θ	$\zeta_0^* = 2h$						$\zeta_0^* = 0$					
	$\sigma_x^\infty = p$			$\sigma_y^\infty = q$			$\sigma_x^\infty = p$			$\sigma_y^\infty = q$		
	σ_1/p	σ_0/p	σ_2/p	σ_1/q	σ_0/q	σ_2/q	σ_1/p	σ_0/p	σ_2/p	σ_1/q	σ_0/q	σ_2/q
0°	1,49	0,75	0,11	4,02	6,88	9,84	1,35	0,20	—0,95	0,90	3,76	6,69
10°	1,50	0,84	0,27	4,07	6,61	9,22	1,31	0,31	—0,69	1,09	3,61	6,19
20°	1,57	1,16	0,80	4,10	5,82	7,59	1,24	0,61	—0,02	1,53	3,19	4,90
30°	1,83	1,75	1,69	3,89	4,64	5,43	1,24	1,04	0,85	1,91	2,59	3,29
40°	2,29	2,50	2,72	3,33	3,30	3,29	1,38	1,53	1,70	2,00	1,89	1,80
50°	2,87	3,27	3,68	2,51	1,99	1,48	1,64	2,02	2,40	1,79	1,21	0,63
60°	3,47	3,96	4,46	1,62	0,86	0,11	1,96	2,44	2,93	1,42	0,60	—0,21
70°	3,96	4,49	5,02	0,86	0,01	—0,84	2,25	2,77	3,29	1,04	0,14	—0,75
80°	4,28	4,82	5,35	0,36	—0,52	—1,40	2,44	2,97	3,51	0,78	—0,14	—1,06
90°	4,40	4,93	5,47	0,19	—0,69	—1,58	2,51	3,04	3,58	0,68	—0,24	—1,17

сравнения приведены кривые *4*, характеризующие распределение этих напряжений при симметричном подкреплении ($\zeta_0^* = 0$). Зависимость напряжений σ_θ в пластинке от эксцентриситета подкрепления ζ_0^* представлена на рис. 3, 4.

В таблице помещены значения нормальных напряжений σ в поперечном сечении кольца: σ_1 соответствует точкам сечения кольца, совпадающим с линией спая L_1 ($r = r_1$), σ_0 — точкам нейтрального волокна L_0 ($r = r_0$) и σ_2 — точкам внутреннего (крайнего) волокна кольца L_2 ($r = r_2$), лежащим в плоскости, совпадающей со срединной плоскостью пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
2. *Мартынович Т. Л.* Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореф. докт. дис. Львов, 1970.
3. *Мартинович Т. Л., Божидарник В. В.* Крайові умови в інтегральній формі задачі про напружений стан в анізотропній пластинці з несиметрично підкріпленим краєм.— Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Механіка, математика, 1972, № 7, с. 112—118.
4. *Мартынович Т. Л., Божидарник В. В., Максимович Ю. М.* Влияние эксцентриситета подкрепления края отверстия на напряженное состояние в анизотропной пластинке.— Механика полимеров, 1974, № 2, с. 285—293.
5. *Стеклотекстолиты* и другие конструкционные пластинки. М., Оборонгиз, 1960.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 16.IX 1974 г.

УДК 539.3

Б. Л. Пелех

СОПРЯЖЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК С КОНЕЧНОЙ СДВИГОВОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

Метод сопряженных задач, позволяющий по известному решению какой-либо задачи строить решения задач, соответствующих некоторым иным граничным условиям, разработан в классической теории тонких оболочек Кирхгофа — Лява [1, 6]. В данной работе этот метод распространяется на теорию оболочек, построенную с учетом влияния деформаций поперечного сдвига.

Рассмотрим оболочку постоянной толщины, срединная поверхность которой отнесена к линиям кривизны, а α_1, α_2, A_1, A_2, k_1, k_2 — соответственно коэффициенты Ляме и главные кривизны. В случае однородной задачи теории типа Тимошенко комплексные усилия вводятся следующим образом

[2—4]:

$$\widetilde{T}_1 = T_1 - 2iEhc\mu_2 = -2iEhc\widetilde{\mu}_2,$$
$$\widetilde{S} = S + 2iEhc\mu_{12} = 2iEhc\widetilde{\mu}_{12}, \tag{1}$$
$$\widetilde{N}_1 = N_1 - 2iEhc\eta_1 = -2iEhc\widetilde{\eta}_1,$$

где

$$\mu_1 = \varkappa_1 - \left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{\varepsilon_{23}}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\right)(1 \rightleftarrows 2);$$
$$\mu_{12} = \varkappa_{12} - \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{\varepsilon_{13}}{A_1}\right) - \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{\varepsilon_{23}}{A_2}\right); \tag{2}$$
$$\eta_1 = \varepsilon_1 - k_1\varepsilon_{23}; \quad \eta_2 = \varepsilon_2 + k_2\varepsilon_{13};$$

$c = h/\sqrt{3(1-\nu^2)}$; E, ν — соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона;

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial \omega_n}{\partial \alpha_1} - k_1\gamma_2, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial \omega_n}{\partial \alpha_2} + k_2\gamma_1,$$
$$\varkappa_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} + \gamma_2\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1}(1 \rightleftarrows 2), \tag{3}$$
$$\varkappa_{12} = \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{\gamma_1}{A_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{\gamma_2}{A_2}\right)$$

— компоненты изгибной деформации;

$$\varepsilon_{13} = \gamma_1 + \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1 \ (1 \rightleftarrows 2) \tag{4}$$

— компоненты деформации поперечного сдвига;

γ_1, γ_2 — углы поворота нормали; $\widetilde{\mu}_1$, $\widetilde{\mu}_2$, $\widetilde{\mu}_{12}$, $\widetilde{\eta}_1$, $\widetilde{\eta}_2$ — те же величины (2), но составленные по комплексным обобщенным смещениям

$$\widetilde{u}_1 = u_1 + i\overline{u}; \ \widetilde{w} = w + i\overline{w}; \ \widetilde{\gamma}_1 = \gamma_1 + i\overline{\gamma}_1 \ (1 \rightleftarrows 2). \tag{5}$$

Для того чтобы комплексные усилия были решением какой-либо задачи теории оболочек, комплексные смещения должны удовлетворять системе уравнений

$$\widetilde{\varepsilon}_1 + ic[\widetilde{\mu}_2 + \nu\widetilde{\mu}_1 + \chi_2] = \frac{1}{2Ehc}\left(T_1^* - \nu T_2^* + \frac{i}{c}M_2^*\right),$$
$$\widetilde{\varepsilon}_{12} - 2ic\left[\widetilde{\mu}_{12} - \nu\overline{\overline{\mu}}_{12} + \frac{1-\nu}{2}\chi_{12}\right] = \frac{1}{2Ehc}\left[(1+\nu)S^* - \frac{i}{c}H_{12}^*\right], \tag{6}$$
$$\overline{\varepsilon}_{13} + \frac{c}{\varepsilon}\varepsilon_{13} = \frac{1}{2Ehc}N_1^*.$$

Здесь $\widetilde{\varepsilon}_1$, $\widetilde{\varepsilon}_2$, $\widetilde{\varepsilon}_{12}$ — комплексные компоненты тангенциальной деформации.

Усилия и моменты выражаются через комплексные усилия следующим образом:

$$T_1 = \operatorname{Re}\widetilde{T}_1; \quad S = \operatorname{Re}\widetilde{S}; \quad N_1 = \operatorname{Re}\widetilde{N}_1,$$
$$M_1 = -c\operatorname{Im}(\widetilde{T}_2 + \nu\widetilde{T}_1) + \varepsilon\operatorname{Re}\left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial \widetilde{N}_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\widetilde{N}_2}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \right.$$
$$\left. + \nu\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial \widetilde{N}_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\widetilde{N}_1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\right)\right], \tag{7}$$
$$H_{12} = c(1-\nu)\operatorname{Im}\widetilde{S} + \frac{\varepsilon(1-\nu)}{2}\operatorname{Re}\left[\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{\widetilde{N}_1}{A_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{\widetilde{N}_2}{A_2}\right)\right].$$

Введем такие комплексные граничные величины, связанные с краем оболочки:

$$\vec{\tilde{Q}}_m = \tilde{Q}_{mt}\vec{t} + \tilde{Q}_{mm}\vec{m} + \tilde{Q}_{mn}\vec{n},$$
$$\vec{\tilde{M}}_m = -\tilde{M}_{mt}\vec{m} + \tilde{M}_{mm}\vec{t}, \tag{8}$$

где

$$\tilde{Q}_{mm} = Q_{mm} - 2iEhc\mu_{tt} = -2iEhc\tilde{\mu}_{tt};$$
$$\tilde{Q}_{mt} = Q_{mt} + 2iEhc\mu_{tm} = 2iEhc\tilde{\mu}_{tm};$$
$$\tilde{Q}_{mn} = Q_{mn} - 2iEhc\mu_{mn} = -2iEhc\tilde{\mu}_{mn}; \tag{9}$$
$$\tilde{M}_{mt} = M_{mt} - iEhc\varepsilon_{tm} = -iEhc\tilde{\varepsilon}_{tm};$$
$$\tilde{M}_{mm} = M_{mm} - 2Ehc\varepsilon_{tt} = -2iEhc\tilde{\varepsilon}_{tt}.$$

Величины μ_{tt}, μ_{tm}, μ_{mn}, ε_{tn}, ε_{tt} полностью характеризуют деформацию края оболочки и определяются формулами

$$\mu_{tt} = \mu_1 \cos^2\lambda + \mu_2 \sin^2\lambda - 2\mu_2 \sin\lambda\cos\lambda + (k_1 + k_2)\frac{\varepsilon_{12}}{2}\sin\lambda\cos\lambda,$$

$$\mu_{tm} = (\mu_2 - \mu_1)\sin\lambda\cos\lambda + \mu_{12}(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda) + \frac{\varepsilon_{12}}{2}(k_1\sin^2\lambda - k_2\cos^2\lambda),$$
$$\mu_{mn} = \eta_1\sin\lambda + \eta_2\cos\lambda,$$
$$\varepsilon_{tt} = \varepsilon_1\cos^2\lambda + \varepsilon_2\sin^2\lambda - \varepsilon_{12}\sin\lambda\cos\lambda, \tag{10}$$
$$\varepsilon_{tn} = \sin\lambda\cos\lambda(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + (\cos^2\lambda - \sin^2\lambda)\frac{\varepsilon_{12}}{2}.$$

Наряду с основным решением $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$, $\tilde{w}$, $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$ рассмотрим другое, для которого справедливы равенства

$$\tilde{U}_1^{\wedge} = i\beta\tilde{U}_1 = i\beta(u_1 + i\bar{u}_1),$$
$$\tilde{w}^{\wedge} = i\beta\tilde{w} = i\beta(w + i\bar{w}), \tag{11}$$
$$\tilde{\gamma}_1^{\wedge} = i\beta\tilde{\gamma}_1 = i\beta(\gamma_1 + i\bar{\gamma}_1),$$

где β — произвольная вещественная постоянная.

Из соотношений (1), (7) и (11) выводим, что такой сопряженной задаче соответствуют обобщенные смещения

$$u_1^{\wedge} = -\bar{u}_1; \quad w^{\wedge} = -\bar{w}; \quad \gamma_1^{\wedge} = -\bar{\gamma}_1 \ (1 \rightleftarrows 2) \tag{12}$$

и обобщенные усилия

$$T_1^{\wedge} = \beta\frac{M_2 - \nu M_1}{c(1-\nu^2)} - \frac{E\beta}{k'G'\sqrt{3(1-\nu^2)}}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial N_2}{\partial\alpha_2} + \frac{N_1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right),$$

$$S^{\wedge} = -\beta\frac{H_{12}}{c(1-\nu)} + \frac{E\beta}{k'G'\sqrt{3(1-\nu^2)}}\left\{\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha^2}\left(\frac{N_1}{A_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{N_2}{A_2}\right)\right\}, \tag{13}$$

$$N_1^{\wedge} = c\beta\left[\frac{\partial A_1(T_1 - \nu T_2)}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}(T_2 - \nu T_1) - 2(1+\nu)\left(\frac{\partial A_2 S_{12}}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}S_{12}\right)\right],$$

$$M_1^{\wedge} = -\beta c(T_2 + \nu T_1) + \frac{\varepsilon}{c}\left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial N_1}{\partial\alpha_1} + \frac{N_2}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} + \nu\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial N_2}{\partial\alpha_2} + \frac{N_1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right)\right],$$

$$H_{12}^{\wedge} = \beta c(1-\nu)S - \frac{\varepsilon}{c}\left[\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{N_1}{A_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{N_2}{A_2}\right)\right].$$

Подстановкой формул (11) в (9) находим связь между граничными величинами основной и сопряженной задач. Как видно, деформационным условиям основной задачи соответствуют статические условия сопряженной и наоборот.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. М., Судпромгиз, 1951.
2. *Пелех Б. Л., Лунь Е. И.* Статико-геометрическая аналогия и метод комплексного преобразования в теории упругих оболочек типа Тимошенко.— ДАН СССР, 1970, **192**, № 6.
3. *Пелех Б. Л.* Некоторые вопросы теории и расчета анизотропных оболочек и пластин с низкой сдвиговой жесткостью.— Механика полимеров, 1970, № 4.
4. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. К., «Наук. думка», 1973.
5. *Пелех Б. Л.* Деформаційні краєві умови і комплексне представлення умов спряження в теорії оболонок з кінцевою зсувною жорсткістю.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1972, № 11.
6. *Черных К. Ф.* Сопряженные задачи теории оболочек.— В кн.: Проблемы механики сплошной среды. М., Изд-во АН СССР, 1961.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 6.X 1974 г.

УДК 539.3

Г. Я. Попов

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассмотрим уравнение

$$\int_{-1}^{1} k(x-y)\varphi(y)\,dy = f(x), \qquad |x| \leqslant 1, \tag{1}$$

полагая

$$k(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty K(t)\cos xt\,dt, \quad K(t) = O(t^{-1}), \quad t \to \infty. \tag{2}$$

Если правую часть разбить на четную $f_+(x)$ и нечетную $f_-(x)$ составляющие, то вместо уравнения (1) можно записать

$$\int_0^1 [k(x-y) \pm k(x+y)]\,\varphi_\pm(y)\,dy = f_\pm(x), \qquad 0 \leqslant x < 1. \tag{3}$$

Исследуем уравнение для четной $\varphi_+(x)$ составляющей. Введя обозначение

$$\Phi(t) = \frac{4}{\pi}\int_0^1 \varphi_+(y)\cos ty\,dy, \tag{4}$$

первое уравнение (3) можно записать в виде

$$\int_0^\infty \Phi(t)K(t)\cos xt\,dt = f_+(x), \qquad x < 1. \tag{5}$$

Обращая формулу (4) и присоединяя ее к (5), приходим к парному уравнению

$$\begin{gathered}\int_0^\infty \Phi(t)K(t)\cos xt\,dt = f_+(x), \qquad x < 1,\\ \int_0^\infty \Phi(t)\cos xt\,dt = 0, \qquad x > 1.\end{gathered} \tag{6}$$