Подставив это выражение в первое из условий (1), с учетом обозначения (7) найдем

$$\lambda_2 \frac{\partial t_*}{\partial r} = -[p_0^2 - (1-2k_*)\lambda_1 D(p) + H\lambda_1^2 D^2(p)]\, t_* -$$

$$-[(1-2k_*) - H\lambda_1 D(p)]\, R_0^{-1} \int\limits_0^{R_0} \frac{\operatorname{sh} p\eta}{\operatorname{sh} pR_0}\, q_1(\eta)\, \eta d\eta, \quad k_* = 2hR_0^{-1}. \tag{8}$$

Разложив в этом граничном условии операторы $D(p)$ и $\operatorname{sh} p\eta$ $[\operatorname{sh} pR_0]^{-1}$ в ряд по степеням R_0 и отбросив члены порядка R_0^2 и выше, получим

$$\lambda_2 \frac{\partial t_*}{\partial r} = \frac{1}{3} R_0 c_1 [1 - 2k_*(1-3\varkappa_*)] \frac{\partial t_*}{\partial \tau} - (1-2k_*)\, Q_0 +$$

$$+ \frac{R_0^2}{6a_1} \frac{\partial}{\partial \tau} [(1 - 2k_* + 2H\lambda_1 R_0^{-1})\, Q_0 - (1-2k_*)\, Q_1], \tag{9}$$

$$Q_n = R_0^{-1-2n} \int\limits_0^{R_0} \eta^{2n+2} q_1(\eta)\, d\eta \qquad (n = 0,\ 1).$$

Граничное условие (8) можно использовать в качестве приближенного и для объемных включений иной формы, если левую часть этого соотношения заменить производной от t_* по нормали.

Соотношения (4) и (8) при $h \to 0$ переходят в граничные условия, приведенные в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках. К., Вид-во АН УРСР, 1961.
2. *Подстригач Я. С.* Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя.— Инж. физ. журн., 1963, 6, № 10, с. 129—136.
3. *Подстригач Я. С., Воробец Б. С., Чернуха Ю. А.* К термоупругой задаче для тел с включениями.— Прикладная механика, 1972, 8, № 12, с. 80—85.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 13.IX 1974 г.

УДК 539. 377

Г. С. Кит, И. П. Лысый

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ КЛИНА С ТРЕЩИНОЙ

Рассмотрим свободный от внешних усилий бесконечный клин, ограниченный лучами $\theta = \pm\alpha$ $(0 \leqslant r < \infty)$, в котором имеется теплоизолированная трещина длиной $2l = b - a$, расположенная на биссектрисе угла $(\theta = 0,\ a \leqslant r \leqslant b)$. На гранях клина заданы стационарные температурные условия первого или второго рода. Температурное поле представим в виде суммы основного, имеющего место в сплошном клине, и возмущенного, обусловленного наличием трещины. Задача определения температурного поля рассматривалась в работе [2].

Основное температурное поле вызывает в сплошном клине нормальные $\sigma_{\theta\theta}^0$ и касательные $\sigma_{r\theta}^0$ напряжения. Для снятия с берегов трещины нормальных напряжений можно использовать метод, изложенный в работах [3,4]. Здесь остановимся на определении коэффициентов интенсивности напряжений, обусловленных возмущением заданного температурного поля и касательными усилиями $\sigma_{r\theta}^0$. Эти коэффициенты легко найти, если известна производная по r от радиального смещения берегов трещины, а именно: в антисимметричном случае

$$k_1^{(c)} = 0, \quad k_2^{(c)} = \frac{(-1)^{\frac{c-a}{b-a}} E\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}(1-\chi^2)} \lim_{r\to c} \sqrt{(-1)^{\frac{c-a}{b-a}}(r-c)} \frac{\partial u(r)}{\partial r}, \tag{1}$$

где $c = a, b$; $\chi = \nu$ при плоской деформации и $\chi = 0$ при плоском напряженном состоянии; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; $u(r)$ — смещение верхнего берега трещины в направлении оси Or.

Вследствие антисимметричности термонапряженного состояния достаточно рассмотреть клин $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$, $0 \leqslant r < \infty$ с граничными условиями

$$\begin{gathered}\sigma_{\theta\theta}(r, \alpha) = \sigma_{r\theta}(r, \alpha) = \sigma_{\theta\theta}(r, 0) = 0; \\ \sigma_{r\theta}(r, 0) = -\sigma_{r\theta}^0 \, (a \leqslant r \leqslant b), \quad u(r, 0) = 0 \quad (a \geqslant r \geqslant b).\end{gathered} \tag{2}$$

С помощью интегрального преобразования Меллина с учетом условий (2) задача определения производной $u'(r)$ сводится к решению интегрального уравнения

$$\int_a^b \varphi(\rho) R(\ln \rho/r)\, d\rho = -\pi B r \sigma_{r\theta}^0, \tag{3}$$

где

$$\varphi(\rho) = u'(\rho) - Dt(\rho), \quad D = \alpha_t(1+\chi), \quad B = \frac{2(1-\chi^2)}{E}; \tag{4}$$

$$R(z) = \int_0^\infty L(\eta)\sin(\eta z)\, d\eta, \quad L(\eta) = 2\,\frac{\operatorname{sh}^2 \eta\alpha - \eta^2 \sin^2 \alpha}{\operatorname{sh} 2\eta\alpha - \eta \sin 2\alpha}, \tag{5}$$

α_t — коэффициент линейного теплового расширения.

Сделав в уравнении (2) замену переменных

$$r = a\exp\left(\frac{1+x}{\delta}\right), \quad \rho = a\exp\left(\frac{1+\xi}{\delta}\right), \quad \left[\delta = 2/\ln\frac{b}{a}\right], \tag{6}$$

получим

$$\int_{-1}^{1} \gamma(\xi) R\left(\frac{\xi - x}{\delta}\right) d\xi = -\pi\delta B \psi(x). \tag{7}$$

Здесь

$$\gamma(\xi) = a\exp\left(\frac{1+\xi}{\delta}\right)\varphi\left[a\exp\left(\frac{1+\xi}{\delta}\right)\right], \quad \psi(x) = a\exp\left(\frac{1+x}{\delta}\right)\sigma_{r\theta}^0. \tag{8}$$

В работе [2] приведено решение указанной задачи при $\delta > \frac{1}{\alpha}$. Найдем приближенное решение уравнения (7) при произвольных значениях δ. Аппроксимируем функцию $L(\eta)$ выражением

$$L(\eta) = \operatorname{th}[A(\alpha)\eta], \quad A(\alpha) = 2(\alpha^2 - \sin^2\alpha)(2\alpha - \sin 2\alpha)^{-1}.$$

Эта аппроксимация верно отражает поведение функции $L(\eta)$ вида (5) в нуле и на бесконечности. Максимальные относительные ошибки такой аппроксимации не превосходят 3,3% для всех α и η. С учетом указанной аппроксимации ядро $R(z)$ интегрального уравнения (7) имеет вид

$$R(z) = \frac{\pi}{2A(\alpha)} \operatorname{cosec} \frac{\pi z}{2A(\alpha)}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в уравнение (7), получаем

$$\int_{-d}^{d} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau - \zeta)} = -\pi f(\zeta). \tag{10}$$

Здесь

$$\tau = \text{th}\,\frac{\pi\xi}{2A(\alpha)\,\delta}; \quad \zeta = \text{th}\,\frac{\pi x}{2A(\alpha)\,\delta}; \quad d = \text{th}\,\frac{\pi}{2A(\alpha)\,\delta};$$

$$f(\zeta) = B\psi\left[\frac{2A(\alpha)\,\delta}{\pi}\,\text{arcth}\,\zeta\right](1-\zeta^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Применяя к уравнению (10) формулу обращения интеграла типа Коши [1], находим

$$\varphi(\zeta) = \sqrt{\frac{1-\zeta^2}{d^2-\zeta^2}}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-d}^{d}\frac{\sqrt{d^2-\tau^2}\,f(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta} + C\right], \tag{11}$$

или, переходя к начальным переменным, с учетом (4) получаем

$$u'(r) = Dt(r) + \frac{\text{ch}\,\lambda}{r\,X(r)}\,[I(r) + C], \tag{12}$$

где

$$X(r) = \sqrt{\text{ch}^2\lambda - \text{ch}^2\left(\lambda\delta\ln\frac{r}{\sqrt{ab}}\right)}; \quad \lambda = \frac{\pi}{2A(\alpha)\,\delta};$$

$$I(r) = \frac{B\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{\text{th}^2\lambda - \text{th}^2\lambda\xi}\;\psi(\xi)\,d\xi}{\text{ch}\,\lambda\xi\left[\text{th}\,\lambda\xi - \text{th}\left(\lambda\delta\ln\frac{r}{\sqrt{ab}}\right)\right]}.$$

Интегрируя равенство (12) и удовлетворяя условиям $u(a) = u(b) = 0$, находим

$$C = -\frac{\lambda\delta}{2K(\text{th}\,\lambda)}\left[D\int_a^b t(r)\,dr + \text{ch}\,\lambda\int_a^b\frac{I(r)\,dr}{rX(r)}\right],$$

где $K(\text{th}\,\lambda)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Зная функцию $u'(r)$, по формуле (1) легко определяем величину $k_2^{(c)}$:

$$k_2^{(c)} = \frac{(-1)^{\frac{c-a}{b-a}}\,E\sqrt{\pi\,\text{cht}\,\lambda}\,[I(c) + C]}{2(1-\chi^2)\sqrt{c\delta\lambda}}. \tag{13}$$

Можно показать, что точность формулы (13) не меньше точности аппроксимации функции $L(\eta)$. Поэтому указанная формула является практически точной.

Коэффициент	b/a						
	7	5	3	2	1,5	1,2	1,1
$k_2^{(a)}$ [2]	2,3900	1,9531	1,1920	0,6226	0,2879	0,8629	0,3266
$k_2^{(a)}$	2,5523	1,9936	1,1918	0,6214	0,2836	0,8627	0,3266
$k_2^{(b)}$ [2]	0,9033	0,8734	0,6882	0,4402	0,2319	0,7877	0,3114
$k_2^{(b)}$	0,9647	0,8916	0,6881	0,4394	0,2316	0,7875	0,3114

Если основное температурное поле не вызывает напряжений в сплошном клине, то $I(r) = 0$, и коэффициенты интенсивности напряжений, обусловленные возмущенным температурным полем, определяются по формуле

$$k_2^{(c)} = \frac{(-1)^{\frac{c-a}{b-a}}\,E\alpha_t\pi\sqrt{\text{cth}\,\lambda}}{4(1-\chi)\sqrt{2cA(\alpha)}\,K(\text{th}\,\lambda)}\int_a^b t(r)\,dr. \tag{14}$$

Рассмотрим конкретный пример. Пусть на гранях клина задана постоянная температура противоположных знаков $\pm T_0$. Тогда основное температурное поле $t_0(r, \theta) = \frac{T_0\theta}{\alpha}$ не вызывает в сплошном клине напряжений, и коэффициенты интенсивности напряжений будут обусловлены только возмущенным температурным полем. В таблице приведены значения коэффициентов интенсивности напряжений $k_2^{(c)}$, подсчитанные для $\alpha = \frac{\pi}{2}$ по формуле (14) (выражение для $t(r)$ взято из работы [2]) и по соответствующей формуле для больших δ [2]. Как видно из таблицы, погрешность значений $k_2^{(c)}$ при $\frac{b}{a} = 5$ ($\delta = 1{,}24$) не превышает 2,1% и очень быстро уменьшается с уменьшением $\frac{b}{a}$ (с ростом δ).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
2. *Кит Г. С., Лысый И. П.* Влияние стационарного температурного поля на коэффициенты интенсивности напряжений в клине с трещиной.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1977, вып. 17, с. 88—92.
3. *Сметанин Б. И.* Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое.— МТТ, 1968, № 2.
4. *Сметанин Б. И.* Об одной смешанной задаче теории упругости для клина.— ПММ, 1968, 32, № 4.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 6.XI 1975 г.

УДК 539. 3

Е. М. Федюк

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С ТРЕЩИНОЙ

В настоящей работе предложен способ сведения задачи о напряженном состоянии пологой сферической оболочки с трещиной вдоль меридиана к системе сингулярных интегральных уравнений. При этом оболочка находится на упругом основании Винклера.

Представляя компоненты тензора $\{e_{ij}\}$ геометрически малой деформации в виде

$$e_{ij} = e_{ij}^{(s)} + e_{ij}^{0} \qquad (i, j = X, Y), \tag{1}$$

где $e_{ij}^{(s)}$ — компоненты тензора упругой деформации [2]; e_{ij}^{0} — компоненты тензора дисторсии, характеризующие скачки перемещений и углов поворота на линии трещины, для пологой сферической оболочки [1] получаем систему дифференциальных уравнений относительно функции напряжений $\varphi(X, Y)$ и функции прогибов $w(X, Y)$:

$$\begin{gathered} \frac{R}{D_0}\nabla^2\nabla^2\varphi(X, Y) - \nabla^2 w(X, Y) = -RF_1^0(X, Y), \\ \nabla^2\varphi(X, Y) + D_1R\nabla^2\nabla^2 w(X, Y) + kRw(X, Y) = -D_1RF_2^0(X, Y). \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь

$$F_1^0 = \nabla^2\varepsilon_{22}^0 + \partial_2^2(\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0) - \partial_1\partial_2\varepsilon_{12}^0; \quad F_2^0 = \nabla^2(\varkappa_{11}^0 + \nu\varkappa_{22}^0) -$$

$$- (1 - \nu)[\partial_2^2(\varkappa_{11}^0 - \varkappa_{22}^0) - 2\partial_1\partial_2\varkappa_{12}^0]; \quad \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2;$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial X}; \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial Y}; \quad D_0 = 2Eh; \quad D_1 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)};$$