УДК 539. 3.

Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ

Термоупругое состояние тела при постоянных физико-механических характеристиках материала определяется из системы уравнений

$$\Delta T + \frac{1}{\lambda} Q - \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\alpha E T_0}{\lambda (1 - 2\nu)} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{u}) = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{Div} \hat{\sigma} + \vec{F} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} = 2G \left[e_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} e \delta_{ij} - \frac{\alpha (1 + \nu)}{1 - 2\nu} \delta_{ij} T \right], \tag{3}$$

$$\hat{e} = \operatorname{Def} \vec{u}. \tag{4}$$

Здесь T — отклонение температуры от начальной T_0; T_0 — начальная температура, °К; $\vec{u} = \{u_i\}$ — вектор перемещений; $\hat{e} = \{e_{ij}\}$ — тензор деформации; $\hat{\sigma} = \{\sigma_{ij}\}$ — тензор напряжений; $e_{kk} = e$; λ, $\varkappa$ — коэффициенты тепло- и температуропроводности; α, E,ν— коэффициент линейного расширения, модуль упругости и коэффициент Пуассона; G — модуль сдвига; ρ — плотность; δ_{ij} — символ Кронекера; t — время.

К уравнениям (1)—(4) необходимо присоединить заданные начальные и граничные условия. В качестве начальных условий примем, что в начальный момент времени $t = 0$ поле вектора перемещения $\vec{u}$, скорость $\dot{\vec{u}}$ и температура T равны нулю, т. е.

$$u_i(\vec{r}, 0) = 0, \quad \dot{u}_i(\vec{r}, 0) = 0, \quad T(\vec{r}, 0) = 0, \tag{5}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор произвольной точки тела.

Запишем систему уравнений термоупругости, когда в качестве разрешающих функций выбраны температура T и тензор напряжения $\hat{\sigma}$. Для этого уравнение состояния (3) с использованием соотношений Коши [4] запишем в форме

$$\operatorname{Def} \vec{u} = \frac{1}{2G} \hat{\sigma} + \left(\alpha T - \frac{\nu}{E} \sigma \right) \hat{I}, \tag{6}$$

где $\hat{I} = \{\delta_{ij}\}$ — единичный тензор; $\sigma = \sigma_{kk}$.

Применяя операцию свертки, находим

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1 - 2\nu}{E} \sigma + 3\alpha T. \tag{7}$$

С учетом соотношения (7) система уравнений (1)—(4) запишется так:

$$\Delta T + \frac{1}{\lambda} Q - \left(\frac{1}{\varkappa} + \frac{3\alpha^2 E T_0}{\lambda (1 - 2\nu)} \right) \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\alpha T_0}{\lambda} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0,$$

$$\mathrm{Div}\,\hat{\sigma} + \vec{F} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2},$$

$$\mathrm{Def}\,\vec{u} = \frac{1+\nu}{E}\hat{\sigma} + \left(\alpha T - \frac{\nu}{E}\sigma\right)\hat{I}. \qquad (8)$$

Применяя преобразование Лапласа к двум последним уравнениям (8), с учетом начальных условий (5) получаем

$$\mathrm{Div}\,\tilde{\hat{\sigma}} + \tilde{\vec{F}} = \rho p^2 \tilde{\vec{u}},$$

$$\mathrm{Def}\,\tilde{\vec{u}} = \frac{1}{2G}\tilde{\hat{\sigma}} + \left(\alpha\tilde{T} - \frac{\nu}{E}\tilde{\sigma}\right)\hat{I}. \qquad (9)$$

Здесь тильдой обозначены трансформанты Лапласа. Из первого уравнения (9) находим

$$\tilde{\vec{u}} = \frac{1}{\rho p^2}(\mathrm{Div}\,\tilde{\hat{\sigma}} + \tilde{\vec{F}}). \qquad (10)$$

Подставляя теперь выражение для $\tilde{\vec{u}}$ во второе уравнение (9) и переходя к оригиналам, с учетом принятых начальных условий (5) на функции $\vec{u}$ и $\dot{\vec{u}}$ получаем

$$\mathrm{Def}\,(\mathrm{Div}\,\hat{\sigma} + \vec{F}) = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{2G}\hat{\sigma} + \left(\alpha T - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\right)\hat{I}\right]. \qquad (11)$$

Таким образом, уравнение движения (2), записанное в напряжениях, приведено к виду (11).

Действуя на уравнения состояния (4) оператором несовместности Ink, т. е.

$$\mathrm{Ink}\,\hat{e} \equiv \vec{\nabla} \times \hat{e} \times \vec{\nabla} = \mathrm{Ink}\left[\frac{1}{2G}\hat{\sigma} + \left(\alpha T - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\right)\hat{I}\right]$$

с учетом того, что $\hat{e} = \mathrm{Def}\,\vec{u}$ и $\mathrm{Ink}\,\mathrm{Def} \equiv 0$, получаем дополнительное условие

$$\mathrm{Ink}\left[\frac{1}{2G}\hat{\sigma} + \left(\alpha T - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\right)\hat{I}\right] = 0 \qquad (12)$$

на тензор напряжений и температуру, которое является следствием совместности деформации (сплошности среды).

Присоединяя к полученным уравнениям (11), (12) первое из уравнений (8), приходим к искомой разрешающей системе уравнений динамической термоупругости, записанной относительно температуры и тензора напряжений:

$$\Delta T + \frac{Q}{\lambda} - \left(\frac{1}{\varkappa} + \frac{3\alpha^2 E T_0}{\lambda(1-2\nu)}\right)\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\alpha T_0}{\lambda}\frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial t} = 0,$$

$$\mathrm{Def}\,(\mathrm{Div}\,\hat{\sigma} + \vec{F}) = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{2G}\hat{\sigma} + \left(\alpha T - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\right)\hat{I}\right], \qquad (13)$$

$$\mathrm{Ink}\left[\frac{1}{2G}\hat{\sigma} + \left(\alpha T - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\right)\hat{I}\right] = 0.$$

Система разрешающих уравнений термоупругости (13) должна решаться при начальных условиях (5), которые с учетом соотношения (6) будут такими:

$$\hat{\sigma}(\vec{r}, 0) = 0, \quad T(\vec{r}, 0) = 0; \quad \frac{1}{2G}\dot{\hat{\sigma}}(\vec{r}, 0) + \left[\alpha\dot{T}(\vec{r}, 0) - \frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_{kk}(\vec{r}, 0)\right]\hat{I} = 0. \quad (14)$$

В частности, если $\dot{T}(\vec{r}, 0) = 0$, то условия (14) запишутся в виде

$$\hat{\sigma}(\vec{r}, 0) = 0, \quad \dot{\hat{\sigma}}(\vec{r}, 0) = 0; \quad T(\vec{r}, 0) = 0. \qquad (15)$$

Аналогично можно получить исходную систему уравнений, которые соответствуют начальным условиям другого вида.

Приведенный вывод динамических уравнений термоупругости в напряжениях основан на применении преобразования Лапласа к последним двум уравнениям (8) при сформулированных начальных условиях (5) с последующим исключением из них вектора перемещений $\vec{u}$, а также использования условия совместности деформации.

Динамическая система уравнений термоупругости, полученная иным путем, приведена в работе [2]. Эта система, однако, не исключает уравнения (12), а уравнение движения, записанное в напряжениях, имеет более сложную аналитическую структуру. Отметим, что из него можно перейти к уравнению (11), используя соотношения (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. К., «Наук. думка», 1970.
2. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М., «Мир», 1970.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 20.IX 1974 г.

УДК 539. 3

Ю. М. Коляно, Н. А. Кондратюк

ОБОБЩЕННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ ЗАДАННОМ ТЕПЛОВОМ ПОТОКЕ НА ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим свободное от внешней нагрузки вязкоупругое полупространство, подвергнутое внезапному нагреву тепловым потоком мощности q по краевой поверхности $z = 0$. Для определения возникающего в полупространстве обобщенного температурного поля $t(z, \tau)$ имеем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau} + c_q^{-2}\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} \tag{1}$$

и краевые условия

$$\frac{\lambda_t}{\tau_r}\int_0^{\tau}\frac{\partial t(z, \zeta)}{\partial z}\bigg|_{z=0} e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r}}\,d\zeta = -qS_+(\tau), \quad t|_{z\to\infty} = 0; \tag{2}$$

$$t = \dot{t} = 0 \text{ при } \tau = 0, \tag{3}$$

где a, λ_t — коэффициенты температуропроводности и теплопроводности; τ_r — время релаксации теплового потока; τ — время; $S_+(\tau)$ — асимметричная единичная функция.

Применив к (1), (2) преобразование Лапласа по τ с учетом начальных условий (3), получим

$$\frac{d^2\bar{t}}{dz^2} = \gamma^2\bar{t}, \tag{4}$$

$$\frac{d\bar{t}}{dz}\bigg|_{z=0} = -q\left(\frac{1}{s} + \tau_r\right), \quad \bar{t}|_{z\to\infty} = 0, \tag{5}$$

где

$$\gamma = \sqrt{\frac{s}{a} + \frac{s^2}{c_q^2}}.$$