0$. Поток диффундирующего компонента в тело вызывает в нем изменение химического потенциала. Образующийся в процессе диффузии твердый раствор в системе будем считать слабым $\left(c_i = \frac{m_c}{m_c + m_i} \ll 1\right.$, где m_c — масса диффундирующего компонента, m_i — масса вещества исследуемых пластов, $\left.i = 1, 2\right)$. Поэтому связь между химическим потенциалом растворителя в растворе и концентрацией примем линейной:

$$\mu_i = \overset{0}{\mu}_i + a_i c_i, \qquad i = 1, 2. \tag{1}$$

Предположим, что внешняя среда имеет идеальную массопроводность и характеризуется постоянным химическим потенциалом $\overset{0}{\mu}_c$. Так как процесс диффузии вдоль границ раздела протекает значительно быстрее, чем внутри тела, то, пренебрегая временем релаксации диффузионных процессов на поверхностях контакта, примем, что здесь имеют место условия идеального контакта, а именно: равенство химических потенциалов и нормальных составляющих потока на границе $z = 0$ и постоянство химического потенциала на поверхности $y = 0$. Полная система соотношений для определения поля химического потенциала исследуемых сред включает дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial^2 \mu_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mu_i}{\partial z^2} = \frac{w_i}{\lambda_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \tau}, \qquad i = 1,\ 2, \tag{2}$$

начальные

$$\mu_i (y,\ z,\ 0) = \mu_i^0 \tag{3}$$

и граничные условия

$$\mu_i (0,\ z,\ \tau,) = \mu_c^0,\ \mu_1 (y,\ 0,\ \tau) = \mu_2 (y,\ 0,\ \tau),\ \eta_1 \frac{\partial \mu_1 (y,\ 0,\ \tau)}{\partial z} = \eta_2 \frac{\partial \mu_2 (y,\ 0,\ \tau)}{\partial z}, \tag{4}$$

где w_i — удельная массоемкость, λ_i — удельная массопроводимость исследуемых сред [2]. К граничным условиям добавляются также условия для химических потенциалов на бесконечности ($y,\ z \to \infty,\ \tau < \infty$), где $\mu_i = \mu_i^0$. Индекс «1» введен для обозначения величин в области $y \geqslant 0$, $z > 0$; индекс «2» — в области $y \geqslant 0$, $z < 0$.

Приведем приближенную постановку и решение этой задачи. Исходим из решения одномерной задачи для среды с удельной массоемкостью w и удельной массопроводимостью λ в однородном полупространстве:

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} = \frac{w}{\lambda} \frac{\partial \mu}{\partial \tau}, \quad y > 0$$

при условиях

$$\mu (y,\ 0) = \mu_0, \quad \mu (0,\ \tau) = \mu_c.$$

Решение такой задачи имеет вид [1]

$$\mu (y,\ \tau) = \mu_0 + (\mu_c - \mu_0) \operatorname{erfc} \frac{y \sqrt{\varkappa}}{2 \sqrt{\tau}},$$

где $\varkappa = \dfrac{w}{\lambda}$.

Определим глубину проникновения бурового раствора как расстояние y_0 от поверхности $y = 0$, при котором $c/c_0 = \alpha$ (c_0 — значение концентрации при $y = 0$), т. е. $\operatorname{erfc} \dfrac{y_0 \sqrt{\varkappa}}{2 \sqrt{\tau}} = \alpha$. Обозначая $\dfrac{y_0 \sqrt{\varkappa}}{2 \sqrt{\tau}} = \dfrac{b}{2}$, получаем соотношение $y_0 = b \sqrt{\tau} / \sqrt{\varkappa}$.

Принимая, что двум средам с различными физическими характеристиками соответствуют различные глубины проникновения, из условия их равенства получаем

$$y_0 = d_0 \sqrt{\tau}, \quad \frac{b_1}{\sqrt{\varkappa_1}} = \frac{b_2}{\sqrt{\varkappa_2}} = d_0, \quad y_0 = \frac{b_i \sqrt{\tau}}{\sqrt{\varkappa_i}}, \quad \operatorname{erfc} \frac{b_i}{2} = \alpha_i \quad i = 1,\ 2.$$

Если выполнить замену переменных $y' = y - y_0 = y - d_0 \sqrt{\tau}$, $\tau' = \tau$, перейти в соотношениях (2) — (4) к движущейся системе координат и рассматривать задачу в установившемся режиме, то получим следующую систему соотношений:

$$\frac{\partial^2 \mu_i}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mu_i}{\partial y^2} + \frac{\varkappa_i d_0}{2 \sqrt{\tau}} \frac{\partial \mu_i}{\partial y} = 0, \qquad i = 1,\ 2,$$

$$\mu_i (0,\ z) = \mu_c^0, \quad \mu_1 (y,\ 0) = \mu_2 (y,\ 0), \tag{5}$$

$$\eta_1 \frac{\partial \mu_1 (y,\ 0)}{\partial z} = \eta^2 \frac{\partial \mu_2 (y,\ 0)}{\partial z}, \quad \mu_i (\infty,\ \infty) = \mu_i^0.$$

Решение этой задачи можно представить в виде

$$\mu_i(y, z) = \mu_i^0 \exp(-2t_i y) + \exp(-t_i y)\, \varphi_i(y, z),$$

где синус-преобразование функций $\varphi_i(y, z)$ определяется формулами

$$\tilde{\varphi}_1^s = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \mu_c^0\, k_{2,1} \frac{[\exp(-2t_1 s) - \exp(-2t_2 s)]\, v_1^2 v_2}{s(v_1 + k_{2,1} v_2)} \exp(-v_1 z),$$

$$\tilde{\varphi}_2^s = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \mu_c^0 \frac{[\exp(-2t_1 s) - \exp(-2t_2 s)]\, v_2^2 v_1}{s(v_1 + k_{2,1} v_2)} \exp(-v_2 |z|);$$

$$k_{2,1} = \frac{\eta_2}{\eta_1}, \quad t_i = \frac{\varkappa_i d_0}{4\sqrt{\tau}}, \quad v_i = \sqrt{s^2 + t_i^2}.$$

Рассмотрим задачу о распределении поля химического потенциала в области, ограниченной величиной $y = d_0\sqrt{\tau}$. Принимая, что на границе этой области $\mu_i(d_0\sqrt{\tau}, z) = \mu_i^0 + (\mu_c^0 - \mu_i^0)\,\alpha_i$, причем $\alpha_i = c_i(d_0\sqrt{\tau}, z)/c_0$, $i = 1, 2$, и учитывая соотношение (1), для соответствующих значений концентраций получаем следующие формулы:

$$c_i(y, z) = \frac{c_i^0}{\exp(-l_i) - 1}\,[\exp(-l_i) - 1 + (\alpha_i - 1)\exp(-2m_i y)] +$$

$$+ \exp(-m_i y) \sum_1^\infty M_n^i \exp(-u_n^i |z|) \sin s_n,$$

где M_n^1 и M_n^2 определяются выражениями

$$\omega_{1,2}\, k_{1,2} \exp(-m_1 y)\, u_n^1 M_n^1 = -\exp(-m_2 y)\, u_n^2 M_n^2,$$

$$M_n^1 \frac{d_0\sqrt{\tau}}{2s_n}\left(1 + k_{1,2}\frac{u_n^1}{u_n^2}\right) = \frac{1}{\omega_{1,2}} \frac{c_2(1-\alpha_2)}{\exp(-l_2) - 1}\left[\frac{1 - (-1)^n \exp\frac{l_1}{2}}{(u_n^1)^2} -\right.$$

$$\left. - \frac{1 - (-1)^n \exp\left(\frac{l_1}{2} - l_2\right)}{s_n^2 + (m_1 - 2m_2)^2}\right] + \frac{2c_1(1-\alpha_1)}{\exp(-l_1) - 1} \frac{\operatorname{sh}\frac{l_1}{2}}{(u_n^1)^2}$$

и использованы следующие обозначения:

$$d_0 = b_i\sqrt{D_i}, \quad \omega_{1,2} = \frac{a_1}{a_2}, \quad k_{1,2} = \frac{\eta_1}{\eta_2}, \quad m_i = \frac{d_0}{4D_i\sqrt{\tau}}, \quad l_i = \frac{d_0^2}{2D_i},$$

$$s_n = \frac{n\pi}{d_0\sqrt{\tau}}, \quad u_n^i = \sqrt{s_n^2 + m_i^2}, \quad D_i = \frac{\lambda_i}{w_i}.$$

Полученные формулы могут быть использованы для исследования концентрации в окрестности поверхности контакта пластов и, в частности, для определения глубины проникновения бурового раствора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карслоу Г. С. Теория теплопроводности. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
2. Подстригач Я. С., Шевчук П. Р. О влиянии поверхностных слоев на процесс диффузии и на обусловленное им напряженное состояние в твердых телах.— ФХММ, 1967, 3, 5.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в октябре 1974 г.