

Г. В. Пляцко, В. К. Ганулич, Г. Я. Кушнир

**К РАСЧЕТУ ОСТАТОЧНЫХ СВАРОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ
В ТОЛСТЫХ ТРУБАХ**

Определим поле остаточных сварочных напряжений в длинной толстостенной свободной от внешних усилий трубе, сваренной встык из двух полубесконечных полых цилиндров с внешним r_1 и внутренним r_2 радиусами. Остаточные сварочные напряжения обусловлены структурными изменениями в зоне термического влияния, осесимметричной пластической деформацией, развившейся в процессе охлаждения сварного шва и другими сопутствующими сварке процессами. Аналогично работам [5, 6] предположим, что распределение остаточных деформаций $\varepsilon_{ij}^0(x_k)$ известно из эксперимента.

Считая это распределение заданным, построим решение системы уравнений теории упругости в перемещениях [1]:

$$\Delta u_i + \frac{1}{1-2\nu} \nabla_i \nabla_j u_j = \nabla_i e_{ij}^0(x_k) \quad (1)$$

при условиях

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0 \quad (2)$$

на поверхностях $r = r_1$ и $r = r_2$, где r — радиальная координата; u_i — компонент вектора перемещения в направлении x_i ; ν — коэффициент Пуассона; ∇ — набла-оператор Гамильтона; Δ — оператор Лапласа;

$$e_{ij}^0 = \varepsilon_{ij}^0 + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{\alpha\alpha}^0 \delta_{ij}, \quad (3)$$

δ_{ij} — символ Кронекера.

В соответствии с работой [2] решение уравнения (1) построим на основании решений следующих уравнений:

$$\Delta \Phi = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int \nabla_i e_{ij}^0(x_k) dx_i = \Phi(\varepsilon_{ij}^0), \quad (4)$$

$$\Delta \Delta L = 0. \quad (5)$$

Здесь Φ — дисторсионный аналог термоупругого потенциала перемещений, L — функция напряжений Эри. Уравнение (4) определяет частное решение задачи (1), (2), а уравнение (5) — обеспечивает выполнение граничных условий, которые теперь следует записать в виде

$$\sigma_{rr}^{(1)} + \sigma_{rr}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{rz}^{(1)} + \sigma_{rz}^{(2)} = 0 \quad (6)$$

при $\rho = 1$, $\rho = m = r_2/r_1$, где $\rho = r/r_1$ — безразмерная радиальная координата. Составляющие тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(1)}$ и $\sigma_{ij}^{(2)}$ определяются равенствами

$$\sigma_{ij}^{(1)} = 2G(\nabla_i \nabla_j \Phi - \Delta \Phi \delta_{ij}), \quad (7)$$

$$\sigma_{rr}^{(2)} = G^* \nabla_{\xi} (\nu \Delta L - \nabla_{\rho} \nabla_{\rho} L), \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = G^* \nabla_{\xi} (\nu \Delta L - \rho^{-1} L),$$

$$\sigma_{zz}^{(2)} = G^* \nabla_{\xi} [(2-\nu) \Delta L - \nabla_{\xi} \nabla_{\xi} L], \quad \sigma_{rz}^{(2)} = G^* \nabla_{\rho} [(1-\nu) \Delta L - \nabla_{\xi} \nabla_{\xi} L], \quad (8)$$

где G — модуль сдвига, $G^* = 2G/(1-2\nu)r_1^3$, $\nabla_{\rho} = \partial/\partial\rho$, $\nabla_{\xi} = \partial/\partial\xi$, $\xi = z/r_1$ — безразмерная осевая координата.

Используя преобразование Фурье по ξ , уравнения (4), (5) представим в виде

$$\bar{\Delta} \bar{\Phi}(\rho) = r_1^2 x^{-2} \bar{\Phi}(\rho), \quad (9)$$

$$\bar{\Delta} \bar{\Delta} \bar{L}(\rho) = 0, \quad (10)$$

где x — параметр преобразования, $\rho = \rho x$, а $\bar{\Delta}$ — преобразованный по Фурье лапласиан в цилиндрической системе координат. Решениями этих уравнений соответственно будут [3] выражения

$$\bar{\Phi}(\rho) = x^{-2} [I_0(\rho) \int \rho K_0(\rho) \bar{\varphi}(\rho) d\rho - K_0(\rho) \int \rho I_0(\rho) \bar{\varphi}(\rho) d\rho], \quad (11)$$

$$I(\rho) = C_1 I_0(\rho) + C_2 K_0(\rho) + C_3 \rho I_1(\rho) + C_4 \rho K_1(\rho), \quad (12)$$

где $I_n(\rho)$ и $K_n(\rho)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка n ; C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — постоянные, для определения которых на основании выражений (6) и (7) получаем систему уравнений

$$\alpha_{ij} C_i = a_j \quad (i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, m), \quad (13)$$

причем α_{ij} и a_j — граничные значения некоторых вполне определенных комбинаций бесселевых функций и функции возмущения φ (ε_{ij}^0). Подставляя найденные значения $C_i = \Delta_i/\Delta_0$ в выражение (12), а затем в (8) и (7) с учетом (11) и осуществляя обратное преобразование Фурье, находим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_{rr}^{(1)} + \frac{iG^*}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \rho^{-1} \Delta_0^{-1}(x) \{ \Delta_1(x) [\rho I_0(\rho) - I_1(\rho)] + \\ &+ \Delta_2(x) [\rho K_0(\rho) + K_1(\rho)] - \Delta_3(x) \rho [(1 - 2\nu) I_0(\rho) + \rho I_1(\rho)] - \\ &- \Delta_4(x) \rho [(1 - 2\nu) K_0(\rho) - \rho K_1(\rho)] \} e^{i\xi x} dx, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} + \frac{iG^*}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \rho^{-1} \Delta_0^{-1}(x) \{ \Delta_1(x) I_1(\rho) - \Delta_2(x) K_1(\rho) + \\ &+ (1 - 2\nu) \rho \Delta_3(x) I_0(\rho) - (1 - 2\nu) \rho \Delta_4(x) K_0(\rho) \} e^{i\xi x} dx, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \sigma_{zz}^{(1)} - \frac{iG^*}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \Delta_0^{-1}(x) \{ \Delta_1(x) I_0(\rho) + \Delta_2(x) K_0(\rho) + \\ &+ \Delta_3(x) [2(2 - \nu) I_0(\rho) + \rho I_1(\rho)] - \Delta_4(x) [2(2 - \nu) K_0(\rho) - \rho K_1(\rho)] \} e^{i\xi x} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= \sigma_{rz}^{(1)} + \frac{G^*}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \Delta_0^{-1}(x) \{ \Delta_1(x) I_1(\rho) - \Delta_2(x) K_1(\rho) + \\ &+ \Delta_3(x) [\rho I_0(\rho) + 2(1 - \nu) I_1(\rho)] - \Delta_4(x) [\rho K_0(\rho) - 2(1 - \nu) K_1(\rho)] \} e^{i\xi x} dx, \end{aligned}$$

где Δ_i ($i = 0, 1, \dots, 5$) — определители системы (13).

Рассмотрим частный случай распределения дисторсий, когда $\varepsilon_{ij}^0(x_k)$ постоянны по толщине трубы, т. е. являются функциями одной лишь осевой координаты z . Это приводит к существенным упрощениям формул (14), не искажая исходных условий задачи, особенно для не слишком толстых труб, так как при однородном сквозном по толщине расплавлении металла (стыковая сварка) структура охлажденной зоны термического влияния меняется в основном вдоль образующей трубы. Кроме того, предположение $\varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon_{ij}^0(\xi)$ оправдано для труб любой толщины, если остаточные напряжения обусловлены одним лишь удельным изменением объема металла зоны термического влияния.

В рассматриваемом случае интегралы в правой части (11) легко вычисляются, вследствие чего выражение для Δ_i ($i = 0, \dots, 4$) не будут содержать операции интегрирования. Это позволяет преобразовать формулы для определения напряжений (14) к виду

$$\sigma_{rr} = -G^* \varphi(\xi) + J_1(\rho, \xi), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = G^* \varphi(\xi) + J_2(\rho, \xi), \quad (15)$$

$$\sigma_{zz} = J_3(\rho, \xi), \quad \sigma_{rz} = -iJ_4(\rho, \xi),$$

где через J_k ($k = 1, 2, 3, 4$) обозначены интегралы

$$J_k(\rho, \xi) = \frac{G^*}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(\rho, x) \bar{\varphi}(x) e^{i\xi x} dx. \quad (16)$$

Функции $\psi_k(\rho, x)$ имеют такие значения:

$$\begin{aligned} \Delta_0 \psi_1(\rho, x) &= \Delta_1(x) [\rho I_0(\rho) - I_1(\rho)] + \Delta_2(x) [\rho K_0(\rho) + K_1(\rho)] + \\ &+ \Delta_3(x) \rho [(1 - 2\nu) I_0(\rho) + \rho I_1(\rho)] - \Delta_4(x) \rho [(1 - 2\nu) K_0(\rho) - \rho K_1(\rho)], \\ \Delta_0 \psi_2(\rho, x) &= \Delta_1(x) I_1(\rho) - \Delta_2(x) K_1(\rho) + (1 - 2\nu) \rho \Delta_3(x) I_0(\rho) - \\ &- (1 - 2\nu) \rho \Delta_4(x) K_0(\rho), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{1}{x} \Delta_0 \psi_3(\rho, x) = \Delta_1(x) I_0(\rho) + \Delta_2(x) K_0(\rho) + \Delta_3(x) [2(2 - \nu) I_0(\rho) + \rho I_1(\rho)] - \Delta_4(x) [2(2 - \nu) K_0(\rho) - \rho K_1(\rho)],$$

$$\frac{1}{x} \Delta_0 \psi_4(\rho, x) = \Delta_1(x) I_1(\rho) - \Delta_2(x) K_1(\rho) + \Delta_3(x) [\rho I_0(\rho) + 2(1 - \nu) I_1(\rho)] - \Delta_4(x) [\rho K_0(\rho) - 2(1 - \nu) K_1(\rho)].$$

Укажем на некоторые свойства этих функций. Нетрудно установить, используя свойства четности-нечетности функций Бесселя $I_n(\rho)$ и $K_n(\rho)$,

Таблица 1

x	m = 0,9							
	ρ = 1		ρ = 0,95				ρ = 0,9	
	ψ ₂	ψ ₃	ψ ₁	ψ ₂	ψ ₃	ψ ₄	ψ ₂	ψ ₃
0,01	1,0	0	0,9500	0,9500	0	0	0,900	0
0,25	1,0007	0,0023	0,9500	0,9500	0,0001	0	0,8994	0,0023
0,50	1,0027	0,0091	0,9499	0,9500	0,0002	0,0001	0,8975	0,0091
0,75	1,0060	0,0205	0,9498	0,9498	0,0005	0,0004	0,8943	0,0205
1,00	1,0104	0,0365	0,9497	0,9496	0,0010	0,0009	0,8896	0,0364
1,25	1,0154	0,0567	0,9496	0,9487	0,0015	0,0018	0,8838	0,0564
1,50	1,0218	0,0816	0,9494	0,9472	0,0022	0,0031	0,8752	0,0816
1,75	1,0281	0,1098	0,9491	0,9449	0,0029	0,0048	0,8645	0,1105
2,00	1,0346	0,1434	0,9489	0,9414	0,0038	0,0071	0,8526	0,1433
2,25	1,0401	0,1801	0,9486	0,9364	0,0048	0,0100	0,8376	0,1796
2,50	1,0456	0,2192	0,9483	0,9294	0,0059	0,0136	0,8201	0,2188
2,75	1,0491	0,2614	0,9479	0,9202	0,0070	0,0179	0,7996	0,2600
3,00	1,0511	0,3046	0,9476	0,9089	0,0082	0,0227	0,7765	0,3035
3,25	1,0505	0,3458	0,9472	0,8948	0,0095	0,0281	0,7504	0,3476
3,50	1,0473	0,3927	0,9496	0,8781	0,0109	0,0341	0,7219	0,3901
3,75	1,0400	0,4334	0,9465	0,8586	0,0122	0,0403	0,7085	0,4152
4,00	1,0314	0,4753	0,9461	0,8366	0,0136	0,0469	0,6583	0,4703
4,25	1,0184	0,5130	0,9458	0,8123	0,0149	0,0536	0,6243	0,5052
4,50	1,0029	0,5448	0,9455	0,7861	0,0163	0,0602	0,5896	0,5358
4,75	0,9841	0,5677	0,9452	0,7584	0,0177	0,0667	0,5549	0,5611
5,00	0,9631	0,5957	0,9449	0,7298	0,0182	0,0728	0,5207	0,5811

что первые три $\psi_k(\rho, x)$ ($k = 1, 2, 3$) четные, а $\psi_4(\rho, x)$ — нечетная функций x . Благодаря этим свойствам интегралы $J_k(\rho, \xi)$ могут быть представлены в форме синус- или косинус-преобразований, если функция компонентов тензора дисторсий $\varphi(\epsilon_{ij}^0)$ обладает также свойством четности или нечетности.

Кроме того, можно показать, что при любом $m \leq \rho \leq 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \psi_k(\rho, x) &= 0, \quad k = 2, 3, 4, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \psi_1(\rho, x) &= \begin{cases} m, & \rho = m, \\ 0, & m < \rho < 1, \\ 1, & \rho = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

Эти пределы обеспечивают сходимость интегралов $J_k(\rho, \xi)$, как только функция $\varphi(\varepsilon_{ij}^0)$ финитна, что диктуется условиями задачи.

Нетрудно установить, что для любого x при $\rho = 1, \rho = m$

$$\psi_1(1, x) = 1, \quad \psi_1(m, x) = m, \quad \psi_4(1, x) = \psi_4(m, x) = 0, \quad (19)$$

что есть следствием выполнения граничных условий (6). Главное свойство функций $\psi_k(\rho, x)$ — их независимость от компонентов тензора дисторсий $\varepsilon_{ij}^0(x_k)$. Будучи функциями радиальной координаты ρ и параметра преобразования x , они полностью служат характеристиками одной лишь геомет-

Т а б л и ц а 2

x	m = 0,8							
	ρ = 1		ρ = 0,9				ρ = 0,8	
	ψ ₂	ψ ₃	ψ ₁	ψ ₂	ψ ₃	ψ ₄	ψ ₂	ψ ₃
0,01	1	0	0,9000	0,9000	0	0	0,8000	0
0,25	1,0013	0,0043	0,8999	0,9000	0,0002	0,0001	0,7990	0,0043
0,50	1,0051	0,0173	0,8997	0,8999	0,0010	0,0004	0,7957	0,0173
0,75	1,0111	0,0388	0,8994	0,8994	0,0022	0,0014	0,7901	0,0388
1,00	1,0188	0,0686	0,8990	0,8982	0,0038	0,0034	0,7817	0,0685
1,25	1,0276	0,1066	0,8983	0,8950	0,0058	0,0066	0,7698	0,1013
1,50	1,0367	0,1515	0,8976	0,8909	0,0085	0,0113	0,7544	0,1511
1,75	1,0448	0,2029	0,8968	0,8833	0,0114	0,0176	0,7344	0,2019
2,00	1,0511	0,2589	0,8958	0,8723	0,0147	0,0256	0,7099	0,2572
2,25	1,0541	0,3179	0,8947	0,8569	0,0183	0,0352	0,6805	0,3147
2,50	1,0531	0,3773	0,8936	0,8373	0,0220	0,462	0,6466	0,3719
2,75	1,0469	0,4348	0,8924	0,8127	0,0258	0,0583	0,6086	0,4215
3,00	1,0356	0,4880	0,8913	0,7842	0,0300	0,0710	0,5678	0,4748
3,25	1,0187	0,5345	0,8902	0,7517	0,0335	0,0836	0,5271	0,5160
3,50	0,9972	0,5735	0,8892	0,7168	0,0372	0,0958	0,4622	0,5467
3,75	0,9715	0,6034	0,8883	0,6800	0,0208	0,1070	0,4403	0,5683
4,00	0,9483	0,6250	0,8875	0,6435	0,0443	0,1170	0,4006	0,5780
4,25	0,9181	0,6381	0,8867	0,6073	0,0476	0,1253	0,3641	0,5782
4,50	0,8824	0,6444	0,8861	0,5727	0,0508	0,1321	0,3312	0,5710
4,75	0,8520	0,6445	0,8856	0,5399	0,0540	0,1373	0,3002	0,5524
5,00	0,8226	0,6403	0,8851	0,5096	0,0572	0,1411	0,2773	0,5353

рии полого цилиндра. Это обстоятельство позволило построить с помощью ЭВМ «Минск-32» таблицы значений $\psi_k(\rho, x)$ вдоль поверхностей $\rho = \text{const}$ для различных толщин стенки, характеризуемых параметром $0 < m < 1$ (часть этих таблиц с увеличенным шагом приведена в табл. 1, 2). Эти таблицы могут быть полезными при решении такого класса задач, в которых возмущающая напряженное состояние функция $\varphi(\xi)$ (температура, диффузия вещества, массовые силы и т. д.) постоянна по толщине стенки полого цилиндра. Из таблиц видно, что значения ψ_k изменяются довольно плавно вдоль оси x , что позволяет без затруднений строить аппроксимации этих функций.

В качестве примера определим доминирующие окружные направления $\sigma_{\varphi\varphi}$ для случая равномерного изменения удельного объема материала кольцевой зоны термического влияния [4] (зоны структурных изменений), возникающей при сварке двух полубесконечных труб с отношением радиусов $m = 0,9$. При отсутствии сдвиговых компонентов дисторсии из уравнения (4) с учетом того, что $\varepsilon_{\alpha\alpha}^0(x_k)$ величина инвариантна, а усадка материала изотропна, получаем

$$\varphi(\xi) = \frac{3(1+\nu)}{2(1-\nu)} \varepsilon^0(\xi), \quad (20)$$

где $\epsilon^0(\xi) = \epsilon^0 [S(\xi + \xi_0) - S(\xi - \xi_0)]$; $S(\xi)$ — функция Хевисайда; $2\xi_0$ — ширина зоны термического влияния; $\epsilon^0 = \text{const}$.

Построив Фурье-образ $\bar{\varphi}(x)$, подставив его выражение в интеграл (16) и используя свойство четности функции $\Psi_2(\rho, x)$, получим

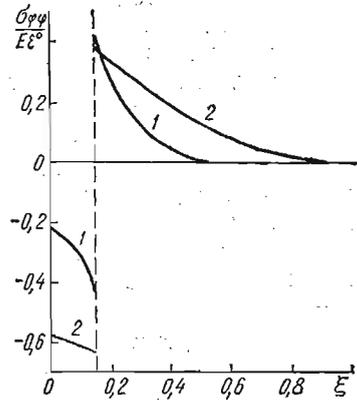
$$J_2(\rho, \xi) = \frac{3(1+\nu)G^*\epsilon^0}{2(1-\nu)\pi^2\rho} \int_0^\infty \Psi_2(\rho, x) \cos \xi x \sin \xi_0 x \frac{dx}{x}. \quad (21)$$

На срединной поверхности трубы ($\rho = 0,95$) $\Psi_2(\rho, x)$ хорошо аппроксимируется зависимостью

$$\Psi_2(0,95; x) \approx \frac{\alpha}{x^2 + \beta^2}, \quad (22)$$

где $\alpha = 0,76528 \cdot 10^2$; $\beta = 0,80(5) \cdot 10^2$, причем максимальная ошибка аппроксимации составляет менее 10%. Интеграл (21) с учетом (22) легко вычисляется по формуле

$$J_2(0,95; \xi) = \frac{3(1+\nu)\alpha G^*\epsilon^0}{4(1-\nu)\pi\beta^2} \begin{cases} 1 - e^{-\beta\xi_0} \text{ch } \beta\xi, & \xi < \xi_0, \\ \text{sh } \beta\xi_0 e^{-\beta\xi}, & \xi > \xi_0. \end{cases} \quad (23)$$



Используя формулы (15), находим

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{3(1+\nu)G^*\epsilon^0}{4\pi(1-\nu)} e^{-\beta\xi} \text{ch } \beta\xi \quad \text{при } \xi < \xi_0, \quad (24)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{3(1+\nu)G^*\epsilon^0}{4\pi(1-\nu)} \text{sh } \beta\xi_0 e^{-\beta\xi} \quad \text{при } \xi > \xi_0.$$

График этих напряжений, отнесенных к $E\epsilon^0$, при $\xi_0 = 0,15$, $\nu = 0,3$ показан на рисунке (кривая 1). Этот результат согласуется с полученным в работе [5], где остаточные кольцевые напряжения определяются на основании уравнений теории тонких оболочек (кривая 2 на рисунке). Из графиков видно, что рассчитанные по уравнениям трехмерной теории упругости окружные напряжения в трубе существенно меньше напряжений, определяемых уравнениями моментной теории тонких оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ганулич В. К. Задача теории упругости для среды с заданным полем тензора дисторсии. — Математические методы и физико-механические поля, 1975, вып. 1, с. 143—155.
2. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М., Физматгиз, 1958.
3. Новацкий В. Вопросы термоупругости. К., Изд-во АН УССР, 1962.
4. Петров Г. Л., Тумарев А. С. Теория сварочных процессов. М., «Выш. школа», 1967.
5. Подстригац Я. С., Осадчук В. А. Исследование напряженного состояния цилиндрических оболочек, обусловленного заданным тензором несовместных деформаций и его приложение к определению сварочных напряжений. — ФХММ, 1968, № 4, с. 400—407.
6. Nowacki W. Thermoelastic Distorsion Problems. — Bull. d. L'Acad. pol., 1966, 14, N 3.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 5.IX 1974 г.