УДК 519.2.004.14

В. А. Петенько

ОБ ОДНОМ РАЗНОСТНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПО Г. Е. ШИЛОВУ СИСТЕМ

Задача Коши для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами вида

$$\frac{\partial u(x, y, \tau)}{\partial \tau} = P\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \; i\frac{\partial}{\partial y}\right) u(x, y, \tau), \quad (x, y) \in R_2, \quad \tau \geqslant 0, \tag{1}$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \tag{2}$$

где $P(t, s)$ — матричный полином; $u(x, y, \tau)$ и $f(x, y)$ — вектор-столбцы функций, с помощью некоторой разностной схемы приводится к своему разностному аналогу

$$u_\Delta(k\Delta x, \; l\Delta u, \; (n+1)\Delta\tau = \sum_{\mu,\nu} C_{\mu\nu} u_\Delta(k-\mu)\Delta x, \; (l-\nu)\Delta y, \; n\Delta\tau), \tag{3}$$

$$u_\Delta(k\Delta x, l\Delta y, 0) = f(x\Delta x, l\Delta y). \tag{4}$$

Достаточным условием устойчивости применяемой разностной схемы (см. [4]) есть условие, основанное на принципе сжатых отображений, т. е. условие вида

$$\left\| \sum_{\mu,\nu} C_{\mu\nu} \exp\{it\mu\Delta x + is\nu\Delta y\} \right\| \leqslant 1 \tag{5}$$

(под нормой $\|A\|$ матрицы A понимается максимальный из модулей корней уравнения $\det \left\{ A - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right\} = 0$). Условие, аналогичное условию (5), будет рассматриваться и в данной работе, однако оно получается в процессе применения к решению задачи (3), (4) обобщенно-вероятностного метода. Прежде чем приступить к изложению основных результатов, приведем некоторые определения и факты.

Пусть (p, q) — пара натуральных чисел, а Γ_{pq} — множество неотрицательных целочисленных пар (k, l) — решений уравнения

$$\frac{k}{2p} + \frac{l}{2q} = 1.$$

Определение 1. (p, q)-Формой называется действительная функция действительных переменных вида

$$\Psi_{pq}(t, s) = \sum_{(k,l)\in\Gamma_{pq}} a_{kl} t^k s^l.$$

Понятие (p, q)-формы является обобщением понятия однородной формы четного порядка, и среди всех (p, q)-форм существуют знакоопределенные, т. е. такие, для которых $\Psi_{pq}(t, s) \gtrless 0$, когда $(t, s) \neq (0,0)$. Отметим, что для установления знакоопределенности (p, q)-формы можно воспользоваться критерием И. Ф. Клюйника [1].

Определение 2. Матричной (p, q)-формой называется матрица-функция вида

$$A_{pq}(t, s) = T \begin{pmatrix} \Psi_{p_1q_1}(t, s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Psi_{p_2q_2}(t, s) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Psi_{p_Nq_N}(t, s) \end{pmatrix} T^{-1}, \tag{6}$$

где T — невырожденная матрица: $\Psi_{p_j q_j}(t, s)$ — (p_j, q_j)-формы; $p = \max\limits_j p_j$; $q = \max\limits_j q_j$ $(j = \overline{1, N})$.

Определение 3. Матричная (p, q)-форма вида (6) называется положительно определенной, если все (p_j, q_j)-формы являются положительно определенными.

В теории вероятностей двумерные нормальные плотности — это функции, имеющие интегральное представление

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R_2} \exp\{-itx - isy - \Psi_{11}(t, s)\}\, dtds,$$

где $\Psi_{11}(t, s)$ — положительно определенная квадратичная форма. В используемом нами обобщении результатов теории вероятностей предельными функциями (аналогами плотностей) являются матрицы-функции вида

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R_2} \exp\{-itx - isy - A_{pq}(t, s)\}\, dtds.$$

Здесь $A_{pq}(t, s)$ — положительно определенная матричная (p, q)-форма.

Определение 4. Набор матриц $\{P(k, l)\}$, приводящихся к диагональному виду одним и тем же линейным преобразованием, и для которого $\sum\limits_{k,l} P(k, l) = E$, $\sum\limits_{k,l} \| P(k, l) \| < \infty$, где E — единичная матрица, называется квазивероятностным набором матриц.

Определение 5. Матрица-функция $V(x, y)$ называется квазивероятностной матричной функцией распределения, если она представима в виде

$$V(x, y) = T \begin{pmatrix} V_1(x, y) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_2(x, y) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & V_N(x, y) \end{pmatrix} T^{-1}, \tag{7}$$

а функции $V_j(x, y)$ удовлетворяют требованиям

$$V_j(x, -\infty) = V_j(-\infty, y) = 0, \quad V_j(\infty, \infty) = 1,$$

$$\operatorname{Var} V_j(x, y) = \iint\limits_{R_2} | d_x d_y V_j(x,y) | < \infty, \quad j = \overline{1, N}.$$

Определение 6. Моментом порядка (k, l) функции $v(x, y)$ называется величина

$$\alpha_{kl} = \iint\limits_{R_2} x^k y^l d_x d_y v(x, y)$$

в случае, когда

$$\iint\limits_{R_2} | x |^k | y |^l d_x d_y v(x, y) | < \infty.$$

Определение 7. Функция $v(x, y)$ обладает свойством Γ по отношению к положительно определенной (p, q)-форме $\sum\limits_{k,l} a_{kl} t^k s^l$, если $\alpha_{kl} = 0$, $(k, l) \in \left\{(k, l)\colon \frac{k}{2p} + \frac{l}{2q} < 1\right\}$, $\alpha_{kl} = -(-i)^{k+l} k! l! a_{kl}$, $(k, l) \in \Gamma_{pq}$, причем α_{kl} существует, когда $(k, l) \in \left\{(k, l) : \frac{k}{2p+1} + \frac{l}{2q+1} = 1\right\}$.

Определение 8. Квазивероятностная матричная функция распределения $v(x, y)$ вида (7) обладает свойством Γ по отношению к положительно определенной матричной (p, q)-форме $A_{pq}(t, s)$, если свойством Γ обладают функции $V_j(x, y)$ по отношению к (p_j, q_j)-формам $\Psi_{p_j q_j}(t, s)$.

Наряду с квазивероятностным набором матриц $\{P(k, l)\}$ будем рассматривать решетчатый случайный вектор (ξ, η) с возможными значениями, принимаемыми на узлах решетки:

$$x = k\alpha + l\beta, \quad y = k\gamma + l\delta, \tag{8}$$

где k, l — целые, а α, β, γ, δ — действительные числа, причем $d = \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$.

Множество $\{P(k, l)\}$ удобно называть квазивероятностным матричным законом распределения для решетчатого случайного вектора (ξ, η) с решеткой вида (8). Матрицу-функцию

$$F(x, y) = \sum_{\substack{k\alpha + l\beta < x \\ k\gamma + l\delta < y}} P(k, l)$$

будем называть квазивероятностной матричной функцией распределения решетчатого случайного вектора (ξ, η).

Теорема. Пусть для решетчатого случайного вектора (ξ, η) с решеткой вида (8) и квазивероятностным матричным законом распределения $\{P(k, l)\}$ выполняются условия:

а) матрица-функция $F(x, y)$ обладает свойством Γ по отношению к положительно определенной матричной (p, q)-форме $A_{pq}(t, s)$;

б) $\|w(t, s)\| = \left\| \sum_{k,l} P(k, l) \exp\{it(k\alpha + l\beta) + is(k\gamma + l\delta)\} \right\| < 1$ в области $D \setminus \{(0, 0)\}$, где $D = \{(t, s)\colon |\alpha t + \gamma s| \leqslant \pi, \ |\beta t + \delta s| \leqslant \pi\}$.

Тогда равномерно по k и l при $n \to \infty$ выполняется соотношение

$$n^{\frac{p+q}{2pq}} \left\| \frac{P_n(k, l)}{|d|} - \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R_2} \exp\{-it(k\alpha + l\beta) - is(k\gamma + l\delta) - nApq(t, s)\} \times \right.$$
$$\left. \times \, dtds \right\| \to 0$$

($\{P_n(k, l)\}$ — n-кратная свертка множества $\{P(k, l)\}$ с собой).

Вопросы, связанные с приведенными определениями и результатами, рассмотрены в работах [2, 3], доказательство теоремы содержится в работе [3].

Докажем такое вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть кусочно-непрерывная функция $f(x, y)$ интегрируема вместе со своими частными производными $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в замкнутой области G на плоскости. Тогда

$$\left| \sum_{k,l} f(k\Delta x, l\Delta y)\, \Delta x \Delta y - \iint_G f(x, y)\, dxdy \right| = O(\max(\Delta x, \Delta y)), \ \Delta x, \Delta y \to 0.$$

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что функция $f(x, y)$ непрерывна в области G. Так как $f(x, y)$ интегрируема в G, то предел суммы

$$\sum_{k,l} f(k\Delta x, l\Delta y)\, \Delta x \Delta y$$

как интегральной стремится к значению интеграла при $\Delta x, \Delta y \to 0$. Вследствие аддитивного свойства интеграла

$$\iint_G f(x, y)\, dxdy = \sum_{k,l} \int_{(k-1)\Delta x}^{k\Delta x} \int_{(l-1)\Delta y}^{l\Delta y} f(x, y)\, dxdy. \tag{9}$$

Применим теорему о среднем значении к каждому интегралу суммы (9) по прямоугольникам, целиком содержащимся в G, а вместо интегралов суммы (9), взятых по областям, пересекающимся границей области G, возьмем удельное среднее значение функции $f(x, y)$, умноженное на площадь прямоугольника. Тогда

$$\int\limits_{(k-1)\Delta x}^{k\Delta x}\int\limits_{(l-1)\Delta y}^{l\Delta y} f(x, y)\,dxdy = f(x_k, y_l)\,\Delta x\Delta y, \quad x_k \in [(k-1)\,\Delta x,\ k\Delta x],$$

$$y_l \in [(l-1)\,\Delta y,\ l\Delta y]$$

для прямоугольников, целиком содержащихся в G, и

$$\int\limits_{(k-1)\Delta x}^{k\Delta x}\int\limits_{(l-1)\Delta y}^{l\Delta y} f(x, y)\,dxdy = mf(x_k, y_l)\,\Delta x\Delta y, \quad 0 \leqslant m < 1$$

для прямоугольников второго типа. Так как $m \to 1$ при Δx, $\Delta y \to 0$, то положим $m = 1$. Тогда, используя теорему Лагранжа, получаем

$$|R(\Delta x, \Delta y)| = \left|\int\limits_G\int f(x, y)\,dxdy - \sum_{k,l} f(k\Delta x, l\Delta y)\,\Delta x\Delta y\right| =$$

$$= \left|\Delta y \sum_{k,l} \frac{f(x_k, y_l) - f(x_k, l\Delta y)}{\Delta y}\,\Delta x\Delta y + \Delta x \sum_{k,l} \frac{f(x_k, l\Delta y) - f(k\Delta x, l\Delta y)}{\Delta x}\,\Delta x\Delta y\right| \leqslant$$

$$\leqslant \Delta y \sum_{k,l}\left|\frac{\partial f(x_k, y_l^*)}{\partial y}\right|\Delta x\Delta y + \Delta x \sum_{k,l}\left|\frac{\partial f(x_k^*, l\Delta y)}{\partial x}\right|\Delta x\Delta y,$$

$$x_k^* \in [x_k, k\Delta x], \quad y_l^* \in [y_l, l\Delta y].$$

Две последние суммы являются интегральными, а соответствующие интегралы существуют. Поэтому

$$|R(\Delta x, \Delta y)| \leqslant \Delta y\left[\int\limits_G\int\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|dxdy + \varepsilon_1\right] + \Delta x\left[\int\limits_G\int\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|dxdy + \varepsilon_2\right],\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 > 0,$$

т. е. лемма доказана.

Изложим основные результаты. Рассмотрим задачу Коши для системы вида

$$\frac{\partial u(x, y, \tau)}{\partial \tau} = -A_{pq}\left(i\frac{\partial}{\partial x},\ i\frac{\partial}{\partial y}\right)u(x, y, \tau), \quad (x, y) \in R_2,\ \tau \geqslant 0, \tag{10}$$

где $A_{pq}(t, s)$ — положительно определенная матричная (p, q)-форма, а начальное условие имеет вид

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y). \tag{11}$$

Здесь $\varphi(x, y)$ — непрерывная интегрируемая вместе со своими частными производными $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ финитная вектор-функция. Решение задачи (10), (11) представляется в виде

$$u(x, y, \tau) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_G\int\int\limits_{R_2}\int \exp\{-it(\mu - x) - is(\nu - y) - \tau A_{pq}(t, s)\} \times$$

$$\times\ \varphi(\mu, \nu)\,dtdsd\mu d\nu = E(x, y, \tau) * \varphi(x, y),$$

где $E(x, y, \tau)$ — фундаментальная матрица решений системы (10).

Применим разностную схему, по которой

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} \to \frac{u(x, y, \tau + \Delta\tau) - u(x, y, \tau)}{\Delta\tau},$$

а частные производные по x и y заменяются следующим образом: по мере возрастания порядка производной берутся правосторонние и левосторонние разности по x и y в порядке их чередования; связь между шагами вдоль пространственной и временной осей такая:

$$\Delta\tau = L\Delta x^{2p} = L\Delta y^{2q}. \tag{12}$$

Задача (10), (11) вследствие применения указанной разностной схемы сводится к своему разностному аналогу

$$u_\Delta(k\Delta x,\ l\Delta y,\ (n+1)\Delta\tau) = \sum_{\mu,\nu} P(\mu,\ \nu)\, u_\Delta(k\Delta x - \mu\Delta x,\ l\Delta y - \nu\Delta y,\ n\Delta\tau), \quad (10')$$

$$u_\Delta(k\Delta x,\ l\Delta y,\ 0) = \varphi(k\Delta x,\ l\Delta y). \quad (11')$$

Непосредственной проверкой устанавливаем, что набор матриц $\{P(\mu,\ \nu)\}$ образует квазивероятностный набор матриц. Формула (10′) как аналог формулы полной вероятности индуцирует некоторый обобщенный вероятностный процесс типа процесса блуждания частицы по узлам решетки, образованной системой прямых

$$x = k\Delta x,\ y = l\Delta y. \quad (13)$$

Пусть $x = k\Delta x$, $y = l\Delta y$ и $\tau = n\Delta\tau$. Решая последовательно (10′) — (11′), получаем

$$u_\Delta(k\Delta x,\ l\Delta y,\ \Delta\tau) = \sum_{\mu,\nu} P(k-\mu,\ l-\nu)\, \varphi(\mu\Delta x,\ \nu\Delta y),$$

$$u_\Delta(k\Delta x,\ l\Delta y,\ 2\Delta\tau) = \sum_{\mu,\nu} P_2(k-\mu,\ l-\nu)\, \varphi(\mu\Delta x,\ \nu\Delta y),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_\Delta(k\Delta x,\ l\Delta y,\ n\Delta\tau) = \sum_{\mu,\nu} P_n(k-\mu,\ l-\nu)\, \varphi(\mu\Delta x,\ \nu\Delta y).$$

Преобразование Фурье — Стилтьеса функции

$$F(x,\ y) = \sum_{\substack{k\Delta x < x \\ l\Delta y < y}} P(k,\ l)$$

можно представить в виде

$$w(t,\ s) = E - LT \begin{pmatrix} A_{p_1q_1}(t,\ s) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_{p_2q_2}(t,\ s) & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{p_Nq_N}(t,\ s) \end{pmatrix} T^{-1},$$

где

$$A_{p_jq_j}(t,\ s) \doteq \sum_{(k,l)\in\Gamma_{p_jq_j}} a_{kl}\left(2\sin\frac{t\Delta x}{2}\right)^k \left(2\sin\frac{s\Delta y}{2}\right)^l \cos\left(\frac{1-(-1)^k}{4}\, t\Delta x + \right.$$

$$\left. + \frac{1-(-1)^l}{4}\, s\Delta y\right) + i\sum_{(k,l)\in\Gamma_{p_jq_j}} a_{kl}\left(2\sin\frac{t\Delta x}{2}\right)^k \left(2\sin\frac{s\Delta y}{2}\right)^l \times$$

$$\times \sin\left(\frac{1-(-1)^k}{4}\, t\Delta x + \frac{1-(-1)^l}{4}\, s\Delta y\right) = A_j(t,\ s) + iB_j(t,\ s), \quad j = \overline{1,\ N}.$$

Разлагая тригонометрические функции в ряды Маклорена, убеждаемся, что матрица-функция $F(x,\ y)$ обладает свойством Γ по отношению к матричной $(p,\ q)$-форме $\Delta\tau A_{pq}(t,\ s)$, а так как существует [3] положительный

$$\min \frac{A_j(t,\ s)}{A_j^2(t,\ s) + B_j^2(t,\ s)}$$

в области $D = \{(t,\ s)\colon |t\Delta x| \leqslant \pi,\ |s\Delta y| \leqslant \pi\}$, то существует L_j, что $|1 - L_jA_{p_jq_j}(t,\ s)| < 1$ в области $D \setminus \{(0,\ 0)\}$.

Выбирая $L = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant N} L_j$, добиваемся выполнения в области $D \setminus \{(0,\ 0)\}$ неравенства $\|w(t,\ s)\| < 1$. Таким образом, выполняется условие теоремы, вследствие которой

$$\left\| \frac{P_n(k,\ l)}{\Delta x\Delta y} - E(k\Delta x,\ l\Delta y,\ n\Delta\tau) \right\| = o\left(n^{-\frac{p+q}{2pq}}\right), \quad n \to \infty.$$

Оценим разность

$$R_n = u_\Delta (k\Delta x, l\Delta y, n\Delta\tau) - u (k\Delta x, l\Delta y, n\Delta\tau).$$

Поскольку функция $\varphi (x, y)$ финитна, т. е. равна нулю вне некоторой замкнутой области G, то, применяя элементарные неравенства, получаем

$$\|R_n\| \leqslant \left\| u (k\Delta x, l\Delta y, n\Delta\tau) - \sum_{\mu,\nu} E ((k-\mu) \Delta x, (l-\nu) \Delta y, n\Delta\tau) \varphi (\mu\Delta x, \nu\Delta y) \times \right.$$
$$\left. \times \Delta x\Delta y \right\| + \sum_{\mu,\nu} \left\| \frac{P_n (k-\mu, \; -\nu)}{\Delta x\Delta y} - E ((k-\mu) \Delta x, (l-\nu) \Delta y, n\Delta\tau) \right\| \times$$
$$\times \| \varphi (\mu\Delta x, \nu\Delta y) \| \Delta x\Delta y. \qquad (14)$$

А поскольку вектор-функция $\varphi (x, y)$ непрерывна и интегрируема вместе со своими частными производными в замкнутой области G, то домножение ее на функцию $E (k\Delta x - x, l\Delta y - y, n\Delta\tau)$, очевидно, не ухудшает этих ее свойств. Поэтому, используя доказанную выше лемму, получаем, что при $n \to \infty$ первая норма в правой части (14) имеет порядок убывания к нулю $O (n^{-\frac{1}{2M}})$, где $M = \max (p, q)$. А так как $\varphi (x, y)$ интегрируема и непрерывна в области G, то она и абсолютно (по норме) интегрируема в G. Тогда согласно теореме второе слагаемое в правой части (14) стремится к нулю со скоростью порядка $0 (n^{-\frac{p+q}{2pq}})$ при $n \to \infty$.

Таким образом, показано, что применяемая разностная схема является сходящейся и скорость сходимости решения разностной задачи (10'), (11') к решению задачи (10), (11) есть величина порядка $0 (n^{-\frac{1}{2M}})$ при $n \to \infty$. Полученные результаты легко обобщаются на многомерный (больше двух) случай. Отметим, что к системам с постоянными коэффициентами, параболическим в смысле И. Г. Петровского или С. Д. Эйдельмана, изложенный метод также применим.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клюйник И. Ф.* Об одном критерии знакоопределенности форм четного порядка и его применении.— Мат. физика, 1974, вып. 16, с. 105—107.
2. *Некоторые* вопросы теории квазивероятностных процессов. Отчет/Ужгородский ун-т. Кафедра мат. анализа. Инв. № Б462261, гл. 11, 1975.
3. *Петенько В. А., Харбаш Я. Г.* Об одном обобщении вероятности и его применении. Ужгород, 1976. 90 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 3143—76 Деп.
4. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. М., Наука, 1973. 373 с.

Луцкий государственный пединститут

Поступила в редколлегию 10.10.77

УДК 517.946

И. В. Коробчук

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть D — область в пространстве E^n, содержащая бесконечность и ограниченная достаточно гладкой связной поверхностью S. В области $\Omega = D \times (t \geqslant 0)$ рассмотрим ограниченную при любом фиксированном $t \geqslant 0$ функцию $u (t, x)$, удовлетворяющую параболическому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} (t, x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \sum_{i=1}^{n} b_i (t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - c (t, x) u = 0, \qquad (1)$$

граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u |_S = 0 \qquad (2)$$