Аналогично можно получить исходную систему уравнений, которые соответствуют начальным условиям другого вида.

Приведенный вывод динамических уравнений термоупругости в напряжениях основан на применении преобразования Лапласа к последним двум уравнениям (8) при сформулированных начальных условиях (5) с последующим исключением из них вектора перемещений $\vec{u}$, а также использования условия совместности деформации.

Динамическая система уравнений термоупругости, полученная иным путем, приведена в работе [2]. Эта система, однако, не исключает уравнения (12), а уравнение движения, записанное в напряжениях, имеет более сложную аналитическую структуру. Отметим, что из него можно перейти к уравнению (11), используя соотношения (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. К., «Наук. думка», 1970.
2. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М., «Мир», 1970.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 20.IX 1974 г.

УДК 539. 3

Ю. М. Коляно, Н. А. Кондратюк

ОБОБЩЕННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ ЗАДАННОМ ТЕПЛОВОМ ПОТОКЕ НА ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим свободное от внешней нагрузки вязкоупругое полупространство, подвергнутое внезапному нагреву тепловым потоком мощности q по краевой поверхности $z = 0$. Для определения возникающего в полупространстве обобщенного температурного поля $t(z, \tau)$ имеем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau} + c_q^{-2}\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} \tag{1}$$

и краевые условия

$$\frac{\lambda_t}{\tau_r}\int\limits_0^{\tau} \left.\frac{\partial t(z, \zeta)}{\partial z}\right|_{z=0} e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r}}\, d\zeta = -qS_+(\tau), \quad t|_{z\to\infty} = 0; \tag{2}$$

$$t = \dot{t} = 0 \text{ при } \tau = 0, \tag{3}$$

где a, λ_t — коэффициенты температуропроводности и теплопроводности; τ_r — время релаксации теплового потока; τ — время; $S_+(\tau)$ — асимметричная единичная функция.

Применив к (1), (2) преобразование Лапласа по τ с учетом начальных условий (3), получим

$$\frac{d^2\bar{t}}{dz^2} = \gamma^2\bar{t}, \tag{4}$$

$$\left.\frac{d\bar{t}}{dz}\right|_{z=0} = -q\left(\frac{1}{s} + \tau_r\right), \quad \bar{t}|_{z\to\infty} = 0, \tag{5}$$

где

$$\gamma = \sqrt{\frac{s}{a} + \frac{s^2}{c_q^2}}.$$

Решение краевой задачи (4), (5) имеет вид

$$\bar{t} = \frac{q}{\lambda_t \gamma}\left(\frac{1}{s} + \tau_r\right) e^{-z\gamma}. \tag{6}$$

Переходя в (6) от изображений к оригиналам, находим

$$t = \frac{q c_q}{\lambda_t}\left[\int_0^\tau \varphi(z, \zeta)\, d\zeta + \tau_r \varphi(z, \tau)\right], \tag{7}$$

где

$$\varphi(z, \tau) = e^{-\frac{c_q^2 \tau}{2a}} I_0\left(\frac{c_q^2}{2a}\sqrt{\tau^2 - \frac{z^2}{c_q^2}}\right) S_-\left(\tau - \frac{z}{c_q}\right).$$

Если на краю полупространства имеет место классическое условие теплообмена второго рода, решение задачи теплопроводности для этого случая получим, положив в (7) $\tau_r = 0$.

Для определения возникающих в вязкоупругом полупространстве температурных напряжений используем известные [1] формулы в изображениях

$$\bar{\sigma}_{zz} = s^2 \rho \bar{\Phi}, \quad \bar{\sigma}_{xx} = \bar{\sigma}_{yy} = -2\bar{m}\bar{\mu}\bar{t} + \bar{\lambda}\bar{\sigma}^2 s^2 \bar{\Phi}, \tag{8}$$

где $\bar{\Phi}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\bar{\Phi}}{dz^2} - s^2\bar{\sigma}^2\bar{\Phi} = \bar{m}\bar{t}. \tag{9}$$

Здесь $\bar{\mu} = s\bar{a}$; $\bar{\lambda} = s\bar{b}$; $\bar{\beta} = s\bar{c}$; $\bar{m} = \dfrac{\bar{\beta}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}$; $\bar{c}$ — изображение Лапласа; $c(\tau) = \alpha_t [3b(\tau) + 2a(\tau)]$; $\bar{\sigma}^2 = \dfrac{\rho}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}$; ρ — плотность; α_t — температурный коэффициент линейного расширения; $a(\tau)$ и $b(\tau)$ — функции времени, которым в случае идеально упругого тела соответствуют постоянные Ляме μ_0 и λ_0.

Решение уравнения (9) с учетом (6) имеет вид

$$\bar{\Phi} = A e^{-s\bar{\sigma}z} + B e^{s\bar{\sigma}z} + \frac{q\bar{m}(1 + \tau_r s)}{\lambda_t \gamma (\gamma^2 - \bar{\sigma}^2 s^2) s} e^{-z\gamma}. \tag{10}$$

Поскольку полупространство свободно от внешней нагрузки, то

$$\bar{\sigma}_{zz}\big|_{z=0, z\to\infty} = 0 \tag{11}$$

или согласно (8) $\bar{\Phi}\big|_{z=0, jz\to\infty} = 0$.

Определяя из этих условий постоянные интегрирования A и B, окончательно получаем

$$\bar{\Phi} = \frac{q(1 + \tau_r s)\bar{m}}{s\lambda_t \gamma(\gamma^2 - s^2\bar{\sigma}^2)}\left(e^{-z\gamma} - e^{-s\bar{\sigma}z}\right). \tag{12}$$

Если полупространство выполнено из материала М. А. Био,

$$\begin{gathered} \bar{\mu} = \mu_0 \frac{s}{s + \varepsilon}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_0 \frac{s}{s + \varepsilon}, \quad \bar{\sigma}^2 = \sigma_0^2 \frac{s + \varepsilon}{s}, \\ \sigma_0^2 = \frac{\rho}{\lambda_0 + 2\mu_0}, \quad \bar{m} = m_0 = \frac{\beta_0}{\rho}\sigma_0^2, \quad \beta_0 = (3\lambda_0 + 2\mu_0)\alpha_t. \end{gathered} \tag{13}$$

Подставляя (12), (13) в (8), получаем такие выражения изображений температурных напряжений:

$$\begin{gathered} \bar{\sigma}_{zz} = \frac{\rho q (1 + \tau_r s)}{\lambda_t \gamma (c_q^{-2} - \sigma_0^2)(s + \omega)}\left[e^{-z\gamma} - e^{-\sigma_0 z \sqrt{s(s+\varepsilon)}}\right], \\ \bar{\sigma}_{xx} = \bar{\sigma}_{yy} = -2m_0\mu_0 \frac{s\bar{t}}{s + \varepsilon} + \lambda_0 \sigma_0^2 \frac{\bar{\sigma}_{zz}}{\rho}, \end{gathered} \tag{14}$$

где

$$\omega = \frac{\frac{1}{a} - \varepsilon\sigma_0^2}{c_q^{-2} - \sigma_0^2}.$$

Переходя в (14) от изображений к оригиналам, окончательно находим

$$\sigma_{zz} = \frac{\rho q c_q}{\lambda_t (c_q^{-2} - \sigma_0^2)} \left\{ (1 - \tau_r \omega) \int_0^\tau e^{-\omega(\tau - \zeta)} \varphi(z, \zeta)\, d\zeta + \right.$$

$$+ \tau_r \varphi(z, \tau) + \frac{\tau_r c_q^2}{2a} \int_0^\tau e^{-\frac{c_q^2 \zeta}{2a}} \left[I_0\left(\frac{c_q^2 \zeta}{2a}\right) - I_1\left(\frac{c_q^2 \zeta}{2a}\right) \right] \chi(z, \tau - \zeta, 0)\, d\zeta +$$

$$\left. + (\tau_r \omega - 1) \int_0^\tau e^{-\frac{c_q^2 \zeta}{2a}} I_0\left(\frac{c_q^2 \zeta}{2a}\right) \chi(z, \tau - \zeta, \omega)\, d\zeta \right\}, \tag{15}$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -2m_0 \mu_0 \left[t - \varepsilon \int_0^\tau e^{-\varepsilon(\tau - \zeta)} t(z, \zeta)\, d\zeta \right] + \lambda_0 \frac{\sigma_0^2}{\rho} \sigma_{zz},$$

где

$$\chi(z, \tau, \omega) = e^{-\omega\tau} \left[e^{\left(\omega - \frac{\varepsilon}{2}\right)\sigma_0 z} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon}{2} \sigma_0 z \int_0^\tau e^{\left(\omega - \frac{\varepsilon}{2}\right)\eta} \frac{I_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\eta^2 - \sigma_0^2 z^2}\right)}{\sqrt{\eta^2 - \sigma_0^2 z^2}}\, d\eta \right] S_-(\tau - \sigma_0 z).$$

Температурные напряжения, соответствующие классическому условию теплообмена второго рода на краю полупространства, получим из (15) при $\tau_r = 0$. Решение классической динамической задачи термовязкоупругости получим из (15), заменив c_q^2 его значением $\frac{a}{\tau_r}$ и перейдя к пределу при $\tau_r \to 0$, в виде

$$\sigma_{zz} = -\frac{q\rho\sqrt{a}}{\sigma_0^2 \lambda_t} \left\{ \frac{e^{\omega_0 \tau}}{2\sqrt{\omega_0}} \left[e^{-z\sqrt{\frac{\omega_0}{a}}} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{a\tau}} - \sqrt{\omega_0 \tau}\right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - e^{z\sqrt{\frac{\omega_0}{a}}} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{a\tau}} + \sqrt{\omega_0 \tau}\right) \right] - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \chi(z, \tau - \zeta, -\omega_0) \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \right\}, \tag{16}$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -2m_0 \mu_0 \left[t - \varepsilon \int_0^\tau e^{\varepsilon(\zeta - \tau)} t(z, \zeta)\, d\zeta \right] + \lambda_0 \frac{\sigma_0^2}{\rho} \sigma_{zz},$$

где

$$t = \frac{q}{\lambda_t} \left[2\sqrt{\frac{\tau a}{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4a\tau}} - z \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right], \tag{17}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sigma_0^2 a} - \varepsilon.$$

При $z = 0$ из (7), (15)—(17) следуют такие выражения температурного поля и температурных напряжений в полупространстве:

а) в случае обобщенной задачи

$$t|_{z=0} = \frac{q c_q}{\lambda_t} \left[\int_0^\tau \varphi(0, \zeta)\, d\zeta + \tau_r \varphi(0, \tau) \right], \tag{18}$$

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{xx}|_{z=0} = \sigma_{yy}|_{z=0} = -2m_0 \mu_0 \left[t|_{z=0} - \varepsilon \int_0^\tau e^{\varepsilon(\zeta - \tau)} t(0, \zeta)\, d\zeta \right], \tag{19}$$

где

$$\varphi(0, \tau) = e^{-\frac{\tau}{2\tau_r}} I_0\left(\frac{\tau}{2\tau_r}\right) S_-(\tau); \quad (20)$$

б) в случае классической задачи

$$t|_{z=0} = 2\frac{q}{\lambda_t}\sqrt{\frac{\tau a}{\pi}}, \quad (21)$$

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{xx}|_{z=0} = \sigma_{yy}|_{z=0} =$$

$$= -2m_0\mu_0\left[t|_{z=0} - 2\varepsilon\frac{q}{\lambda_t}\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int\limits_0^\tau e^{\varepsilon(\zeta-\tau)}\sqrt{\zeta}d\zeta\right]. \quad (22)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. М., Изд-во АН СССР, 1962.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 8.X 1974 г.

УДК 536. 21

Б. С. Воробец

О ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

В работе [3] задача теплопроводности для тел с включениями сведена к краевой задаче для области, занятой основным материалом, при усложненных граничных условиях на внутренних поверхностях. Предполагалось, что на поверхности раздела материалов выполняются условия идеального теплового контакта. Рассмотрим более общий случай, когда на поверхности раздела материалов имеет место неидеальный тепловой контакт [2]:

$$p_0^2(t_2 + t_1) + 2\left(\lambda_2\frac{\partial t_2}{\partial n} - \lambda_1\frac{\partial t_1}{\partial n}\right) + 4H^{-1}k_*(t_2 - t_1) = 0,$$

$$p_0^2(t_2 - t_1) + 6\left(\lambda_2\frac{\partial t_2}{\partial n} + \lambda_1\frac{\partial t_1}{\partial n}\right) - 12H^{-1}(t_2 - t_1) = 0, \quad (1)$$

где $$p_0^2 = \frac{\Lambda_0}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right] - C_0\frac{\partial}{\partial\tau},$$

$$\Lambda_0 = 2h\lambda_0;\ C_0 = 2hc_0;\ H = 2h\lambda_0^{-1};\ k_* = 2hk.$$

Здесь обозначено: λ_i — коэффициент теплопроводности: c_i — объемная теплоемкость; t_i — температура; $2h$ — толщина промежуточного слоя; k — средняя кривизна срединной его поверхности; A и B — коэффициенты первой квадратичной формы этой поверхности; n — внешняя ее нормаль; α, β — координаты точки на срединной поверхности слоя, отнесенной к линиям кривизны. Здесь и далее индекс $i = 0, 1, 2$ относит рассматриваемую величину к промежуточному слою, включению и основному материалу соответственно.

Линейное включение. Пусть включение, два характерных размера которого малы по сравнению с третьим, занимает область $r \leqslant R_0$. В предположении осевой симметрии температура включения описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 t_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t_1}{\partial r} + p^2 t_1 = -\frac{q_1}{\lambda_1}, \quad p^2 = \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{1}{a_1}\frac{\partial}{\partial\tau}, \quad (2)$$

где r, s — радиальная и осевая координаты; a_i — коэффициент температуропроводности; q_i — интенсивность источников тепла. Будем считать, что на поверхности $r = R_0$ выполняются условия (1).