где определитель Вронского составлен из функционалов $J_1(x), \ldots, J_n(x)$, являющихся решениями уравнения (1); значения $t_1, \ldots, t_{n-2} \in [a, b]$ фиксированы, а $t_{n-1}, t_n \in [a, b]$ произвольны и отличны от $t_1, \ldots, t_{n-2}$.

Доказательство. Если уравнение (1) вполне разрешимо и функционалы $J_m(x)$ $(m = \overline{1, n})$ удовлетворяют уравнению (1), то, как показано при доказательстве предыдущей теоремы, справедливо равенство (6). Вычисляя производные от определителей в обеих частях равенства (7) и учитывая условие (6), получаем искомую формулу.

Отметим, что приведенные здесь результаты допускают простое обобщение на случай функций многих вещественных переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковальчик И. М.* О линейных уравнениях с функциональными производными.— Укр. мат. журн., 1977, **29**, № 1, с. 99—105.
2. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. М., Мир, 1964. 430 с.
3. *Ковальчик И. М.* Условия разрешимости линейных уравнений в функциональном пространстве.— Докл. АН СССР, 1973, **213**, № 5, с. 1051—1054.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 19.05.77

УДК 512.83

А. И. Балинский, Ли-Гюн-Ы

ОБ ОБРАЩЕНИИ ГАНКЕЛЕВЫХ И ТЕПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ

В последнее время развит ряд способов обращения ганкелевых и теплицевых матриц (см. например, [1]), один из которых состоит в восстановлении обратной матрицы по некоторым наперед определенным двум ее столбцам. Однако при этом возникают случаи, когда обратная матрица однозначно не определяется никакой парой своих столбцов. В настоящей работе показано, что матрица, обратная к ганкелевой (и, как следствие, к теплицевой), однозначно определяется своим последним столбцом и некоторыми частями двух определенных соседних ее столбцов, а также предложен способ восстановления ее по этим данным, основанный на использовании понятия безутиантной матрицы и ее представления, установленного в работе [2].

Пусть имеется пара многочленов вида

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n, \\ h(\lambda) &= b_1\lambda^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n \end{aligned} \tag{1}$$

с комплексными коэффициентами, причем $h(\lambda)$ не обязательно точно степени $n - 1$. Запишем формальное разложение

$$\frac{h(\lambda)}{f(\lambda)} = \frac{s_0}{\lambda} + \frac{s_1}{\lambda^2} + \frac{s_2}{\lambda^3} + \cdots.$$

Очевидно, коэффициенты s_q $(q = 0, 1, \ldots)$ этого разложения определяются последовательно рекуррентным соотношением

$$s_q + a_1 s_{q-1} + \cdots + a_n s_{q-n} = \begin{cases} b_{q+1} & \text{при } 0 \leqslant q \leqslant n-1, \\ 0 & \text{при } q > n-1, \end{cases} \tag{2}$$

причем $s_q = 0$ при $q < 0$.

Из чисел s_q $(q = 0, 1, \ldots, 2n-2)$ составим ганкелеву $(n \times n)$-матрицу

$$H_n = \| s_{i+j} \|_{i,j=0}^{n-1}. \tag{3}$$

Пару многочленов (1) будем называть порождающей ганкелеву матрицу

(3). На основании рекуррентного соотношения (2) нетрудно убедиться, что для матрицы (3) имеет место представление

$$H_n = h(A_f)\, I_0, \tag{4}$$

где

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad I_0 = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & i_0 \\ 0 & \ldots & i_0 & i_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ i_0 & \ldots & i_{n-2} & i_{n-1} \end{bmatrix},$$

а числа i_q определяются рекуррентным соотношением

$$i_q + a_1 i_{q-1} + \cdots + a_n i_{q-n} = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

причем $i_0 = 1$, $i_q = 0$ при $q < 0$. Если ганкелева матрица наперед задана, то возникает вопрос о существовании и восстановлении по элементам порождающей ее пары многочленов, а также представление этой матрицы в виде (4). Справедлива такая лемма.

Лемма 1. Если $H_n = \| s_{i+j} \|_{i,j=0}^{n-1}$ — невырожденная ганкелева матрица, то порождающая ее пара многочленов вида (1) существует и восстанавливается по ее элементам. Матрица H_n представима в виде (4).

Доказательство. Составим систему уравнений

$$\sum_{j=0}^{n-1} s_{i+j} x_{n-j} = -s_{n+i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-2),$$

в которой s_{i+j} — элементы заданной матрицы; x_i — неизвестные величины. Эта система совместна в силу невырожденности матрицы H_n. Пусть $x_i = a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ — одно из ее решений. Образуем по нему многочлен $f(\lambda)$ вида (1). С помощью первой части соотношений (2) определим величины b_q $(q = 1, \ldots, n)$ и по ним — многочлен $h(\lambda)$ вида (1). Очевидно, что так определенные многочлены $f(\lambda)$ и $h(\lambda)$ образуют порождающую пару многочленов для матрицы H_n.

Установим справедливость представления (4). С учетом разложения

$$\frac{1}{f(\lambda)} = \frac{i_0}{\lambda^n} + \frac{i_1}{\lambda^{n+1}} + \cdots,$$

коэффициенты которого определяются соотношением (5), имеем

$$\frac{s_0}{\lambda} + \frac{s_1}{\lambda^2} + \cdots = b_1\left(\frac{i_0}{\lambda} + \frac{i_1}{\lambda^2} + \cdots\right) + b_2\left(\frac{i_0}{\lambda^2} + \frac{i_1}{\lambda^3} + \cdots\right) + \cdots$$
$$\cdots + b_n\left(\frac{i_0}{\lambda^n} + \frac{i_1}{\lambda^{n+1}} + \cdots\right).$$

Отсюда для величины s_q получаем представление

$$s_q = b_1 i_q + b_2 i_{q-1} + \cdots + b_n i_{q-n} \qquad (q = 0, 1, \ldots),$$

с помощью которого матрицу H_n записываем в виде

$$H_n = b_1 \begin{pmatrix} i_0 & i_1 & \ldots & i_{n-1} \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ i_{n-1} & i_n & \ldots & i_{2n-2} \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 & i_0 & \ldots & i_{n-2} \\ i_0 & i_1 & \ldots & i_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ i_{n-2} & i_{n-1} & \ldots & i_{2n-3} \end{pmatrix} + \cdots$$
$$\cdots + b_n \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & i_0 \\ 0 & \ldots & i_0 & i_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ i_0 & \ldots & i_{n-2} & i_{n-1} \end{pmatrix}$$

или в сокращенных обозначениях

$$H_n = b_1 I_{n-1} + b_2 I_{n-2} + \cdots + b_n I_0.$$

Поскольку

$$I_k = A_f^k I_0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

с определенной в (4) сопровождающей матрицей A_f многочлена $f(\lambda)$, то окончательно приходим к представлению (4) для заданной матрицы H_n.

Пусть $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ — многочлены степени n и m соответственно ($n \geqslant m$, $f(\lambda)$, $g(\lambda) \not\equiv 0$). Безутиантой многочленов $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ называют матрицу, определяемую многочленом от двух переменных,

$$B(\lambda, \mu) = [f(\lambda) g(\mu) - f(\mu) g(\lambda)]/(\lambda - \mu) = \sum_{i,j=0}^{n-1} b_{ij} \lambda^i \mu^j,$$

т. е. $B = \| b_{ij} \|_{i,j=0}^{n-1}$. Это понятие введено Сильвестром (см. [3, 4]). В работе [2] дано новое представление безутианты.

Лемма 2. Безутианта B, порожденная многочленами

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

$$g(\lambda) = b_0 \lambda^m + b_1 \lambda^{m-1} + \cdots + b_{m-1}\lambda + b_m \qquad (a_0 \neq 0, \ n \geqslant m),$$

представляется в виде

$$B = S_f g(A_f), \tag{6}$$

где A_f — сопровождающая многочлен $f(\lambda)$ матрица вида

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n/a_0 & -a_{n-1}/a_0 & -a_{n-2}/a_0 & \ldots & -a_2/a_0 & -a_1/a_0 \end{bmatrix};$$

$$S_f = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица B просто запишется через коэффициенты заданных многочленов, если учесть выражение

$$S_f A_f^k = \operatorname{diag}(A_k, A_{n-k}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

где

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_n \\ 0 & 0 & \ldots & -a_n & -a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -a_n & \ldots & -a_{n-k+3} & -a_{n-k+2} \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots & -a_{n-k+2} & -a_{n-k+1} \end{bmatrix};$$

$$A_{n-k} = \begin{bmatrix} a_{n-k-1} & a_{n-k-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ a_{n-k-2} & a_{n-k-3} & \ldots & a_0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

На основании представлений (4), (6) и непосредственно проверяемого соотношения $I_0^{-1} = S_f$ получаем следующий результат.

Теорема 1. Если ганкелева (безутиантная) матрица невырождена, то обратная к ней является безутиантной (ганкелевой) *.

Заданная безутиантная матрица порождается, очевидно, не единственной парой многочленов. Выберем из множества таких пар в определенном смысле простейшую.

Теорема 2. Пусть $B = \| b_{ij} \|_{i,j=0}^{n-1}$ — безутиантная матрица, некоторый элемент $b_{k,n-1}$ последнего столбца которой отличен от нуля. Тогда порождающая матрицу B пара многочленов может быть выбрана в виде

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n, \\ g(\lambda) &= \qquad b_1\lambda^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n \end{aligned} \tag{8}$$

с произвольным коэффициентом a_{n-k}. Коэффициентами многочлена $g(\lambda)$ являются элементы последнего столбца матрицы $B: b_k = b_{n-k,n-1}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$).

Доказательство. Пусть

$$F(\lambda) = \tilde{a}_0\lambda^n + \tilde{a}_1\lambda^{n-1} + \cdots + \tilde{a}_{n-1}\lambda + \tilde{a}_n,$$

$$G(\lambda) = \tilde{b}_0\lambda^n + \tilde{b}_1\lambda^{n-1} + \cdots + \tilde{b}_{n-1}\lambda + \tilde{b}_n$$

— некоторая порождающая матрицу B пара многочленов, в которой, очевидно, коэффициенты $\tilde{a}_0$ и $\tilde{b}_0$ не могут одновременно равняться нулю в силу условия $b_{k,n-1} \neq 0$. Известно [4], что две пары многочленов $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ ($\neq \mathrm{const}\, f(\lambda)$) и $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ ($\neq \mathrm{const}\, F(\lambda)$) порождают одну и ту же безутианту тогда и только тогда, когда

$$f(\lambda) = \alpha F(\lambda) + \beta G(\lambda), \quad g(\lambda) = \gamma F(\lambda) + \delta G(\lambda),$$

где $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Поэтому пара многочленов вида (8) должна определяться условиями

$$\alpha\tilde{a}_0 + \beta\tilde{b}_0 = 1, \quad \alpha\tilde{a}_{n-k} + \beta\tilde{b}_{n-k} = a_{n-k},$$

$$\gamma\tilde{a}_0 + \delta\tilde{b}_0 = 0, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Система первых двух из этих уравнений однозначно разрешима, так как согласно (6) ее определитель $\Delta = \tilde{a}_0\tilde{b}_{n-k} - \tilde{a}_{n-k}\tilde{b}_0 = b_{k,n-1} \neq 0$. Имеем

$$\alpha = \frac{\tilde{b}_{n-k} - \tilde{b}_0 a_{n-k}}{\Delta}, \quad \beta = \frac{\tilde{a}_0 a_{n-k} - \tilde{a}_{n-k}}{\Delta}.$$

Из последних двух уравнений находим $\gamma = -\tilde{b}_0$, $\delta = \tilde{a}_0$. Очевидно, что для найденных значений параметров α, β, γ, δ условие $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ выполняется при произвольных значениях величины a_{n-k}. Указанные в теореме выражения для коэффициентов многочлена $g(\lambda)$ получаем из представления (6). Теорема доказана.

Будем говорить, что безутиантная матрица восстанавливается по элементам некоторых своих столбцов, если по этим элементам можно определить порождающую ее пару многочленов и, следовательно, по формулам (6), (7) получить саму матрицу.

Перейдем к вопросу восстановления обратной матрицы к ганкелевой.

Теорема 3. Пусть H_n — невырожденная ганкелева ($n \times n$)-матрица и у матрицы H_n^{-1} элементы $b_{0,n-1} = b_{1,n-1} = \cdots = b_{k-1,n-1} = 0$, $b_{k,n-1} \neq 0$, $k \in (0, 1, \ldots, n-1)$. Тогда матрица H_n^{-1} восстанавливается по следующей совокупности своих элементов: $b_{i,k-1}$ ($i = 0, 1, \ldots, k-1$), $b_{i,k}$ ($i = k, k+1, \ldots, n-2$), $b_{i,n-1}$ ($i = 0, 1, \ldots, n-1$).

* Этот результат установлен другим способом в работе [4].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Порождающую пару многочленов для безутиантной (теорема 1) матрицы H_n^{-1} ищем в виде (8). Согласно теореме 2 для коэффициентов многочлена $g(\lambda)$ имеем выражения $b_i = b_{n-i,n-1}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) и полагаем также $a_{n-k} = 0$. Для определения остальных коэффициентов многочлена $f(\lambda)$ образуем систему уравнений путем приравнивания значения каждого из элементов указанной в теореме совокупности к его соответствующему выражению из (6). В блочно-матричной записи получаем

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -b_{k,n-1} \\ \vdots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & -b_{k+1,n-1} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots \\ 0 & & & \vdots \\ -b_{k,n-1} & -b_{k+1,n-1} & \cdots & -b_{2k-1,n-1} \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & & b_{k,n-1} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ b_{k,n-1} & & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{B}_3 = \begin{bmatrix} -b_{k+2,n-1} & -b_{k+3,n-1} & \cdots & -b_{2k+1,n-1} \\ -b_{k+3,n-1} & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & -b_{2k+2,n-1} \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots \\ -b_{2k+1,n-1} & & & -b_{n-1,n-1} \\ -b_{2k+2,n-1} & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots \\ -b_{n-1,n-1} & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix};$$

$$a^1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \\ a_{n-k-1} \end{pmatrix}; \quad a^2 = \begin{pmatrix} a_{n-k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}; \quad b^1 = \begin{pmatrix} b_{0,k-1} \\ \vdots \\ b_{k-1,k-1} \end{pmatrix}; \quad b^2 = \begin{pmatrix} b_{k,k} \\ \vdots \\ b_{n-2,k} \end{pmatrix}.$$

Система (9) имеет отличный от нуля определитель и треугольный вид. Используя формулы (6), (7), по найденным многочленам $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ строим всю матрицу H_n^{-1}.

Следствие. В случаях, когда $b_{0,n-1} \neq 0$ или $b_{i,n-1} = 0$ ($i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-2$), $b_{n-1,n-1} \neq 0$, имеем соответственно

$$a_1 = \frac{b_{n-1-i,0}}{b_{0,n-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad a_n = 0,$$

$$a_i = -\frac{b_{n-i,n-2}}{b_{n-1,n-1}} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n), \quad a_1 = 0.$$

В этих случаях система уравнений (9) принимает диагональный вид.

Теорема 4. Пусть H_n — невырожденная ганкелева $(n \times n)$-матрица и у матрицы H_n^{-1} элементы $b_{0,n-1} = b_{1,n-1} = \cdots = b_{k-1,n-1} = 0$, $b_{k,n-1} \neq 0$, $b_{k+1,n-1} \neq 0$, $k \in (0, 1, \ldots, n-2)$. Тогда матрица H_n^{-1} восстанавливается по следующей совокупности своих элементов: b_{ik} $(i = 0, 1, \ldots, n-2)$, $b_{i,n-1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

В этой теореме, очевидно, идет речь о восстановлении матрицы H_n^{-1} по наперед известным двум ее столбцам.

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, коэффициенты многочлена $g(\lambda)$ определяются выражениями $b_i = b_{n-i,n-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Коэффициенты многочлена $f(\lambda)$ определяем из системы уравнений

$$\begin{bmatrix}
0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -b_{k+1,n-1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \cdot & \cdot & -b_{k+2,n-1} \\
\vdots & & \vdots & 0 & \cdot & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & -b_{k+1,n-1} & -b_{k+2,n-1} & \cdots & & -b_{2k,n-1} \\
0 & \cdots\; 0 & b_{k,n-1} & -b_{k+2,n-1} & -b_{k+3,n-1} & \cdots & & -b_{2k+1,n-1} \\
\vdots & \cdot & & & & & & \vdots \\
\vdots & & 0 & -b_{k+3,n-1} & & & \cdot & -b_{n-1,n-1} \\
0 & & \vdots & \vdots & & \cdot & & 0 \\
\vdots & \cdot & \vdots & -b_{n-1,n-1} & \cdot & & & \vdots \\
b_{k,n-1} & 0 \;\cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-k-1} \\ a_{n-k+1} \\ \vdots \\ a_n
\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_{0k} \\ b_{1k} \\ \vdots \\ b_{n-2,k} \end{bmatrix}.$$

Матрицу H_n^{-1} строим по формулам (6), (7).

Отметим, что полученные результаты можно применить к решению задачи обращения теплицевых матриц, если учесть, что после умножения такой матрицы справа или слева на $(n \times n)$-матрицу

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & \cdot & \\ & \cdot & & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

получим ганкелеву матрицу $T_n J_n = H_n^{\mathrm{I}}$ или $J_n T_n = H_n^{-}$. Обратимость матрицы T_n эквивалентна обратимости матриц H_n^{I} или H_n^{-}. При этом $T_n^{-1} = J_n (H_n^{\mathrm{I}})^{-1}$ или $T_n^{-1} = H_n^{-} J_n$. В качестве следствий из теорем 3 и 4 можно сформулировать соответствующие теоремы для теплицевых матриц.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иохвидов И. С.* Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы. М., Наука, 1974. 264 с.
2. *Балинский А. И.* Некоторые способы исследования задач на собственные значения. Дис. канд. физ.-мат. наук, Львов, 1972, 113 с.

3. *Крейн М. Г., Неймарк М. А.* Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений. Харьков, ДНТВУ, 1936. 44 с.
4. *Ландер Ф. И.* Безутианта и обращение ганкелевых и теплицевых матриц.—Мат. исслед., 1974, 32, № 2, с. 173—179.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 11.12.77

УДК 512.8

В. М. Петричкович

АБСОЛЮТНАЯ РАЗЛОЖИМОСТЬ МАТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть задан унитальный матричный многочлен

$$A(x) = Ex^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m, \tag{1}$$

где A_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — $n \times n$-матрицы над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль; E — единичная матрица. Многочлен $\Delta(x) = \det A(x)$ называем характеристическим многочленом, а корни $\Delta(x)$ — характеристическими числами матричного многочлена (1).

Определение. Если для любого разложения *

$$\Delta(x) = \Delta_1(x)\,\Delta_2(x)\,\ldots\,\Delta_m(x), \tag{2}$$

$\deg \Delta_i = n$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ характеристического многочлена существует параллельное разложение

$$A(x) = B_1(x)\,B_2(x)\,\ldots\,B_m(x)$$

на линейные унитальные множители матричного многочлена (1), т. е. такое разложение, что $\det B_i(x) = \Delta_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, то матричный многочлен (1) будем называть абсолютно разложимым.

Очевидно, что если матричный многочлен $A(x)$ разложим на линейные унитальные множители параллельно любому разложению (2) его характеристического многочлена, то он также разложим на унитальные множители параллельно любому разложению характеристического многочлена вида

$$\Delta(x) = \Delta_{k_1}(x)\,\Delta_{k_2}(x)\,\ldots\,\Delta_{k_l}(x),$$
$$\deg \Delta_{k_i} = k_i n, \ 1 \leqslant k_i \leqslant m-1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, l).$$

Установим необходимые и достаточные условия того, чтобы унитальный матричный многочлен, характеристические числа которого попарно различны, был абсолютно разложимым, и докажем существование унитальных матричных многочленов с попарно различными характеристическими числами, обладающих свойством абсолютной разложимости.

Естественно, что задача об абсолютной разложимости матричного многочлена представляет особый интерес в случае, когда его характеристические числа попарно различны, ибо, если $\det A(x) = (x - \alpha)^{mn}$, то из разложимости матричного многочлена $A(x)$ на линейные унитальные множители следует его абсолютная разложимость. Частные случаи этой задачи рассмотрены в работах [2, 8].

Пусть характеристические числа унитального матричного многочлена (1) попарно различны, т. е.

$$\Delta(x) = \prod_{j=1}^{mn} (x - \alpha_j),$$

* Здесь и в дальнейшем рассматриваем разложения характеристического многочлена $\Delta(x)$ только на унитальные множители.