Оценим разность

$$R_n = u_\Delta (k\Delta x, l\Delta y, n\Delta\tau) - u (k\Delta x, l\Delta y, n\Delta\tau).$$

Поскольку функция $\varphi (x, y)$ финитна, т. е. равна нулю вне некоторой замкнутой области G, то, применяя элементарные неравенства, получаем

$$R_n \| \leqslant \Big\| u (k\Delta x, l\Delta y, n\Delta\tau) - \sum_{\mu,\nu} E ((k-\mu) \Delta x, (l-\nu) \Delta y, n\Delta\tau) \varphi (\mu\Delta x, \nu\Delta y) \times$$
$$\times \Delta x\Delta y \Big\| + \sum_{\mu,\nu} \Big\| \frac{P_n (k-\mu, \quad -\nu)}{\Delta x\Delta y} - E ((k-\mu) \Delta x, (l-\nu) \Delta y, n\Delta\tau) \Big\| \times$$
$$\times \| \varphi (\mu\Delta x, \nu\Delta y) \| \Delta x\Delta y. \qquad (14)$$

А поскольку вектор-функция $\varphi (x, y)$ непрерывна и интегрируема вместе со своими частными производными в замкнутой области G, то домножение ее на функцию $E (k\Delta x - x, l\Delta y - y, n\Delta\tau)$, очевидно, не ухудшает этих ее свойств. Поэтому, используя доказанную выше лемму, получаем, что при $n \to \infty$ первая норма в правой части (14) имеет порядок убывания к нулю $O (n^{-\frac{1}{2M}})$, где $M = \max (p, q)$. А так как $\varphi (x, y)$ интегрируема и непрерывна в области G, то она и абсолютно (по норме) интегрируема в G. Тогда согласно теореме второе слагаемое в правой части (14) стремится к нулю со скоростью порядка $0 (n^{-\frac{p+q}{2pq}})$ при $n \to \infty$.

Таким образом, показано, что применяемая разностная схема является сходящейся и скорость сходимости решения разностной задачи (10′), (11′) к решению задачи (10), (11) есть величина порядка $0 (n^{-\frac{1}{2M}})$ при $n \to \infty$. Полученные результаты легко обобщаются на многомерный (больше двух) случай. Отметим, что к системам с постоянными коэффициентами, параболическим в смысле И. Г. Петровского или С. Д. Эйдельмана, изложенный метод также применим.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клюйник И. Ф.* Об одном критерии знакоопределенности форм четного порядка и его применении.— Мат. физика, 1974, вып. 16, с. 105—107.
2. *Некоторые* вопросы теории квазивероятностных процессов. Отчет/Ужгородский ун-т. Кафедра мат. анализа. Инв. № Б462261, гл. 11, 1975.
3. *Петенько В. А., Харбаш Я. Г.* Об одном обобщении вероятности и его применении. Ужгород, 1976. 90 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 3143—76 Деп.
4. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. М., Наука, 1973. 373 с.

Луцкий государственный
пединститут

Поступила в редколлегию
10.10.77

УДК 517.946

И. В. Коробчук

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть D — область в пространстве E^n, содержащая бесконечность и ограниченная достаточно гладкой связной поверхностью S. В области $\Omega = D \times (t \geqslant 0)$ рассмотрим ограниченную при любом фиксированном $t \geqslant 0$ функцию $u (t, x)$, удовлетворяющую параболическому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} (t, x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \sum_{i=1}^{n} b_i (t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - c (t, x) u = 0, \qquad (1)$$

граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u |_S = 0 \qquad (2)$$

и начальному условию

$$u(0, x) = f(x), \tag{3}$$

где $\bar{\nu}$ — конормаль к границе S; $f(x) \geqslant 0$ — достаточно гладкая финитная функция; $\sigma \in C_{[S]}$. Коэффициенты уравнения (1) гладкие и ограниченные, а главная часть уравнения равномерно эллиптичная, т. е.

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\varphi_i\varphi_j \geqslant \gamma \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2 \;\forall\; \varphi^* = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \quad \|\varphi\| \neq 0, \quad \gamma > 0. \tag{4}$$

Теорема 1. Если в области $D \times [t \geqslant 0]$ существуют непрерывные ограниченные функции B_j ($j = \overline{1, n}$) с кусочно-непрерывными производными $\frac{\partial B_j}{\partial x_j}$, такие, что выполняются условия

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_j}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} B_j^2 \geqslant c^*,\\ \sum_{j=1}^{n} B_j \cos(\widehat{\bar{n}, x_j}) + \sum_{j=1}^{n} b_j \cos(\widehat{\bar{n}, x_j}) - 2\sigma|_S \leqslant 0,\end{gathered} \tag{5}$$

где $c^*(x, \; t) = \max\limits_{\Omega} \{\max\limits_{\|\varphi\|=1} \varphi^* A^{-1}\varphi\} \left[2c(x, t) - \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial b_j}{\partial x_j}\right]$; $A = \|a_{ij}\|_{ij=1}^{n}$, то существует такая постоянная C, что для $n \geqslant 3$ имеет место неравенство

$$E(t) = \iint\limits_{D} u^2(t, x)\, dD \leqslant \frac{C}{t^{n/2}}. \tag{6}$$

Доказательство. Интегрируя очевидное равенство по области $D \times (t \geqslant 0)$, получаем

$$\begin{aligned}0 = &\iint\limits_{D} u^2(t, x)\, dD - \iint\limits_{D} u^2(0, x)\, dD - \int\limits_0^t \iint\limits_{S} \Big\{\sum_{j=1}^{n} b_j \cos(\widehat{\bar{n}, x_j}) +\\ &+ \sum_{j=1}^{n} B_j \cos(\widehat{\bar{n}, x_j}) - 2\sigma\Big\} u^2 dS d\tau + \int\limits_0^t \iiint\limits_{D} \Big\{2 \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} +\\ &+ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_j}{\partial x_j} u^2 - 2cu^2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(B_j u^2)\Big\} dD d\tau.\end{aligned}$$

Откуда

$$\iint\limits_{D} u^2(t, x)\, dD \leqslant \iint\limits_{D} f^2(x)\, dD, \tag{7}$$

если

$$\sum_{j=1}^{n} B_j \cos(\widehat{\bar{n}, x_j}) + \sum_{j=1}^{n} b_j \cos(\widehat{\bar{n}, x_j}) - 2\sigma|_S \leqslant 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & B_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & B_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & B_n \\ B_1 & B_2 & \ldots & B_n & R \end{vmatrix} \geqslant 0,$$

где

$$R = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_j}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_j}{\partial x_j} - 2c.$$

Последнее неравенство выполняется, если выполняются условия теоремы [2].

Проинтегрируем это же равенство по области D:

$$0 = \iint_D \left\{ \frac{\partial u^2}{\partial t} - 2 \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u^2}{\partial x_j}\right) - \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u^2}{\partial x_i} - 2cu^2 + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(B_j u^2) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(B_j u^2) \right\} dD =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \iint_D u^2 dD - \int_S \left\{ \sum_{j=1}^{n} B_j \cos(\widehat{\bar{n}, x_j}) + \sum_{i=1}^{n} b_i \cos(\widehat{\bar{n}, x_i}) - 2\sigma \right\} u^2 dS +$$

$$+ \iint_D \left\{ 2 \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_j}{\partial x_j} u^2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(B_j u^2) - 2cu^2 \right\} dD.$$

В силу условий (5) получаем неравенство

$$-\frac{d}{dt} E(t) = -\frac{d}{dt} \iint_D u^2(t, x)\, dD \geqslant \iint_D \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dD, \tag{8}$$

из которого следует, что

$$-\frac{dE(t)}{dt} \geqslant \gamma \iint_D (\nabla u(t, x))^2 dD. \tag{9}$$

Использовав результаты работы [1], продолжим гладко функцию $u(t, x)$, определенную по x в области D, на все пространство так, чтобы выполнялись условия

$$\iint_{E^n} (\nabla u(t, x))^2 dx \leqslant C_1 \iint_D (\nabla u(t, x))^2 dD, \tag{10}$$

$$\iint_{E^n} |u(t, x)|\, dx \leqslant C_2 \iint_D |u(t, x)|\, dD, \tag{11}$$

где C_1 и C_2 не зависят от функции $u(t, x)$. Используя неравенство (7) и подставляя неравенства (10), (11), а также неравенство

$$\iint_{E^n} (\nabla u(x))^2 dx \geqslant C_3 \left[\iint_{E^n} |u(x)|\, dx\right]^{-4/n} \left[\iint_{E^n} u^2(x)\, dx\right]^{1+\frac{2}{n}},$$

которое справедливо для любой гладкой функции [3], в неравенство (9) и интегрируя последнее по t, получаем

$$E(t) \leqslant \frac{C}{t^{n/2}}.$$

Из результатов работы [1] следует такая теорема.

Теорема 2. Если выполняются условия теоремы 1 и, кроме того, коэффициенты уравнения (1) являются функциями только пространственных координат, а $\sigma \equiv 0$, то решение задачи (1) — (3) равномерно по $x \in D$ удовлетворяет неравенству

$$|u(x, t)| \leqslant \frac{C}{t^{n/4}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гущин А. К.* О стабилизации решения параболического уравнения.— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1968, **103**, с. 51—57.
2. *Елементи* якісної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними / В. Я. Скоробогатько, О. І. Бобик, П. І. Боднарчук, Б. Й. Пташник. Київ, Наук. думка, 1972. 174 с.
3. *Nash J.* Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations.— Amer. J. Math., 1958, N 80, p. 931—954.

Луцкий филиал Львовского
политехнического института

Поступила в редколлегию
12.10.77