УДК 678. 539. 3

Н. П. Флейшман, Л. И. Ощипко, Е. С. Иванкив

ВЕСОВАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ ОБОЛОЧЕК ЭЛЕКТРОВАКУУМНЫХ ПРИБОРОВ

Выбор оптимальных параметров конструкций имеет большое значение в инженерной практике. Для решения задач оптимизации используется аппарат математического программирования, позволяющий определить вектор $\bar{h}'$ $(h_1', h_2', \ldots, h_m')$, который доставляет минимум целевой функции многих переменных $g_0(\bar{h})$ при наличии ограничений, накладываемых на некоторые функции $g_k(\bar{h})$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$. Большое значение при этом имеет вид всех этих функций.

В задачах весовой оптимизации на прочность составных стеклянных оболочек электровакуумных приборов (ЭВП) целевой функцией служит объем конструкции, функциями ограничений $g_k(\bar{h})$ — максимальные растягивающие напряжения в точках внешней поверхности оболочки, а переменными h_j — некоторые геометрические параметры элементов конструкции.

Произвольные, вообще говоря, непрерывные и дифференцируемые функции $g_k(\bar{h})$ $(k = 0, 1, \ldots, s)$ можно аппроксимировать одночленными позиномами вида [1]

$$g_k(\bar{h}) \cong C_k h_1^{a_{k1}} h_2^{a_{k2}} \ldots h_m^{a_{km}}, \tag{1}$$

где

$$a_{kj} = \left(\frac{h_j}{g_k} \frac{\partial g_k}{\partial h_j}\right)_{\bar{h}^*}, \quad C_k = \frac{g(\bar{h}^*)}{\prod\limits_{j=1}^{m} (h_j^*)^{a_{kj}}}, \tag{2}$$

$\bar{h}^*$ — исходная точка, координаты которой можно определить как среднее геометрическое концов интервала изменения каждого переменного h_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

В таком случае задача оптимизации становится задачей геометрического программирования [1, 2], прямая программа которой формулируется так. Найти максимальное значение функции $g_0(\bar{h})$ (1) при ограничениях

$$g_k(\bar{h}) \leqslant 1, \qquad k = 1, 2, \ldots, s; \quad h_j > 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{3}$$

Соответствующая двойственная программа заключается в следующем. Найти минимальное значение функции-произведения

$$v(\bar{\delta}) = \left[\prod_{i=0}^{s} (C_i/\delta_{i+1})^{\delta_{i+1}}\right] \prod_{k=1}^{s} \delta_k^{\delta_k} \tag{4}$$

при двойственных ограничениях

$$\delta_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, s+1), \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{s+1} a_{ij}\delta_i = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{6}$$

Здесь $\{a_{ij}\}$ — матрица экспонент, δ_i — переменные двойственной программы [1].

В случае нулевой степени трудности двойственная область содержит только одну точку и компоненты вектора $\bar{\delta}$ не зависят от коэффициентов C_i, а определяются из решения линейной системы алгебраических уравнений (6). Решение же задачи оптимизации, т. е. минимизирующий вектор $\bar{h}'$ и $\min g_0(\bar{h})$ определяются формулами первой теоремы двойственности [1].

Поскольку при аппроксимации значение позинома (1) точно совпадает со значением функции $g_k(\bar{h})$ лишь в исходной точке $\bar{h}^*$, то для уточнения полученного решения используется итерационный метод [2], заключающийся в том, что за исходную точку $\bar{h}^*$ последовательно принимается решение $\bar{h}'$, найденное на предыдущем шаге.

Аппроксимация произвольной функции одночленным позиномом (2) связана с большой вычислительной работой, а именно: необходимо получить аналитическое решение задачи упругого равновесия составной оболочки, вывести формулы для напряжений, затем определить соответствующие производные по переменным h_j и выразить показатели a_{kj} (2).

При аналитическом расчете составной оболочки постоянные интегрирования соответствующих уравнений определяются из граничных условий и условий сопряжения отдельных элементов конструкции, которые приводятся к громоздким системам линейных алгебраических уравнений. Во избежание необходимости аналитического решения таких систем предлагается решать их численно для ряда значений вектора $\bar{h}$, необходимых для приближенного вычисления величин a_{kj}, т. е. для нахождения производных в точке $\bar{h}^*$ по конечно-разностным формулам.

Такой путь использования ЭВМ для численной аппроксимации функций одночленными позиномами и дальнейшего решения задачи геометрического программирования применим, очевидно, и в том случае, когда расчет составной оболочки с самого начала производится численными методами, т. е. когда известен алгоритм численного определения функций $g_k(\bar{h})$.

В качестве примера численной реализации предложенного алгоритма рассмотрим задачу оптимизации конструкции трубки, состоящей из цилиндрической оболочки длины l, радиуса R и толщины $h_2 = \mathrm{const}$, сочлененной с плоским экраном толщины $h_1 = \mathrm{const}$. Другой конец цилиндра шарнирно оперт. Конструкция испытывает внешнее давление $q = \mathrm{const}$.

Вектор $\bar{h}$ двумерный, а целевая функция веса определяется позиномом

$$g_0(\bar{h}) = \pi R^3 \left(\frac{h_1}{R} + \frac{h_1 h_2^2}{4R^3} + \frac{2lh_2}{R^2} \right). \tag{7}$$

Радиальные перемещения v_r экрана и прогибы w_i элементов конструкции (нижние индексы «1» или «2» указывают на то, что соответствующие величины относятся к пластинке или цилиндру) выражаются формулами [4]

$$v_r = Q_2 (1 - \nu_1) r / E_1 h_1, \tag{8}$$

$$\begin{gathered} w_1 = \frac{qR^4}{64(1+\nu_1) D_1} \left[5 + \nu_1 + M_1 - (1+\nu_1) \frac{r^2}{R^2} \right] \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \\ w_2 = A_1 + e^{kx} (C_3 \cos kx + C_4 \sin kx) + e^{-kx} (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx), \end{gathered} \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered} D_1 = \frac{E_1 h_1^3}{12(1-\nu_1^2)}, \quad M_1 = -32 \frac{h_2^2}{R^2} M_2, \\ A_1 = \frac{qR^2 (2-\nu_2)}{2E_2 h_2}, \quad k = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu_2^2)}}{\sqrt{Rh_2}}, \end{gathered} \tag{10}$$

ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга; M_2 и Q_2 — безразмерные изгибающий момент и перерезывающая сила в оболочке на линии спая с диском. Постоянные M_2, Q_2, C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из граничных условий при $x = l$ и условий сопряжения при $r = R$ и $x = 0$, т. е. из системы шести алгебраических уравнений, которые здесь не выписаны из-за громоздкости.

Максимальные растягивающие напряжения $\sigma_r^{\max}$ и $\sigma_x^{\max}$ на внешней поверхности экрана возникают на линии спая. Поэтому ограничения задачи оптимизации (3) записываются в виде

$$\begin{aligned} &g_1(h_1, h_2) \equiv \sigma_r^{\max}/[\sigma]_1 \leqslant 1, \\ &g_2(h_1, h_2) \equiv \sigma_x^{\max}/[\sigma]_2 \leqslant 1, \\ &h_j > 0, \qquad j = 1,\ 2, \end{aligned} \tag{11}$$

где $[\sigma]_j$ — допускаемые напряжения.

Для аппроксимации функций $g_k(h_1, h_2)$ одночленными позиномами (1), т. е. для вычисления показателей a_{kj}, используются формулы численного дифференцирования функции двух переменных [3]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g}{\partial h_1} \simeq \frac{1}{h}\left\{\Delta^{1+0}g_{00} + \frac{1}{2!}\left[(p-1)\,\Delta^{2+0}g_{00} + p\Delta^{2+0}g_{00} + 2q\Delta^{1+1}g_{00}\right]\right\}, \\ &\frac{\partial g}{\partial h_2} \simeq \frac{1}{k}\left\{\Delta^{0+1}g_{00} + \frac{1}{2!}\left[2p\Delta^{1+1}g_{00} + (q-1)\,\Delta^{0+2}g_{00} + q\Delta^{0+2}g_{00}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь обозначено

$$\Delta^{m+n}g_{ij} = \Delta^{m+n}_{h_1^m h_2^n} = \Delta^m_{h_1^m}(\Delta^n_{h_2^n}g_{ij}) = \Delta^n_{h_2^n}(\Delta^m_{h_1^m}g_{ij}),$$

$$\Delta^{0+0}g_{ij} = g_{ij}, \quad g_{ij} = g\,(h_1^0 + ih,\ h_2^0 + jk),$$

$$\Delta_{h_1}g_{ij} = g_{i+1,j} - g_{ij}, \quad \Delta_{h_2}g_{ij} = g_{i,j+1} - g_{ij},$$

$$p = (h_1 - h_1^0)/h, \quad q = (h_2 - h_2^0)/k,$$

h, k — шаги разбиения по h_1 и h_2 соответственно.

Определив исходную точку $\bar{h}^*$, можно принять ее за нулевой узел образованной сетки. В этом случае $p = g = 0$ и формулы (12) значительно упрощаются. Используя аппроксимацию функций g_0, g_1, g_2 (7), (11) одночленными позиномами (1), получаем задачу с нулевой степенью трудности. Соответствующая двойственная функция и ограничения двойственной задачи принимают вид

$$v(\bar{\delta}) = \left(\frac{C_0}{\delta_1}\right)^{\delta_1} C_1^{\delta_2} C_2^{\delta_3}, \quad \delta_j \geqslant 0, \tag{13}$$

$$\delta_1 = 1, \quad \sum_{j=1}^{3} a_{jk}\delta_j = 0, \qquad k = 1,\ 2. \tag{14}$$

После решения системы (14) легко определяется минимизирующая точка $\bar{h}'(h_1', h_2')$ [1]. Задача доведена до числа при следующих данных: $R = 19{,}45$ *мм*, $l = 25$ *мм*, $E_1 = E_2 = 6240$ *кГ/мм*^{2}, $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}2$, $[\sigma]_1/q = [\sigma]_2/q = 90$, для которых определена минимизирующая точка, т. е. оптимальные значения толщин $h_1' = 1{,}596$ *мм*, $h_2' = 1{,}598$ *мм*. Соответствующие максимальные растягивающие напряжения на линии спая таковы: $\sigma_x^{\max}/q = 89{,}68$, $\sigma_r^{\max}/q = 89{,}93$.

Решение проводилось на ЭВМ «Минск-22». Сравнение результатов с аналитическим решением рассматриваемой задачи показало, что погрешность численного решения не превышает 2%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К.* Геометрическое программирование. М., «Наука», 1971.
2. *Зенер К.* Геометрическое программирование и техническое проектирование. М., «Мир», 1973.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М., «Наука», 1974.
4. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1968.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 10.XI 1974 г.