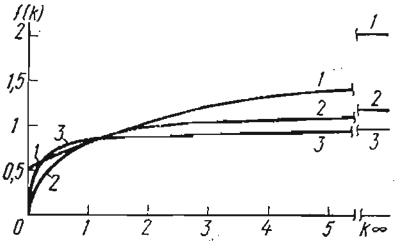
где $f(\nu, k) = \frac{3 - 2\nu - \nu^2}{3(1-\nu^2)h^2} \frac{\alpha}{\beta}$; $\alpha = (1-k)(h-\delta_1)^3 + kh^3$; $\beta = (k-1)\delta_1 + h$; $k = \frac{E_1}{E}$; $\delta_1$ — толщина внешнего (внутреннего) слоя; $E$ и $E_1$ — соответственно модули упругости среднего и внешнего (внутреннего) слоев пластинки.

Числовые расчеты произведены для различных значений параметра $k$ при $\nu = 0{,}3$; $\delta_1 = 0{,}2$; $0{,}7$; $0{,}9h$. При этом




$$f(0{,}3;\ k) = 0{,}846 \frac{\alpha_0}{\beta_0}, \qquad (20)$$

где

$\alpha_0 = 0{,}488k + 0{,}512$, $\beta_0 = 0{,}2k + 0{,}8$ при $\delta_1 = 0{,}2h$;

$\alpha_0 = 0{,}973k + 0{,}027$, $\beta_0 = 0{,}7k + 0{,}3$ при $\delta_1 = 0{,}7h$;

$\alpha_0 = 0{,}999k + 0{,}001$, $\beta_0 = 0{,}9k + 0{,}1$ при $\delta_1 = 0{,}9h$.

На рисунке кривыми *1*, *2*, *3* изображены графики изменения функции $f(k)$ для значений толщины $\delta_1 = 0{,}2$; $0{,}7$; $0{,}9h$ соответственно. Как видно из графиков, с увеличением модуля упругости $E_1$ контакт берегов трещины при $k > 1$ наступает раньше в пластинке с более толстыми наружными слоями для всех значений параметра $k$, а при $k < 1$ — в пластинке с толстыми и тонкими наружными слоями в зависимости от конкретного значения $k$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости. М., «Наука», 1973. 303 с.
2. *Осадчук В. А., Подстригач Я. С.* К определению напряженного состояния в замкнутой цилиндрической оболочке и бесконечной пластине с трещинами.— МТТ, 1973, № 3, с. 69—78.
3. *Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М.* Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 29—41.
4. *Труш Е. И.* Многослойные сферические оболочки под действием нагрузки, равномерно распределенной по площадке.— Прикл. механика, 1970, 6, № 7, с. 64—72.



Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР



Поступила в редколлегию 16.IX 1975 г.



УДК 539.377



*Р. Н. Швец, В. М. Флячок*


# РЕАКЦИЯ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

Исследуем динамическое поведение замкнутой круговой цилиндрической оболочки при действии мгновенно приложенных и вращающихся температурных нагрузок. Термоупругое движение оболочки будем описывать взаимосвязанными линейными уравнениями теории термоупругости тонких ортотропных оболочек, учитывающих инерцию вращения и поперечные сдвиги.

**Исходные уравнения и соотношения.** Уравнения нестационарной теплопроводности тонкой цилиндрической оболочки постоянной толщины $2h$ и радиуса $R$, учитывающие термоупругое рассеяние энергии, при кубическом распределении температуры по толщине оболочки имеют вид

$$\Delta T + \frac{5}{6\delta} T^* - b \frac{\partial T}{\partial \tau} - b\gamma \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \gamma^*\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + w\right)\right] + \frac{R^2}{\lambda_3} Q = -f_1,$$
$$\Delta T^* - \frac{5}{6\delta^2} T^* - b \frac{\partial T^*}{\partial \tau} - b\gamma\delta \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} + \gamma^* \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2}\right) + \frac{R^2}{\lambda_3} Q^* = -f_2. \quad (1)$$

Функции $f_1$ и $f_2$ зависят от способа подвода тепла к поверхностям $z = \pm h$ и в случае притока тепла имеют вид

$$f_1 = \frac{\eta R}{2}\left[\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}\delta}\right)\frac{\partial t}{\partial z}(h) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}\delta}\right)\frac{\partial t}{\partial z}(-h)\right],$$
$$f_2 = \frac{\eta R}{2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{6\delta}\right)\frac{\partial t}{\partial z}(h) - \left(\frac{5}{6\delta} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{\partial t}{\partial z}(-h)\right]. \quad (2)$$

При условии, что теплоотдача с поверхностей $z = \pm h$ происходит в соответствии с законом Ньютона, получаем

$$f_1\delta^2\mu = (\sqrt{3}\delta\mu_2 + \mu_3)(T - t_1) + (\delta\mu_4 + 6\sqrt{3}\mu_2)\left(\frac{5}{6}T^* - t_2\right),$$
$$f_2\delta^2\mu = (15\mu_2 + \sqrt{3}\delta\mu_3)(T - t_1) + (5\sqrt{3}\mu_4 + 18\delta\mu_2)\left(\frac{5}{6}T^* - t_2\right). \quad (3)$$

Здесь

$$T = \frac{\eta}{2h}\int_{-h}^{h} t\,dz; \quad T^* = \frac{\sqrt{3}\eta}{2h^2}\int_{-h}^{h} tz\,dz; \quad b = \frac{Rc_0}{a}; \quad \delta = \frac{h}{\sqrt{3}R};$$

$$Q = \frac{\eta}{2h}\int_{-h}^{h} q\,dz; \quad Q^* = \frac{\sqrt{3}\eta}{2h^2}\int_{-h}^{h} qz\,dz; \quad c_0^2 = \frac{E_1}{\rho(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \quad \tau = \frac{c_0\tau_1}{R};$$

$$t_1 = \frac{\eta}{2}(t_c^+ + t_c^-); \quad t_2 = \frac{\eta}{2\sqrt{3}}(t_c^+ - t_c^-); \quad \Delta = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2};$$

$$\eta = \frac{1}{2}[\alpha_{t1}(1 + \nu_{12}) + \alpha_{t2}(1 + \nu_{21})]; \quad \gamma = \gamma_{11}\eta; \quad \gamma^* = \frac{\gamma_{22}}{\gamma_{11}};$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2}h(h_t^+ + h_t^-); \quad \mu_2 = \frac{1}{2}h(h_t^+ - h_t^-); \quad \mu_3 = \mu_1^2 + 6\mu_1 - \mu_2^2;$$
$$\mu_4 = \mu_1^2 + 3\mu_1 - \mu_2^2; \quad \mu = (\mu_1 + 6)(\mu_1 + 3) - \mu_2^2;$$

$u_1$, $u_2$, $w$ — безразмерные компоненты перемещений срединной поверхности оболочки, отнесенные к радиусу $R$; $\alpha_1$, $\alpha_2$ — безразмерные ортогональные координаты; $\gamma_1, \gamma_2$ — углы поворота нормали; $z$ — координата, отсчитываемая по нормали; $\tau_1$ — время; $t$ — приращение температуры; $\nu_{ij}$, $\alpha_{ti}$ — коэффициенты Пуассона и линейного расширения; $E_i$ — модуль Юнга; $\lambda_i$, $a$ — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности; $h_t^\pm$ — относительные коэффициенты теплоотдачи на поверхностях $z = \pm h$; $t_c^\pm$ — значение температуры среды, омывающей эти поверхности; $\rho$ — плотность материала; $q$ — удельная мощность источников тепла; $\gamma_{ii}$ — коэффициенты термоупругого взаимодействия [3].

Поскольку в уравнениях теплопроводности учитывается диссипация механической энергии, систему (1) следует решать совместно с уравнениями движения оболочки [4]

$$L_{i1}u_1 + L_{i2}u_2 + L_{i3}w + L_{i4}\gamma_1 + L_{i5}\gamma_2 + L_{i6}T + L_{i7}T^* = 0, \quad (4)$$

где $i = 1, 2, \ldots, 5$; $L_{ij}$ — линейные дифференциальные операторы, приведенные в работе [4].

**Действие теплового потока на оболочку конечной длины.** Рассмотрим замкнутую круговую цилиндрическую оболочку длины $l$, края $\alpha_1 = 0$ и

$\alpha_1 = \frac{l}{R} = l_1$ которой шарнирно закреплены и поддерживаются при нулевой температуре. К внешней поверхности оболочки внезапно приложен тепловой поток плотности $g(\alpha_1, \alpha_2)$, причем внутренняя поверхность теплоизолирована. Источники тепла отсутствуют. В начальный момент оболочка находится в покое.

Для решения системы (1), (2), (4) с учетом принятых граничных условий и условия периодичности по координате $\alpha_2$ используем конечное синус-преобразование Фурье по переменной $\alpha_1$ для функций $u_2$, $\gamma_2$, $w$, $T$, $T^*$ и по переменной $\alpha_2$ для $u_2$, $\gamma_2$, а также косинус-преобразование Фурье по переменной $\alpha_1$ для функций $u_1$, $\gamma_1$ и по $\alpha_2$ для $u_1$, $\gamma_1$, $w$, $T$, $T^*$. По времени $\tau$ применим интегральное преобразование Лапласа при однородных начальных условиях. В результате получим систему алгебраических уравнений для определения изображений искомых функций. В частности, для прогиба в изображениях находим

$$w_{nm}(p) = \frac{\eta h G_{nm}}{\lambda_3} \frac{D_1(p)}{pD(p)}. \tag{5}$$

Здесь

$$G_{nm} = \frac{2}{\pi l_1}\left(1 - \frac{\delta_{0m}}{2}\right)\int_0^{2\pi}\int_0^{l_1} g(\alpha_1, \alpha_2)\sin\lambda_n\alpha_1\cos m\alpha_2;$$

$\lambda_n = \frac{\pi n}{l_1}$; $\delta_{0m}$ — символ Кронекера; $p$ — параметр преобразования Лапласа; $D(p)$, $D_1(p)$ — соответствующие определители полученной системы алгебраических уравнений.

Характеристическое уравнение этой системы $D(p) = 0$ дает пять пар комплексно-сопряженных корней $p_j = -s_j \pm i\Omega_j$ ($s_j > 0$; $i = \sqrt{-1}$; $j = 1, 2, \ldots, 5$) и два отрицательных действительных корня $p_j = -\sigma_j$ ($j = 1, 2$). Эти корни определяют пять типов затухающих механических колебаний и две формы релаксации температуры.

Применяя к выражению (5) теорему операционного исчисления о разложении функций, окончательное выражение для прогиба записываем в виде

$$w = \frac{\eta h}{\lambda_3}\sum_{n=1}\sum_{m=0} G_{nm}\sin\lambda_n\alpha_1\cos m\alpha_2\left\{\frac{D_1(0)}{D(0)} + \sum_{j=1}^{2}\frac{D_1(-\sigma_j)e^{-\sigma_j\tau}}{(-\sigma_j)D'(-\sigma_j)} + \right.$$
$$\left. + 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{5}\frac{D_1(-s_j + i\Omega_j)}{(-s_j + i\Omega_j)D'(-s_j + i\Omega_j)}e^{-s_j\tau}(\cos\Omega_j\tau + i\sin\Omega_j\tau)\right\}. \tag{6}$$

Отметим, что члены, содержащие экспоненциальные функции, соответствуют неустановившимся колебаниям, которые стремятся к нулю при больших значениях времени.

На основании полученных аналитических решений произведены вычисления и построены соответствующие графики. На рис. 1 показано изменение безразмерного динамического прогиба $w^* = \frac{\lambda_3 w}{20\eta g h}$ во времени $\tau^* = \frac{a\tau_1}{R^2}$ при различных значениях параметра $B = \left(\frac{\sqrt{3}\delta c_0 h}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ для случая теплового потока плотности $g$, равномерно распределенного по поверхности оболочки $z = h$. Вычисления производились при следующих значениях параметров: $k' = \frac{5}{6}$, $\gamma = 0$, $l_1 = 2$, $h = 16R$ для ортотропного материала (сплошные линии) с постоянными $E_1 = 2E_2$, $\nu_{12} = 0{,}3$, $\nu_{21} = 0{,}15$, $\alpha_{t1} = 2\alpha_{t2}$, $E_1 = 40G_{13}$ и трансверсально-изотропного материала (штриховые линии) с постоянными $E_1 = 40G_{13}$, $\nu = 0{,}3$. Кривые при $B = \infty$ соответствуют решению задачи в квазистатической постановке. Динамические эф-

...екты возрастают с уменьшением параметра $B$ (например, за счет уменьшения толщины), и для тонких оболочек, для которых характерное время нагрева соизмеримо с низшим периодом колебаний, коэффициент динамичности может равняться двум.

Из числового анализа следует, что анизотропия материала существенно влияет на величины прогибов и напряжений в цилиндрической оболочке, и особенно это влияние сказывается вследствие различия коэффициентов линейного теплового расширения.

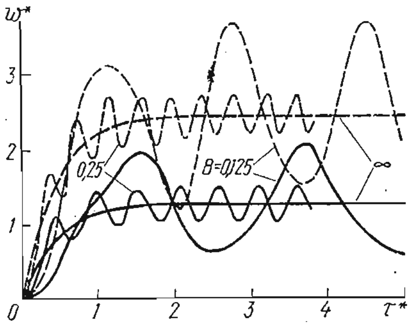



Рис. 1

В рассматриваемом интервале времени перемещения, вычисленные по

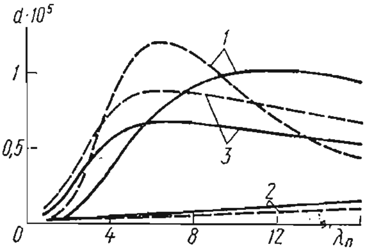



Рис. 2

связанной теории ($\gamma = 0{,}1$), незначительно (около 1%) отличаются от вычисленных по полусвязанной ($\gamma = 0$) теории, но, как уже отмечалось, при больших значениях времени динамическая часть решения задачи по связанной теории затухает вследствие учета диссипации механической энергии.

Величину рассеянной энергии за единицу времени [1, 2] при деформации цилиндрической оболочки в нашем случае можно подсчитать по формуле

$$\left|\frac{dW}{d\tau}\right| = \frac{2h}{T_0\eta^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{l_1}\left\{\lambda_1\left[\left(\frac{\partial T}{\partial\alpha_1}\right)^2+\left(\frac{\partial T^*}{\partial\alpha_1}\right)^2\right]+\lambda_2\left[\left(\frac{\partial T}{\partial\alpha_2}\right)^2+\left(\frac{\partial T^*}{\partial\alpha_2}\right)^2\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{5\lambda_3}{6\delta^2}\left[(T^*)^2-\delta TT^*\right]\right\}d\alpha_1 d\alpha_2.$$

На рис. 2 приведены кривые изменения декремента затухания $d$ в зависимости от параметра $\lambda_n$ для первых трех типов осесимметричных колебаний при $h = 20R$, $b = 32\cdot 10^5$, $\gamma = 0{,}1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Сплошные линии соответствуют ортотропной оболочке с параметрами $E_2 = 2E_1$, $\nu_{12} = 0{,}15$, $\nu_{21} = 0{,}3$, $E_1 = 40G_{13}$, $\alpha_{t2} = 2\alpha_{t1}$, штриховые — трансверсально-изотропной при $\nu = 0{,}3$, $E = 40G'$.

Поведение логарифмического декремента для первого (кривая *1*) и третьего (кривая *3*) типов одинаково: при определенных значениях $\lambda_n$ он достигает максимума, величина которого также существенно зависит от материала рассматриваемых оболочек. Значит, можно подобрать такие геометрические и физические параметры, при которых колебания оболочки будут сопровождаться наибольшим рассеянием механической энергии. Колебания второго (кривая *2*) типа незначительно чувствительны к анизотропным свойствам материала и затухают медленно.

**Действие вращающихся тепловых источников на длинную оболочку.** Рассмотрим бесконечно длинную круговую цилиндрическую оболочку, изготовленную из ортотропного упругого материала, находящуюся под действием вращающихся с постоянной угловой скоростью $\omega_1$ тепловых источников, равномерно распределенных вдоль двух диаметрально противоположных образующих. Между поверхностями $z = \pm h$ оболочки и внешней средой с нулевой температурой происходит теплообмен по закону Ньютона. Коэффициенты теплоотдачи с обеих поверхностей принимаем равными между собой. В начальный момент оболочка находится в покое. В этом случае получаем

$$q(\alpha_2,\ z,\ \tau)=q^*\delta(z-h)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\alpha_2-\omega\tau-m\pi),\qquad (7)$$

где $\omega=\frac{R\omega_1}{c_0}$; $\delta(\cdot\cdot\cdot)$ — дельта-функция Дирака.

Заменяя бесконечную сумму в выражении (7) эквивалентным тригонометрическим рядом и применяя затем к уравнениям (1), (3), (4) интегральные преобразования Фурье и Лапласа, находим искомые величины. В частности, функцию прогиба записываем в виде

$$w=\frac{q^*\eta h}{\lambda_3}\sum_{m=0,2,\ldots}\cos m\alpha_2\left\{\sum_{j=1}^{2}\frac{D_1(-\sigma_j)}{D'(-\sigma_j)}e^{-\sigma_j\tau}+2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\frac{D_1(-s_j+i\Omega_j)}{D'(-s_j+i\Omega_j)}e^{-s_j\tau}\times\right.$$

$$\left.\times(\cos\Omega_j\tau+i\sin\Omega_j\tau)+2\mathrm{Re}\frac{D_1(im\omega)}{D'(im\omega)}(\cos m\omega\tau+i\sin m\omega\tau)\right\}.\qquad (8)$$

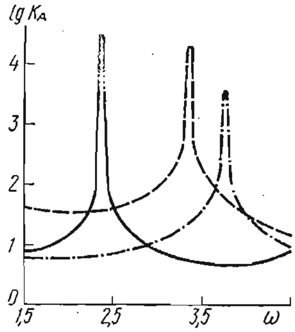



Рис. 3

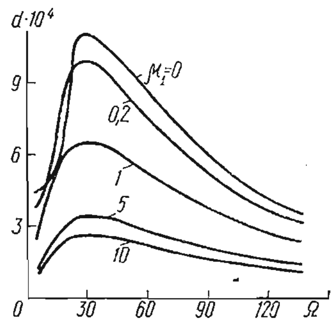



Рис. 4

Полагая $\omega=0$, получаем решение для случая мгновенно приложенных тепловых источников, равномерно распределенных вдоль двух диаметрально противоположных образующих.

В случае вращающихся тепловых источников при угловой скорости, равной половине частоты первого (изгибного) типа собственных колебаний, амплитуда их резко возрастает. Учет в этом случае в уравнениях движения оболочки термоупругого рассеяния, что имеет существенное значение при колебаниях, позволяет найти конечное значение амплитуды, величина которой зависит от физических и геометрических параметров.

На рис. 3 приведены кривые изменения логарифма максимального коэффициента динамичности $\lg K_д\left(K_д=\frac{w^{\max}}{w_{st}}\right)$ в зависимости от безразмерной угловой скорости $\omega$ для ортотропной (сплошные линии), трансверсально изотропной (штриховые) и изотропной (штрихпунктирные) оболочек.

Поведение декремента затухания $d$ первого типа изгибных колебаний длинной ортотропной цилиндрической оболочки в зависимости от безразмерной частоты собственных колебаний $\Omega$ и различных значений $\mu_1$ критерия Био показано на рис. 4. Отметим, что возрастание частоты осуществлялось увеличением толщины оболочки.

Из приведенных рисунков и анализа полученных результатов следует, что в случае вращающихся тепловых источников коэффициент динамичности может оказаться намного больше двух, а динамические эффекты существенны для различных материалов при всех толщинах, для которых применима теория оболочек. Рассеяние механической энергии для тонких оболочек невелико, но с увеличением толщины оно возрастает до максимума, а затем снова падает. Такая зависимость диссипации энергии от толщины оболочки приводит к большим значениям резонансных амплитуд для очень тонких и относительно толстых оболочек, а при промежуточных толщинах они имеют минимум. Для рассматриваемых значений физических параметров резонансные прогибы изотропной оболочки [5] меньше, чем для трансверсально-изотропной и ортотропной соответственно.

Поскольку рассеяние энергии для тонких оболочек обусловлено необратимыми тепловыми потоками в основном через их поверхности, то, как видно из рис. 4, увеличение теплоотдачи приводит к уменьшению затухания колебательного процесса [2]. Следовательно, подбором материала оболочки и ее толщины можно регулировать величину резонансных амплитуд.

ЛИТЕРАТУРА


1. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* К теории термоупругого внутреннего трения в твердых телах.— В кн.: Внутреннее трение в металлах и сплавах. М., 1966, с. 216—221.
2. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Квазистатическая задача взаимосвязанной термоупругости.— Прикл. механика, 1969, 5, № 1, с. 44—51.
3. *Швец Р. Н., Лунь Е. И.* Некоторые вопросы теории термоупругости ортотропных оболочек с учетом инерции вращения и поперечного сдвига.— Прикл. механика, 1971, 7, № 10, с. 121—125.
4. *Швец Р. Н., Флячок В. М.* Термоупругие колебания ортотропных цилиндрических оболочек.— Прикл. механика, 1973, 11, № 11, с. 15—22.
5. *McQuillen E. J., Brull M. A.* Dynamic thermoelastic Response of Cylindrical shells.— Trans. ASME. Ser. E, 1970, 37, N 3, p. 661—670.



Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР



Поступила в редколлегию 10.IX 1975 г.



УДК 539.373 : 621.643.411



Б. Л. Пелех, В. К. Ганулич


## ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ОБЩЕЙ ТЕОРИИ СЛОИСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК С ЗАДАННЫМ ТЕНЗОРОМ НЕСОВМЕСТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Пусть в анизотропном теле, которое занимает объем $V$, ограниченный поверхностью $S = S_1 + S_2$, заданы помимо объемных сил $\overline{X}$ компоненты $e_{ij}$ тензора несовместных деформаций [2, 3, 6] как функции координат $x_j$. Рассмотрим функционал

$$J = \int\limits_V \left\{Э - \sigma_{ij}\left[(e_{ij} - e^0_{ij}) - \frac{1}{2}(\nabla_j U_i + \nabla_i U_j)\right] - X_i U_i\right\} dV - \\ - \int\limits_{S_1} \overline{P}_i U_i dS - \int\limits_{S_2} (U_j - \overline{U}_j)\,\sigma_{ij} n_i dS, \quad (1)$$

где

$$Э = \frac{1}{2} C_{ijkl}(e_{ij} - e^0_{ij})(e_{kl} - e^0_{kl}) \quad (2)$$

— упругий потенциал анизотропного тела; $e_{ij}$ — компоненты тензора совместных деформаций; $C_{ijkl}$ — тензор упругих характеристик; $\sigma_{ij}$ — компоненты тензора напряжений; $\nabla_j = \partial/\partial x_j$; $U_i$ — компоненты вектора смещения; $\overline{U}_i$ — граничные их значения на части поверхности $S_2$; $P_i$ — известные на $S_1$ компоненты поверхностных усилий; $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности $S$.

Относительно функционала (1) справедлива такая теорема [1].

**Теорема.** *Вариационное уравнение $\delta J = 0$ содержит в качестве уравнений Эйлера полную систему уравнений теории упругости для тел с несовместными деформациями, а в качестве естественных (эйлеровых) граничных условий — смешанные краевые условия на $S_1$ и $S_2$.*