УДК 539.377

Г. С. Кит, М. В. Хай

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛА С ТРЕЩИНАМИ

Рассмотрим бесконечную упругую среду, ослабленную N дискообразными трещинами радиусов a_n, имеющими общую ось симметрии, на поверхностях S_n которых кроме внешних осесимметричных усилий заданы произвольные осесимметричные граничные условия на температуру. Выберем локальные декартовые системы координат $O_n xyz_n$ с началом в центрах n-х трещин и координатной плоскостью $O_n xy$, совпадающей с плоскостью расположения трещин. Обозначим через d_{nk} расстояние между центрами n-й и k-й трещин, а через e_{kn} — косинусы углов между осью $O_k z_k$ и векторами, соединяющими центры k-й и n-й трещин ($e_{kn} = \pm 1$, если n-я трещина находится соответственно выше или ниже k-й). При таком выборе координат между z_k и z_n существует зависимость $z_k = e_{kn} d_{kn} + z_n$.

Убывающее на бесконечности стационарное температурное поле в теле с трещинами описывается функцией $T(x, y, z_n)$, которую в n-й декартовой системе координат можно представить в виде [1]

$$T(x, y, z_n) = \sum_{k=1}^{N} \iint_{S_k} \left[\frac{\mu_k(\xi, \eta)}{R} + \gamma_k(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial z_n} \left(\frac{1}{R} \right) \right] d\xi d\eta, \tag{1}$$

где $R = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (e_{kn} d_{kn} + z_n)^2]^{1/2}$; $\mu_k(\xi, \eta)$ и $\gamma_k(\xi, \eta)$ — неизвестные плотности потенциалов простого и двойного слоев. Функция $T(x, y, z_n)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа и одному из граничных условий на поверхностях S_n^+ и S_n^- трещин:

$$T^{\pm}(x, y, 0) = t_n^{\pm}(r); \quad \frac{\partial T^{\pm}(x, y, 0)}{\partial z_n} = \mp q_n^{\pm}(r); \tag{2}$$

$$\frac{\partial T^{+}(x, y, 0)}{\partial z_n} = \frac{\partial T^{-}(x, y, 0)}{\partial z_n}, \quad \lambda \frac{\partial T^{\pm}(x, y, 0)}{\partial z_n} - h_t (T^+ - T^-) = f_n(r),$$

$$(x, y) \in S_n, \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad (n = \overline{1, N}).$$

Здесь $t_n^{\pm}$, $q_n^{\pm}$ и f_n — заданные значения температуры и тепловых потоков на поверхностях n-й трещины; h_t — теплопроницаемость трещин [3]; λ — коэффициент теплопроводности; индексами «+» и «—» обозначены значения соответствующих величин на верхней S_n^+ ($z_n \to +0$) и нижней S_n^- ($z_n \to -0$) поверхностях трещин. Величины q_n^+ и q_n^- будем считать отрицательными, если векторы соответствующих тепловых потоков имеют направление внешних нормалей к поверхностям S_n^+ и S_n^-.

В осесимметричном случае все неизвестные функции, входящие в выражение (1), не зависят от угловой координаты. Тогда между потенциалом простого слоя и интегралом Ханкеля существует зависимость

$$\iint_{S_k} \frac{\mu_k(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z_k^2}} = 2 \int_0^{\infty} Q_k(\xi) e^{-\xi |z_k|} I_0(\xi r)\, d\xi. \tag{3}$$

Учитывая соотношения (1), (3) и удовлетворяя граничным условиям (2), получаем интегральные уравнения осесимметричных задач теплопроводности для определения μ_k и γ_k:

$$\sum_{k=1}^{N}\int_0^{\infty}\left[Q_k(\xi)-\frac{1-\delta_{nk}}{4\pi}e_{kn}\xi\Gamma_k(\xi)\right]e^{-\xi d_{kn}}I_0(\xi r)\,d\xi=\frac{t_n^{+}+t_n^{-}}{4\pi},$$

$$\sum_{k=1}^{N}\int_0^{\infty}\xi^2\left[\Gamma_k(\xi)-\frac{1-\delta_{nk}}{4\pi\xi}e_{kn}Q_k(\xi)\right]e^{-\xi d_{kn}}I_0(\xi r)\,d\xi=\frac{q_n^{-}-q_n^{+}}{4\pi}, \qquad (4)$$

$$\frac{2h_t}{\lambda}\gamma_n(r)+\sum_{k=1}^{N}\int_0^{a_k}\rho\gamma_k(\rho)\,d\rho\int_0^{\infty}\xi^2e^{-\xi d_{kn}}I_0(\xi\rho)I_0(\xi r)\,d\xi=\frac{f_n(r)}{2\pi\lambda},$$

где $r < a_n$; δ_{kn} — символ Кронекера; неизвестные функции $Q_k(\xi)$ и $\Gamma_k(\xi)$ определяются через μ_k и γ_k соотношениями

$$Q_k(\xi)=\int_0^{a_k}\rho\mu_k(\rho)I_0(\xi\rho)\,d\rho,\quad \Gamma_k(\xi)=\int_0^{a_k}\rho\gamma_k(\rho)I_0(\xi\rho)\,d\rho. \qquad (5)$$

При решении первого из уравнений (4) необходимо положить $\gamma_k = t_k^{-}-t_k^{+}$, а при решении второго положить $\mu_k = q_k^{+}+q_k^{-}$.

Из интегральных уравнений (4) можно получить ряд частных случаев. Из них непосредственно следуют интегральные уравнения задач теплопроводности для случая двух дискообразных трещин, полученные иным способом в работе [4]. Если бесконечное тело ослаблено периодической системой дискообразных трещин одинаковых радиусов a, расстояние между которыми равно h, то уравнения (4) с учетом равенства $\sum\limits_{k=-\infty}^{k=+\infty}e^{-\xi|k|h}=\operatorname{cth}\frac{\xi h}{2}$ преобразуются к виду

$$\int_0^{\infty}Q(\xi)\operatorname{cth}\frac{\xi h}{2}I_0(\xi r)\,d\xi=\frac{t^{+}+t^{-}}{4\pi},$$

$$\int_0^{\infty}\xi^2\Gamma(\xi)\operatorname{cth}\frac{\xi h}{2}I_0(\xi r)\,d\xi=\frac{q^{-}-q^{+}}{4\pi}, \qquad (6)$$

$$\frac{2h_t}{\lambda}\gamma(r)+\int_0^{a}\rho\gamma(\rho)\,d\rho\int_0^{\infty}\xi^2\operatorname{cth}\frac{\xi h}{2}I_0(\xi\rho)I_0(\xi r)\,d\xi=\frac{f(r)}{2\pi\lambda}.$$

Отметим, что интегральные уравнения (4) и (6) в силу зависимостей (5) можно привести к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, если воспользоваться равенством

$$P_k(\xi)=\int_0^{a_k}\rho p_k(\rho)I_0(\xi\rho)\,d\rho=\int_0^{a_k}\vartheta(\rho)\cos\xi\rho\,d\rho, \qquad (7)$$

где

$$\vartheta(\rho)=\frac{2}{\pi}\int_\rho^{k}\frac{\xi p_k(\xi)}{\sqrt{\xi^2-\rho^2}}\,d\xi.$$

Если температурное поле в теле с трещинами, на поверхностях которых заданы внешние усилия, описывается функцией (1), то термоупругое состояние тела определяется через функции $\alpha_{ik}(\xi,\eta)$ ($i=\overline{1,3}$; $k=\overline{1,N}$), которые удовлетворяют системе двумерных сингулярных интегральных уравнений [2]

$$\sum_{k=1}^{N}\left[\Delta\Psi_{1k}-\nu\frac{\partial W_k}{\partial y}+z_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x\partial z_n}-\alpha_0\frac{\partial}{\partial x}(F_k^*+z_k\Omega_k)\right]_{z_n=0}=\frac{1-\nu}{G}N_{1n}(x,\ y),$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left[\Delta\Psi_{2k}+\nu\frac{\partial W_k}{\partial x}+z_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial y\partial z_n}-\alpha_0\frac{\partial}{\partial y}(F_k^*+z_k\Omega_k)\right]_{z_n=0}=\frac{1-\nu}{G}N_{2n}(x,\ y),\quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left[\Delta\Psi_{3k}+z_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial z_n^2}+\alpha_0\left(F_k-z_k\frac{\partial\Omega_k}{\partial z_n}\right)\right]_{z_n=0}=\frac{1-\nu}{G}N_{3n}(x,\ y),$$

где $\alpha_0=\alpha_t(1+\nu)$, ν — коэффициент Пуассона, α_t — коэффициент линейного теплового расширения;

$$\Psi_{ik}=\iint\limits_{S_k}\frac{\alpha_{ik}(\xi,\ \eta)}{R}d\xi d\eta,\qquad F_k=\iint\limits_{S_k}\frac{\mu_k(\xi,\ \eta)}{R}d\xi d\eta,$$

$$F_k^*=\iint\limits_{S_k}\frac{\gamma_k(\xi,\ \eta)}{R}d\xi d\eta,\quad W_k=\iint\limits_{S_k}\frac{\left(\dfrac{\partial\alpha_{1k}}{\partial\eta}-\dfrac{\partial\alpha_{2k}}{\partial\xi}\right)}{R}d\xi d\eta,\quad (9)$$

$$\Phi_k=\frac{\partial\Psi_{1k}}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_{2k}}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_{3k}}{\partial z_n},\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$\Omega_k=F_k+\frac{\partial F_k^*}{\partial z_n},\quad R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(e_{kn}d_{kn}+z_n)^2}.$$

В осесимметричном случае внешние усилия N_{1n} и N_{2n} должны быть такими, чтобы $N_{1n}(x,\ y)\cos\theta+N_{2n}(x,\ y)\sin\theta=T_n(r)$, $N_{3n}(x,\ y)=N_{3n}(r)$, $N_{1n}(x,\ y)\sin\theta-N_{2n}(x,\ y)\cos\theta=0$, где r, θ — полярные координаты. Из третьего уравнения (8) следует, что в осесимметричном случае α_{3k} и $\alpha_k=\dfrac{\partial\alpha_{1k}}{\partial\xi}+\dfrac{\partial\alpha_{2k}}{\partial\eta}$ не зависят от угловой координаты θ. Если учесть, что $\tau_{r\theta}\equiv 0$, то из первого и второго уравнений (8) получим, что $\dfrac{\partial\alpha_{1k}}{\partial\eta}-\dfrac{\partial\alpha_{2k}}{\partial\xi}\equiv 0$. Поэтому интегральные уравнения (8) в осесимметричном случае с учетом соотношений (3) можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{N}\int_0^\infty[(1+\xi d_{kn})(\xi^2N_k-\alpha_0Q_k)-e_{kn}d_{kn}\xi^2\times$$
$$\times(\xi M_k-\alpha_0\Gamma_k)]\,e^{-\xi d_{kn}}I_0(\xi r)\,d\xi=-\frac{1-\nu}{2\pi G}N_{3n}(r),\quad (10)$$
$$\sum_{k=1}^{N}\int_0^\infty\xi[(1-\xi d_{kn})(\xi M_k-\alpha_0\Gamma_k)+e_{kn}d_{kn}(\xi^2N_k-\alpha_0Q_k)]\times$$
$$\times e^{-\xi d_{kn}}I_1(\xi r)\,d\xi=-\frac{1-\nu}{2\pi G}T_n(r),\ |r|<a_n\quad (n=\overline{1,\ N}),$$

где функции $N_k(\xi)$ и $M_k(\xi)$ определяются через α_{3k} и α_k соотношениями

$$N_k(\xi)=\int_0^{a_k}\rho\alpha_{3k}(\rho)\,I_0(\xi\rho)\,d\rho,\quad M_k(\xi)=\frac{1}{\xi}\int_0^{a_k}\rho\alpha_k(\rho)\,I_0(\xi\rho)\,d\rho.\quad (11)$$

В случае периодических задач термоупругости, когда все трещины находятся в одинаковых условиях, легко получить интегральные уравнения

$$\int_0^\infty [\xi^2 N(\xi) - \alpha_0 Q(\xi)] \left(\operatorname{cth} \frac{\xi h}{2} + \frac{\xi h}{2 \operatorname{sh}^2 \frac{\xi h}{2}} \right) I_0(\xi r)\, d\xi = -\frac{1-\nu}{2\pi G} N(r),$$
$$\int_0^\infty \xi [\xi M(\xi) - \alpha_0 \Gamma(\xi)] \left(\operatorname{cth} \frac{\xi h}{2} - \frac{\xi h}{2 \operatorname{sh}^2 \frac{\xi h}{2}} \right) I_1(\xi r)\, d\xi = -\frac{1-\nu}{2\pi G} T(r), \ r < a, \quad (12)$$

где $N(r)$ и $T(r)$ — заданные на поверхностях трещин нормальные и касательные усилия.

Рассмотрим пример. Пусть бесконечное тело ослаблено периодической системой дискообразных термоизолированных трещин и находится под действием однородного теплового потока q, перпендикулярного трещинам. Наличие трещин вызовет возмущение заданного температурного поля, которое согласно выражению (1) описывается функцией

$$T(r, z) = -2\pi \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_0^\infty \xi \operatorname{sign} z_k \Gamma(\xi) e^{-\xi |z_k|} I_0(\xi r)\, d\xi,$$

где $z_k = kh + z$, h — расстояние между трещинами; неизвестная функция $\Gamma(\xi)$ определяется из интегрального уравнения

$$\int_0^\infty \xi^2 \Gamma(\xi) \operatorname{cth} \frac{\xi h}{2} I_0(\xi r)\, d\xi = \frac{q}{2\pi}, \ r < a. \quad (13)$$

Напряжения в теле с трещинами, обусловленные температурой возмущения $T(r, z)$, определяются согласно формулам (11), (12) через функцию M ($N = 0$, так как $Q(\xi) = 0$), которая удовлетворяет уравнению

$$\int_0^\infty \xi [\xi M(\xi) - \alpha_0 \Gamma(\xi)] \left(\operatorname{cth} \frac{\xi h}{2} - \frac{\xi h}{2 \operatorname{sh}^2 \frac{\xi h}{2}} \right) I_1(\xi r)\, d\xi = 0, \quad r < a. \quad (14)$$

Если в интегральных уравнениях (13) и (14) ввести в рассмотрение вместо $\Gamma(\xi)$ и $M(\xi)$ функции $\beta(\eta)$ и $m(\eta)$ по формулам

$$\Gamma(\xi) = -\frac{1}{\xi} \int_0^a \beta(\eta) \sin \xi\eta\, d\eta, \quad M(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \int_0^a m(\eta) I_{3/2}(\xi, \eta)\, d\eta, \quad (15)$$

то легко получить интегральные уравнения Фредгольма второго рода для определения $\beta(\eta)$ и $m(\eta)$ аналогично работе [4].

В механике хрупкого разрушения важную роль играют коэффициенты интенсивности напряжений. Для рассматриваемой задачи $k_1 = 0$, а k_2 определяется через функцию $m(\eta)$ по формуле

$$k_2 = -Em(a)/\sqrt{2a}\,(1-\nu), \quad (16)$$

где E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона. После подстановки в формулу (16) значения $m(a)$, найденного из приближенного решения уравнений (14) и (15), получаем

$$k_2 = k_\infty [1 - 0{,}3860\varepsilon^3 + 0{,}4685\varepsilon^5 + 0{,}0467\varepsilon^6 + O(\varepsilon^7)], \quad (17)$$

где $k_\infty = \alpha_t E q a^{3/2} / [3\pi(1-\nu)]$, $\varepsilon = 2a/h$. Из анализа формулы (17) следует, что при $h > 6a$ трещины практически не влияют друг на друга.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач теплопроводности для тел с трещинами.— ДАН УССР. Сер. А, 1975, № 8, с. 704—707.
2. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами.— ДАН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1108—1112.

3. *Кіт Г. С.* Деякі питання термоміцності тіл с тріщинами.— Вісн. АН УРСР, 1972, № 4, с. 22—28.
4. *Кит Г. С., Хай М. В.* Осесимметричная задача термоупругости для бесконечного тела, ослабленного двумя параллельными круглыми щелями.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1972, вып. 12, с. 101—108.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 16.XII 1975 г.

УДК 536.21

Я. С. Подстригач, Ю. А. Чернуха

УСЛОВИЯ ТЕПЛООБМЕНА НА ПОДКРЕПЛЕННОМ КРАЕ МНОГОСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ

В ряде приложений, например при определении напряжённо-деформированного состояния многослойных оболочек, достаточно знать усредненные по толщине $2\delta_i$ i-го слоя характеристики температурного поля t_i этого слоя — среднее значение температуры T_i и температурный аналог изгибающего момента θ_i:

$$T_i = \frac{1}{2\delta_i} \int_{-\delta_i}^{\delta_i} t_i d\gamma_i, \quad \theta_i = \frac{3}{2\delta_i^2} \int_{-\delta_i}^{\delta_i} t_i \gamma_i d\gamma_i. \tag{1}$$

В работах [1, 2, 4] получены дифференциальные уравнения для T_i и θ_i; при этом соответствующие краевые условия сформулированы для случая, когда на торцевых поверхностях каждого из слоев теплообмен с окружающей средой осуществляется согласно закону Ньютона. В настоящей работе выводятся условия теплообмена m-слойной оболочки с подкрепляющим ее край криволинейным ортотропным стержнем произвольного поперечного сечения.

Рассмотрим m-слойную оболочку, край которой подкреплен ортотропным стержнем произвольного поперечного сечения. Ось стержня предполагается гладкой плоской кривой, а поверхность контакта — линейчатой развертывающейся поверхностью. Между стержнем и i-м слоем оболочки (по поверхности S_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$) осуществляется идеальный тепловой контакт, а на части боковой поверхности стержня S_{m+1}, не контактирующей с оболочкой, и на торцевых его поверхностях S_{m+2} и S_{m+3} происходит теплообмен с омывающей средой по закону Ньютона. Координатные оси Ox и Oy совместим с главными центральными осями поперечного сечения и будем считать их совпадающими с направлениями ортотропии.

В качестве исходного примем следующее уравнение нестационарной трехмерной задачи теплопроводности:

$$\lambda_x \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + k\left(\lambda_x \frac{\partial t}{\partial x} \cos\varphi + \lambda_y \frac{\partial t}{\partial y} \sin\varphi\right) +$$
$$+ \lambda_s \frac{\partial^2 t}{\partial s^2} - c\frac{\partial t}{\partial \tau} + q = 0. \tag{2}$$

Условия теплового контакта и краевые условия имеют вид

$$-\left[\lambda_x n_x \frac{\partial t}{\partial x} + \lambda_y n_y \frac{\partial t}{\partial y}\right]_{S_i} = \frac{\lambda_\alpha^{(i)} n_\alpha}{A} \frac{\partial t_i}{\partial \alpha} + \frac{\lambda_\beta^{(i)} n_\beta}{B} \frac{\partial t_i}{\partial \beta}, \tag{3}$$

$$[t]_{S_i} = t_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, m),$$

$$\left[\lambda_x n_x \frac{\partial t}{\partial x} + \lambda_y n_y \frac{\partial t}{\partial y} + \varepsilon_{m+1}(t - t_{m+1}^{(c)})\right]_{S_{m+1}} = 0, \tag{4}$$

$$\left[\lambda_s \frac{\partial t}{\partial s} + \varepsilon_r (t - t_r^{(c)})\right]_{S_r} = 0 \quad (r = m+2, m+3), \tag{5}$$

$$[t]_{\tau=0} = t_0(x, y, s). \tag{6}$$