ЛИТЕРАТУРА

1. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. М., «Мир», 1964. 517 с.
2. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963. 1100 с.
3. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. М., Изд-во АН СССР, 1962. 361 с.
4. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. К., «Наук. думка», 1972. 307 с.

Львовский лесотехнический институт

Поступила в редколлегию 25.XII 1974 г.

УДК 539.3

Б. В. Нерубайло, Л. П. Никитина, И. И. Федик

ТЕРМОУПРУГОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ

Рассмотрим бесконечно длинную круговую цилиндрическую оболочку при известном неравномерном локализованном распределении температуры. Температурная задача в такой постановке может быть сведена к решению системы трех уравнений в частных производных относительно перемещений

$$\begin{gathered}
l_{11}u + l_{12}v + l_{13}w = (1+\nu)\,\alpha_t R\,\frac{\partial t^*}{\partial\alpha},\\
l_{21}u + l_{22}v + l_{23}w = (1+\nu)\,\alpha_t R\,\frac{\partial t^*}{\partial\beta} - \frac{1+\nu}{6}\,\alpha_t h\,\frac{\partial t^{**}}{\partial\beta}, \qquad (1)\\
l_{31}u + l_{32}v + l_{33}w = -(1+\nu)\,\alpha_t R t^* - \frac{1+\nu}{6}\,\alpha_t h \nabla^2 t^{**},
\end{gathered}$$

где l_{11}, ..., l_{33} — линейные дифференциальные операторы, зависящие от выбора исходных уравнений теории оболочек; α_t — коэффициент линейного температурного расширения; $t_2(\alpha, \beta)$, $t_1(\alpha, \beta)$ — температура внутренней и наружной поверхностей оболочки. Остальные обозначения взяты из работы [1]. Разделяем напряженно-деформированное состояние от действия температурного поля $t^*(\alpha, \beta)$ и $t^{**}(\alpha, \beta)$, применяя для этого одну и две звездочки: $t^* = \frac{1}{2}(t_2 + t_1)$, $t^{**} = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)$.

Для решения поставленной задачи удобно перейти от системы уравнений (1) к разрешающим уравнениям относительно функций $\Phi^*(\alpha, \beta)$, $\Phi^{**}(\alpha, \beta)$ [2]. Это можно сделать, если связать перемещения и функции $\Phi^*(\alpha, \beta)$, $\Phi^{**}(\alpha, \beta)$ следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}
\frac{1-\nu}{2}\,u^*(\alpha, \beta) = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}a_{11} + \frac{\partial}{\partial\beta}a_{21} - a_{31}\right)\Phi^*(\alpha, \beta),\\
\frac{1-\nu}{2}\,v^*(\alpha, \beta) = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}a_{12} + \frac{\partial}{\partial\beta}a_{22} - a_{32}\right)\Phi^*(\alpha, \beta), \qquad (2)\\
\frac{1-\nu}{2}\,w^*(\alpha, \beta) = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}a_{13} + \frac{\partial}{\partial\beta}a_{23} - a_{33}\right)\Phi^*(\alpha, \beta);
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\frac{1-\nu}{2}\,u^{**}(\alpha, \beta) = \left(\frac{\partial}{\partial\beta}a_{21} + \nabla^2 a_{31}\right)\Phi^{**}(\alpha, \beta),\\
\frac{1-\nu}{2}\,v^{**}(\alpha, \beta) = \left(\frac{\partial}{\partial\beta}a_{22} + \nabla^2 a_{32}\right)\Phi^{**}(\alpha, \beta), \qquad (3)\\
\frac{1-\nu}{2}\,w^{**}(\alpha, \beta) = \left(\frac{\partial}{\partial\beta}a_{23} + \nabla^2 a_{33}\right)\Phi^{**}(\alpha, \beta).
\end{gathered}$$

Здесь a_{11}, ..., a_{33} — алгебраические дополнения, составленные из дифференциальных операторов системы (1).

Принимая в качестве исходных уравнения общей теории оболочек [1], относительно функций $\Phi^*(\alpha, \beta)$ и $\Phi^{**}(\alpha, \beta)$ получаем разрешающее уравнение

$$\Delta\Phi^*(\alpha, \beta) = \frac{1+\nu}{c^2}\alpha_t R t^*(\alpha, \beta), \tag{4}$$

$$\Delta\Phi^{**}(\alpha, \beta) = -\frac{1+\nu}{6c^2}\alpha_t h t^{**}(\alpha, \beta), \tag{5}$$

$$\Delta = \nabla^4(\nabla^2+1)^2 - 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} - \frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}\right)\nabla^2 + \frac{1-\nu^2}{c^2}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}.$$

Запишем соотношения (2), (3), связывающие перемещения с разрешающими функциями $\Phi^*(\alpha, \beta)$, $\Phi^{**}(\alpha, \beta)$, в развернутом виде:

$$u^* = (1-\nu)\frac{\partial^3\Phi^*}{\partial\alpha^3} + c^2\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\nabla^6\Phi^* + \frac{\partial^5\Phi^*}{\partial\alpha^5} + (6-\nu)\frac{\partial^5\Phi^*}{\partial\alpha^3\partial\beta^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2}\left(2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)\Phi^*\right],$$

$$v^* = -(1-\nu)\frac{\partial^3\Phi^*}{\partial\alpha^2\partial\beta} + c^2\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\nabla^6\Phi^* - \nu\frac{\partial^5\Phi^*}{\partial\alpha^4\partial\beta} + (5-2\nu)\frac{\partial^5\Phi^*}{\partial\alpha^2\partial\beta^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^3}{\partial\beta^3}\left(2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)\Phi^*\right], \tag{6}$$

$$w^* = -(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\nabla^2\Phi^* - c^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\nabla^4\Phi^*;$$

$$u^{**} = -\left(\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2} - \nu\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}\right)\nabla^2\Phi^{**} - \frac{\partial^3\Phi^{**}}{\partial\alpha\partial\beta^2} - \frac{c^2}{1-\nu}\left[(1-\nu)\frac{\partial^7}{\partial\alpha^7} + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial^7}{\partial\alpha^5\partial\beta^2} + (1+3\nu)\frac{\partial^7}{\partial\alpha^3\partial\beta^4} + 2\nu\frac{\partial^7}{\partial\alpha\partial\beta^6}\right], \tag{7}$$

$$v^{**} = \left[\frac{\partial^3}{\partial\beta^3} + (2+\nu)\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\beta}\right](\nabla^2+1)\Phi^{**} + \nu\frac{\partial^3\Phi^{**}}{\partial\alpha^2\partial\beta} + \frac{c^2}{1-\nu}\times$$
$$\times\left[2\nu\frac{\partial^7}{\partial\alpha^6\partial\beta} + (1+3\nu)\frac{\partial^7}{\partial\alpha^4\partial\beta^3} + 2\frac{\partial^7}{\partial\alpha^2\partial\beta^5} + (1-\nu)\frac{\partial^7}{\partial\beta^7}\right]\Phi^{**},$$

$$w^{**} = \nabla^6\Phi^{**} + (2+\nu)\frac{\partial^4\Phi^{**}}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \frac{\partial^4\Phi^{**}}{\partial\beta^4}.$$

Получив соотношения (6), (7), легко выразить все интересующие нас силовые факторы через разрешающие функции.

Поместим начало координат в плоскость симметрии температурного поля в продольном направлении. Представим температуру в виде интеграла Фурье в продольном направлении и ряда Фурье в окружном направлении:

$$t(\alpha, \beta) = \frac{2}{\pi^2}t_0\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n\cos\tilde{n}\beta\int_0^{\infty}\delta_\lambda\cos\alpha\lambda d\lambda. \tag{8}$$

Здесь под t_0 понимается амплитудное значение $t^*(\alpha, \beta)$ либо $t^{**}(\alpha, \beta)$.

Решение разрешающих уравнений (4), (5) ищем в виде

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty}\cos\tilde{n}\beta\int_0^{\infty}\Phi_{n\lambda}\cos\alpha\lambda d\lambda. \tag{9}$$

После подстановки выражений (8), (9) сначала в (4), а затем в (5) и ряда преобразований находим разрешающие функции

$$\Phi^*(\alpha, \beta) = \frac{24}{\pi^2}(1+\nu)\left(\frac{R}{h}\right)^2\alpha_t R t_0^*\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n\cos\tilde{n}\beta\int_0^{\infty}\frac{\delta_\lambda}{\lambda\Delta_{n\lambda}}\cos\alpha\lambda d\lambda, \tag{10}$$

$$\Phi^{**}(\alpha, \beta) = -\frac{4}{\pi^2}(1+\nu)\frac{R}{h}\alpha_t R t_0^{**}\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n\cos\tilde{n}\beta\int_0^{\infty}\frac{\delta_\lambda}{\lambda\Delta_{n\lambda}}\cos\alpha\lambda d\lambda. \tag{11}$$

Подстановка разрешающих функций (10), (11) в соотношения, связывающие силовые и деформационные факторы с разрешающими функциями, позволяет найти окончательные выражения для перемещений, усилий и моментов:

$$\frac{w^*(\alpha,\beta)}{\alpha_t R t_0^*} = -\frac{24}{\pi^2}(1+\nu)\left(\frac{R}{h}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n\cos\tilde{n}\beta\int_0^{\infty}\frac{\lambda^2 w_{n\lambda}^*\delta_\lambda}{\Delta_{n\lambda}}\cos\alpha\lambda d\lambda,$$

$$\frac{T_i^*(\alpha,\beta)}{\alpha_t E h t_0^*} = \frac{24}{\pi^2}(1+\nu)\left(\frac{R}{h}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n\cos\tilde{n}\beta\int_0^{\infty}\frac{t_{in\lambda}^*\delta_\lambda}{\Delta_{n\lambda}}\cos\alpha\lambda\, d\lambda -$$

$$-\frac{2}{\pi^2(1-\nu)}\sum_{n=0;1}^{\infty}\omega_n\cos\tilde{n}\beta\int_0^{\infty}\delta_\lambda\cos\alpha\lambda d\lambda,$$

$$\frac{S_i^*(\alpha,\beta)}{\alpha_t E h t_0^*} = -\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\tilde{n}\sin\tilde{n}\beta\int_0^{\infty}\frac{\lambda^2 s_{in\lambda}^*\delta_\lambda}{\Delta_{n\lambda}}\sin\alpha\lambda d\lambda, \qquad (12)$$

$$\frac{G_i^*(\alpha,\beta)}{\alpha_t E t_0^*\frac{h^2}{6}} = \overline{G}_i^*(\alpha,\beta) = -\frac{12}{\pi^2}\frac{R}{h}\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n\cos\tilde{n}\beta\int_0^{\infty}\frac{g_{in\lambda}^*\delta_\lambda}{\Delta_{n\lambda}}\cos\alpha\lambda d\lambda;$$

$$\frac{w^{**}(\alpha,\beta)}{\alpha_t R t_0^{**}} = \frac{4}{\pi^2}(1+\nu)\frac{R}{h}\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n\cos\tilde{n}\beta\int_0^{\infty}\frac{w_{n\lambda}^{**}\delta_\lambda}{\Delta_{n\lambda}}\cos\alpha\lambda d\lambda,$$

$$\frac{T_i^{**}(\alpha,\beta)}{\alpha_t E h t_0^{**}} = -\frac{4}{\pi^2}(1+\nu)\frac{R}{h}\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n\cos\tilde{n}\beta\int_0^{\infty}\frac{t_{in\lambda}^{**}\delta_\lambda}{\Delta_{n\lambda}}\cos\alpha\lambda d\lambda, \qquad (13)$$

$$\frac{S_i^{**}(\alpha,\beta)}{\alpha_t E h t_0^{**}} = -\frac{4}{\pi^2}(1+\nu)\frac{R}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\sin\tilde{n}\beta\int_0^{\infty}\frac{s_{in\lambda}^{**}\delta_\lambda}{\Delta_{n\lambda}}\sin\alpha\lambda d\lambda,$$

$$\frac{G_i^{**}(\alpha,\beta)}{\frac{\alpha_t E t_0^{**}}{1-\nu}\frac{h^2}{6}} = \overline{G}_i^{**}(\alpha,\beta) = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n\cos\tilde{n}\beta\int_0^{\infty}\frac{g_{in\lambda}\delta_\lambda}{\Delta_{n\lambda}}\cos\alpha\lambda d\lambda -$$

$$-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n\cos\tilde{n}\beta\int_0^{\infty}\delta_\lambda\cos\alpha\lambda d\lambda \qquad (i=1;\quad 2).$$

В выражениях (10) — (13) приняты следующие обозначения:

$$\Delta_{n\lambda} = (\lambda^2+\tilde{n}^2)^2(\lambda^2+\tilde{n}^2-1)^2 + 2(1-\nu)\lambda^2(\lambda^4-\tilde{n}^4) + \frac{1-\nu^2}{c^2}\lambda^4;$$

$$w_{n\lambda} = (1-\nu)(\lambda^2+\tilde{n}^2) - c^2(\lambda^2+\tilde{n}^2)^2;$$

$$t_{1n\lambda}^* = \lambda^4 + \frac{c^2}{1-\nu^2}[\lambda^8 + (3+\nu)\lambda^6\tilde{n}^2 + 3(1+\nu)\lambda^4\tilde{n}^4 + (1+3\nu)\lambda^2\tilde{n}^6 +$$

$$+\nu\tilde{n}^4(\tilde{n}^2-1)^2 - 2\nu\lambda^6 + (5+2\nu-\nu^2)\lambda^4\tilde{n}^2 - 2(1+3\nu-\nu^2)\lambda^2\tilde{n}^4 +$$

$$+(1+\nu)\lambda^2\tilde{n}^2];$$

$$t_{2n\lambda}^* = \lambda^4 + \frac{c^2}{1-\nu^2}[\nu\lambda^8 + (1+3\nu)\lambda^6\tilde{n}^2 + 3(1+\nu)\lambda^4\tilde{n}^4 + (3+\nu)\lambda^2\tilde{n}^6 +$$

$$+\tilde{n}^4(\tilde{n}^2-1)^2 - (1+\nu)\lambda^6 - (3+4\nu-\nu^2)\lambda^4\tilde{n}^2 - (7-\nu)\lambda^2\tilde{n}^4 + 2\lambda^2\tilde{n}^2];$$

$$s^{*}_{1n\lambda} = (\lambda^2 + \tilde n^2)^3 - (5 - \nu)\,\lambda^2\tilde n^2 - 2\tilde n^4 + \lambda^2 + \tilde n^2;$$

$$s^{*}_{2n\lambda} = (\lambda^2 + \tilde n^2)^3 - (1 - \nu)\,\lambda^4 - (6 - 2\nu)\,\lambda^2\tilde n^2 - 2\tilde n^4 + \lambda^2 + \tilde n^2;$$

$$g^{*}_{1n\lambda} = \lambda^2\,[(\lambda^2 + \nu\tilde n^2)(\lambda^2 + \tilde n^2) + \lambda^2 - \nu\tilde n^2] +$$
$$+ \frac{c^2}{1-\nu}\,[\lambda^6\tilde n^2 + (2 + \nu)\,\lambda^4\tilde n^4 + (1 + 2\nu)\,\lambda^2\tilde n^6 + \nu\tilde n^4(\tilde n^2 - 1)^2];$$

$$g^{*}_{2n\lambda} = \lambda^2\,(\tilde n^2 + \nu\lambda^2 - 1)(\tilde n^2 + \lambda^2) - \frac{c^2}{1-\nu}\,[\nu\lambda^8 + (1 + 2\nu)\,\lambda^6\tilde n^2 +$$
$$+ (2 + \nu)\,\lambda^4\tilde n^4 + \lambda^2\tilde n^6];$$

$$w^{**}_{n\lambda} = (\lambda^2 + \tilde n^2)^3 - (2 + \nu)\,\lambda^2\tilde n^2 - \tilde n^4;$$

$$t^{**}_{1n\lambda} = \lambda^2\,\tilde n^2\,(\lambda^2 + \tilde n^2 - 1) + \frac{c^2}{1-\nu^2}\,[(1 - 2\nu)\,\lambda^6\tilde n^2 + (2 - 3\nu)\,\lambda^4\tilde n^4 +$$
$$+ \lambda^2\tilde n^6 + \nu\tilde n^4\,(\tilde n^2 - 1)^2];$$

$$t^{**}_{2n\lambda} = \lambda^4\,(\lambda^2 + \tilde n^2) - \frac{c^2}{1-\nu^2}\,[\nu\lambda^8 + \lambda^6\tilde n^2 + (2 - 3\nu)\,\lambda^4\tilde n^4 +$$
$$+ (1 - 2\nu)\,\lambda^2\tilde n^6 + \lambda^2\tilde n^4];$$

$$s^{**}_{1n\lambda} = \lambda^3\tilde n\,(\lambda^2 + \tilde n^2 - 1) - \frac{c^2}{1-\nu^2}\,[\nu\lambda^7\tilde n + \lambda^5\,\tilde n^3 + (2 - 3\nu)\,\lambda^3\tilde n^5 +$$
$$+ (1 - 2\nu)\,\lambda\tilde n^7 - (1 - 3\nu)\,\lambda\tilde n^5 - \nu\lambda\tilde n^3];$$

$$s^{**}_{2n\lambda} = \lambda^2\,\tilde n\,(\lambda^2 + \tilde n^2 - 1) + \frac{c^2}{1-\nu^2}\,[(1 - 2\nu)\,\lambda^7\tilde n + (2 - 3\nu)\,\lambda^5\tilde n^3 +$$
$$+ \lambda^3\tilde n^5 + \nu\lambda\tilde n^7 - 2\nu\lambda\tilde n^5 + \nu\lambda\tilde n^3];$$

$$g^{**}_{1n\lambda} = (\lambda^2 + \nu\tilde n^2)(\lambda^2 + \tilde n^2)^3 - (5\nu + 2\nu^2)\,\lambda^2\tilde n^4 - (1 + 4\nu + \nu^2)\,\lambda^4\tilde n^2 -$$
$$- (1 - 2\nu - 2\nu^2)\,\lambda^2\tilde n^2 - \nu\lambda^6 - \nu\tilde n^4\,(2\tilde n^2 - 1);$$

$$g^{**}_{2n\lambda} = (\tilde n^2 + \nu\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + \tilde n^2)^3 - 2\,(1 + \nu)\,\lambda^2\tilde n^4 - \nu\,(2 + \nu)\,\lambda^4\tilde n^2 +$$
$$+ (2 + \nu)\,\lambda^2\tilde n^2 - \tilde n^4\,(\tilde n^2 - 1);$$

$$\tilde n = kn.$$

Коэффициенты ω_n, δ_λ зависят от закона распределения температуры в круговом и продольном направлениях. Приведем их значения для нескольких случаев распределения температуры. При кусочно-постоянном распределении температуры на k областях, равномерно расположенных по контуру оболочки в сечении $\alpha = 0$,

$$\delta_\lambda = \frac{1}{\lambda}\sin\alpha_0\lambda,$$

$$\omega_n = \begin{cases} k\beta_0 & \text{при } n = 0, \\ \dfrac{2}{n}\sin kn\beta_0 & \text{при } n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

При косинусоидальном распределении температуры по контуру $\omega_n = \pi$ при $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Если закон изменения температуры вдоль образующей оболочки задан в виде $e^{-r|\alpha|}$ или $e^{-r\alpha^2}$, то соответственно получаем

$$\delta_\lambda = \frac{r}{r^2+\lambda^2}, \quad \delta_\lambda = r^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{4r}} .$$

На ЭЦВМ произведены вычисления перемещений и силовых факторов оболочки при кусочно-постоянном распределении температуры для случаев постоянной и при наличии перепада температуры по толщине оболочки. Приняты следующие параметры: $R/h = 100$, $\alpha_0 = \beta_0 = 0{,}125$, $k = 1$. На рис. 1 представлены кривые для продольного (*1*) и кругового (*2*) моментов

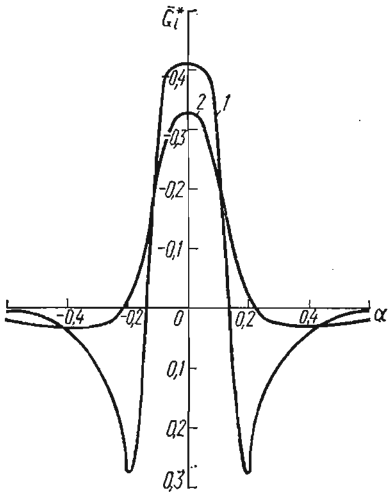

Рис. 1

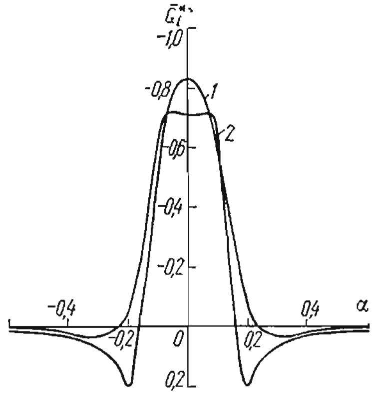

Рис. 2

в случае постоянной по толщине оболочки температуры при $\beta = 0$. Круговой момент, вычисленный в работе [3] на основе полубезмоментной теории, хорошо согласуется с представленными на рис. 1 значениями, найденными по общей теории оболочек. В случае перепада температуры по толщине оболочки кривые для продольного (*1*) и кругового (*2*) моментов представлены на рис. 2. Как и в первом случае, максимальное значение продольного момента несколько больше кругового. Отметим, что одно и то же значение температуры или перепада температуры вызывает в оболочке напряжения, превышающие напряжения в плоском теле или в пластинке, имеющих одинаковые нагретые зоны и размеры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов В. З.* Избранные труды. Т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1962. 528 с.
2. *Подстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурные напряжения в оболочках. К., Изд-во АН УССР, 1961. 212 с.
3. *Нерубайло Б. В., Смирнов В. С.* Напряжения в круговой цилиндрической оболочке при локальном распределении температуры.— Труды УАИ, 1971, вып. 32, с. 69—76.
4. *Богачев В. С., Нерубайло Б. В., Федик И. И.* Изгиб прямоугольной пластины с горячим пятном.— Прочность конструкций, 1973, вып. 76, с. 21—28.

г. Москва

Поступила в редколлегию
16.XII 1975 г.

УДК 536.12 : 539.319

Ю. С. Постольник, А. И. Золотарев, В. Н. Литвиненко

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ПОЛЕЙ ТЕМПЕРАТУР И НАПРЯЖЕНИЙ В ЦИЛИНДРЕ, НАГРЕВАЕМОМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ВО ВРЕМЕНИ ТЕПЛОВЫМ ПОТОКОМ

Как известно [5], большинство точных решений краевых задач теплопроводности содержат экспоненциальные функции времени, а в регулярный период нагрева просто изменяются во времени по экспоненциальному