

3. Пусть  $\sum_{a \in \mathbb{C}} \theta(a, f) < t$ ,  $1 \leq t < 2$  для некоторой мероморфной функции  $f(z)$ . Тогда существует  $d_0 \in \mathbb{N}$  такое, что  $f(z)$  не представляется в виде композиции рациональной функции степени, большей  $d_0$ , и мероморфной функции. Действительно, из неравенства (3) имеем  $\sum_{a \in \mathbb{C}} \theta(a, f) \geq 2 - \frac{2}{d}$ , откуда следует, что не могут выполняться неравенства  $2 - \frac{2}{d} \geq t$ ,  $d \geq \frac{2}{2-t}$ . Значит, достаточно взять  $d_0 = \left\lceil \frac{2}{2-t} \right\rceil$ .

Аналогичные следствия можно получить из неравенства (2).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М., Физматгиз, 1960. 319 с.
2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., Наука, 1970. 582 с.

Львовский филиал математической физики  
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
07.02.77

УДК 536.12 : 539.377

**В. М. Вигак**

#### ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИИ НАГРЕВОМ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Температурные напряжения, возникающие в элементах конструкций при нестационарных температурных режимах, как известно [23, 30, 31, 34, 42], могут приводить к разрушению, и для гарантии расчетного срока службы конструкции необходимо в первую очередь для наиболее массивных деталей ограничивать интенсивность нагрева и охлаждения так, чтобы не превысить предельно допустимые напряжения. С другой стороны, из опыта известно, что в большинстве случаев наиболее выгодным и технологически оправданным переходным нестационарным температурным режимом работы установки является тот, который осуществляется за минимальный промежуток времени [43, 45]. Так, для современного этапа развития энергетики характерно стремление к повышению маневренности, снижению экономических затрат и автоматизации управления пусковыми режимами теплоэнергоблоков, что особенно важно в связи с переводом блоков на работу в режиме частых пусков и остановок для покрытия переменной части графиков нагрузки энергосистем. Это обстоятельство выдвигает на первый план проблему оптимизации по быстродействию нестационарных тепловых режимов для элементов энергооборудования при различных ограничениях, в частности при ограничениях на управление (температуру либо расход греющей среды, тепловой поток) и термоупругие напряжения.

Если величина предельно допустимых температурных напряжений для соответствующей детали установлена и не превышает предела упругости, то для определения оптимального по быстродействию нестационарного одномерного температурного режима можно использовать различные методы.

Наиболее простым, широко применяемым на практике является приближенный метод определения допустимого температурного режима, который заключается в решении обычной задачи теплопроводности и термоупругости с последующим сравнением найденных температурных напряжений с допустимыми [2, 8, 18, 20, 21, 35, 40, 44, 46, 47]. Такой подход, как правило, дает возможность определить допустимую величину характерных парамет-

ров для отдельных температурных режимов [2, 8, 20, 21], например для теплового удара — допустимую величину перепада температур между температурой греющей среды и начальной температурой детали при заданном критерии Био, для установившихся гармонических колебаний температур — допустимую амплитуду колебаний при соответствующей частоте, для квазистационарного режима — допустимую скорость подъема или понижения температуры. Однако допустимый температурный режим, определяемый таким путем, не может обеспечить заданных предельно допустимых температурных напряжений в каждый момент времени нагрева (охлаждения) и приводит либо к превышению их, либо к напряжениям, заведомо ниже допустимых [9]. Последнее не позволяет полностью исчерпать прочностные возможности детали, вследствие чего неоправданно увеличиваются продолжительность прогрева либо расхолаживания оборудования и соответственно — пусковые затраты.

Трудность удовлетворения предельно допустимым температурным напряжениям в максимально напряженных точках детали с помощью допустимого температурного режима, найденного указанным выше путем, значительно возрастает при резком изменении допустимых напряжений с ростом или понижением температуры [9], которое всегда имеет место на практике вследствие ползучести материала при высоких температурах [20, 42].

Применительно к тонкостенным элементам конструкций, температурное поле которых удовлетворительно описывается с помощью интегральных характеристик — усредненной по толщине тела температуры и температурного момента [32], — в работах [4, 38] предложена методика определения оптимального по быстрдействию нестационарного температурного режима при постоянных в зависимости от температуры допустимых температурных напряжениях, которая вытекает из разработанного ранее метода оптимизации термообработки тонкостенных конструкций [16, 17]. Разумеется, область применения указанной методики ограничивается областью применения интегральных характеристик для описания температурного поля, что затрудняет применение ее к толстостенным элементам конструкций, таким, как паропроводы острого пара, корпуса задвижек и клапанов, роторы и корпуса цилиндров турбин, и другим деталям, встречающимся, например, на современных теплоэнергоблоках на сверхкритические параметры пара.

Строгая постановка задачи оптимального по быстрдействию управления нагревом или охлаждением массивного твердого тела для одномерного температурного режима при постоянных ограничениях на управление и термоупругие напряжения приведена в работах [1, 6, 7, 13, 14]. Решение поставленной задачи управления сведено к решению задачи оптимального управления бесконечной системой дифференциальных уравнений при ограничении на линейную комбинацию фазовых координат. Решение последней задачи конструктивно построено лишь для укороченной системы — для двух-трех уравнений.

При постоянных ограничениях на управление и термоупругие напряжения в работе [12] для нагрева неограниченной пластины постоянным тепловым потоком на стадии регулярного режима предложен один подход определения оптимального управления, который близок к указанному выше методу определения допустимых температурных режимов [18, 20, 46].

Во всех отмеченных выше работах по оптимизации температурных режимов в качестве управления выступает температура окружающей греющей среды либо тепловой поток на границе тела. Большой практический интерес для современной техники представляет оптимальное по быстрдействию управление нестационарными температурными режимами элементов конструкций с помощью внутренних источников тепла. Из работ, в которых рассматриваются способы построения оптимального управления внутренними источниками тепла, необходимо отметить [5, 15, 26, 27, 39]. При этом применительно к одномерным температурным режимам наиболее перспективным,

на наш взгляд, является способ, предложенный в работах [5, 39], позволяющий в аналитическом виде найти функцию управления.

В работах [10, 11, 33, 36, 37] предложен аналитический метод определения оптимального нестационарного температурного режима в неограниченной пластине, сплошных и полых цилиндре и сфере по заданным допустимым температурным напряжениям, линейно зависящим от температуры, который позволяет построить решение задачи оптимального по быстрдействию управления нагревом и охлаждением твердого тела при ограничениях на управление (температуру либо расход греющей среды, тепловой поток) и термоупругие напряжения. Такой подход может быть с успехом применен для оптимизации температурных режимов как тонкостенных, так и толстостенных элементов конструкций.

Ниже изложена постановка задачи оптимального по быстрдействию управления нестационарным температурным режимом неограниченной пластины, полых цилиндра и сферы при ограничениях на управление и термоупругие напряжения; опираясь на предложенный метод определения оптимального нестационарного температурного режима, описана принципиальная схема аналитического решения задачи управления; дан анализ решения и приведены примеры построения оптимального управления.

Рассмотрим задачу оптимального управления при одностороннем нагреве. Пусть управление нагревом неограниченной пластины толщиной  $h$ , полых цилиндра и сферы с внутренними и наружными радиусами  $R_1$  и  $R_2$  осуществляется с помощью конвективного теплообмена по закону Ньютона на граничной поверхности  $\rho = k$ :

$$\frac{\partial T(k, \tau)}{\partial \rho} - H_1 [T(k, \tau) - t(\tau)] = 0. \quad (1)$$

Требуется в классе кусочно-непрерывных функций найти такое управление  $t(\tau)$  (температуру греющей среды  $t(\tau)$  либо тепловой поток  $q(\tau)$ , когда в условии (1) положить  $t(\tau) = q(\tau) / \lambda H_1$  и  $H_1 \rightarrow 0$ ), ограниченное снизу и сверху

$$u_1(\tau) \leq t(\tau) \leq u_2(\tau) \quad (\tau \in [0, \tau_0]), \quad (2)$$

чтобы при ограничениях на термоупругие напряжения

$$S_1^*(T) \leq S(T) \leq S_2^*(T) \quad (3)$$

за минимально короткое время  $\tau_0$  перевести тело из начального состояния

$$T(\rho, 0) = f(\rho) \quad (\rho \in [k, 1]) \quad (4)$$

в конечное с максимальной температурой

$$T(k, \tau_0) = T_0 \quad (T_0 = \text{const}; f(\rho) < T_0 < u_2(\tau_0)) \quad (5)$$

и максимальным перепадом температур по толщине стенки тела

$$\max_{\rho} T(\rho, \tau_0) - \min_{\rho} T(\rho, \tau_0) \leq \Delta T. \quad (6)$$

При этом температурное поле  $T(\rho, \tau)$  удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{j}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (j = 0, 1, 2; \rho \in (k, 1)) \quad (7)$$

и неуправляемому теплообмену на граничной поверхности  $\rho = 1$ :

$$\frac{\partial T(1, \tau)}{\partial \rho} + H_2 [T(1, \tau) - \theta(\tau)] = 0 \quad (\theta(\tau) < t(\tau)). \quad (8)$$

Здесь  $j = 0, 1, 2$  — соответственно для пластины, цилиндра и сферы;  $k = 0$  — для пластины и  $k = R_1/R_2$  ( $k \in (0, 1)$ ) — для цилиндра и сферы;  $u_1(\tau)$  и  $u_2(\tau)$  — нижнее и верхнее предельно допустимые управления, представляющие собой монотонно неубывающие функции от времени;  $S(T)$  — расчетные относительные термоупругие напряжения в максимально напря-

женных точках тела;  $S_i^*(T)$  ( $i = 1, 2$ ) — заданные предельно допустимые относительные температурные напряжения растяжения ( $i = 2$ ) и сжатия ( $i = 1$ );  $\theta(\tau)$  — заданная неуправляемая температура среды, омывающая поверхность  $\rho = 1$ ; остальные обозначения приняты, как и в работах [10, 11, 36].

Поставленная задача управления нагревом (1) — (8) требует предположить, что неуправляемый теплообмен (8) такой, что позволяет за ограниченный промежуток времени  $\tau_0$  с помощью управляемого теплообмена (1) достичь конечной цели нагрева (5), (6).

Следует отметить, что аналогично ставится задача оптимального управления охлаждением тела при тех же ограничениях, для чего необходимо лишь в условиях (5) и (8) поменять знаки  $<$  на знаки  $>$ .

Из термоупругости известно [3], что величины максимальных температурных напряжений в теле находятся в пропорциональной зависимости от теплового потока на его границе. Поэтому при нагреве тела при наложенных ограничениях (2), (3) от начального состояния (4) до конечного, характеризующего условия конечной цели нагрева (5), (6) минимизация времени нагрева  $\tau$ , очевидно, будет тогда, когда

$$u_1(\tau) < t(\tau) = u_2(\tau), \quad S_1^*(T) \leq S(T) \leq S_2^*(T) \quad (9)$$

либо

$$u_1(\tau) \leq t(\tau) \leq u_2(\tau), \quad S_1^*(T) = S(T) < S_2^*(T), \quad (10)$$

если ограничивающими являются температурные напряжения сжатия, и

$$u_1(\tau) \leq t(\tau) \leq u_2(\tau), \quad S_1^*(T) < S(T) = S_2^*(T), \quad (11)$$

если ограничивающими являются температурные напряжения растяжения.

Итак, минимизация времени нагрева поставленной задачи (1) — (8) будет тогда, когда нагрев осуществляется на пределе верхнего ограничения на управление (2) либо на пределе одного из ограничений на напряжения (3), обеспечивая при этом в каждый момент времени максимально возможный тепловой поток на границе тела.

В первом случае (9) управление определяется тривиально — оно равно верхнему ограничению на управление:

$$t(\tau) = u_2(\tau), \quad (12)$$

а температурный режим  $T(\rho, \tau)$  является решением обычной задачи теплопроводности (1), (4), (7), (8) при условии (12), которое можно представить в виде

$$T(\rho, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau [u_2(\tau - \eta) T_1(\rho, \eta) + \theta(\tau - \eta) T_2(\rho, \eta)] d\eta + \int_k^1 f(\xi) T_3(\rho, \xi, \tau) d\xi, \quad (13)$$

где  $T_i(\rho, \tau)$  ( $i = 1, 2$ ) и  $T_3(\rho, \xi, \tau)$  — известные функции влияния [22, 28].

Во втором случае (10) функция управления  $t(\tau)$  минимизирует время нагрева тела тогда, когда расчетные сжимающие термоупругие напряжения  $S(T)$  в максимально напряженных точках, а именно, на нагреваемой поверхности  $\rho = k$  [3, 24], равны предельно допустимым  $S_1^*(T)$ , т. е.

$$\frac{1+j}{1-k^{j+1}} \int_k^1 \rho^j T(\rho, \tau) d\rho - T(k, \tau) = S_1^*(T) \quad (j = 0, 1, 2). \quad (14)$$

Если удастся теперь из решения уравнения (7) при краевых условиях (4), (8), (14) найти предельно допустимый температурный режим  $T(\rho, \tau)$ , то из граничного условия (1) нетрудно будет определить управление  $t(\tau)$ , обеспечивающее этот режим.

Аппроксимируем заданные напряжения  $S_1^*(T)$  в необходимом диапазоне температур  $[f(k), T_0]$  ломаной линией, представив их в отдельных интервалах линейной зависимостью  $S_1^*(T) = b_1 - c_1 T(k, \tau)$ . Тогда условия (14) можно переписать так:

$$\frac{1+j}{1-k^{j+1}} \int_k^1 \rho^j T(\rho, \tau) d\rho - (1-c_1) T(k, \tau) = b_1 \quad (j=0, 1, 2), \quad (15)$$

где  $b_1, c_1 \in (-\infty, \infty)$  — известные коэффициенты аппроксимации.

Следовательно, для определения предельно допустимого или оптимального температурного режима  $T(\rho, \tau)$  приходим к задаче теплопроводности (4), (7), (8), (15) с неклассическим граничным условием (15).

Используя равенство

$$\rho^j \frac{\partial T(\rho, \tau)}{\partial \rho} \Big|_k = \frac{d}{d\tau} \int_k^1 \rho^j T(\rho, \tau) d\rho \quad (j=0, 1, 2),$$

которое легко получить с помощью уравнения (7), граничное условие (15) можно привести к виду

$$\frac{\partial T(1, \tau)}{\partial \rho} - k^j \frac{\partial T(k, \tau)}{\partial \rho} = \frac{1-k^{j+1}}{1+j} \left[ (1-c_1) \frac{\partial T(k, \tau)}{\partial \tau} + b_1'(\tau) \right] \quad (16)$$

$(j=0, 1, 2),$

где для большей общности принято  $b_1 = b_1(\tau)$ .

Теперь на основании работы [41] можно показать, что решение задачи теплопроводности (4), (7), (8), (16) существует и оно единственное при необходимом условии согласования

$$\frac{1+j}{1-k^{j+1}} \int_k^1 \rho^j f(\rho) d\rho - (1-c_1) f(k) = b_1(0) \quad (j=0, 1, 2) \quad (17)$$

граничного условия (15) с начальным условием (4). Последнее условие (17) для задачи управления нагревом тела всегда выполняется как условие сопряжения

$$\frac{1+j}{1-k^{j+1}} \int_k^1 \rho^j T(\rho, \tau_1) d\rho - (1-c_1) T(k, \tau_1) = b_1(\tau_1) \quad (j=0, 1, 2) \quad (18)$$

при переходе от предыдущего режима (13) с ограничением на управление (12) на режим с ограничением на сжимающие напряжения (14), откуда определяется время переключения управления  $\tau_1$ .

При решении задачи теплопроводности (4), (7), (8), (15) с неклассическим граничным условием (15) возникает важный вопрос: каким методом решать эту задачу? Известно [28], что для обычной задачи теплопроводности с одинаковым успехом можно применять как метод разделения переменных Фурье, так и метод интегрального преобразования Лапласа. Поэтому вначале при решении задачи (4), (7), (8), (15) нами использовался метод разделения переменных Фурье, что вследствие несамосопряженности дифференциального оператора по координате  $\rho$  [25] приводило к решению бесконечной системы алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложения в ряд по системе собственных функций начального распределения температур  $f(\rho)$  [10, 33, 36]. Это, естественно, вызывало неудобство при практической реализации этого метода. Кроме того, возникал законный вопрос — о существовании решения бесконечной системы уравнений.

В дальнейшем [11] при решении задачи (4), (7), (8), (15) использовался метод интегрального преобразования Лапласа [19]. Последний применительно к задачам с неклассическими граничными условиями типа (16) имеет принципиальное преимущество в том, что позволяет решение представить в виде разложения в ряд по вычетам около полюсов его изображения, пред-

ставляющего собой некоторую мероморфную функцию от параметра изображения. При этом коэффициенты разложения в ряд по собственным функциям начального распределения температур выражаются, как и для задачи с самосопряженным оператором по  $\rho$ , с помощью соответствующих интегралов от этого распределения, с той лишь разницей, что выражения эти для нашего случая сложнее.

Решение задачи теплопроводности (4), (7), (8), (15) с помощью метода интегрального преобразования Лапласа можно представить так:

$$T(\rho, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} [b_1(\tau - \eta) K_1(\rho, \eta) + \theta(\tau - \eta) K_2(\rho, \eta)] d\eta + \int_k^l f(\xi) K_3(\rho, \xi, \tau) d\xi, \quad (19)$$

где  $K_j(\rho, \tau)$  ( $j = 1, 2$ ),  $K_3(\rho, \xi, \tau)$  — функции влияния, которые выражаются в виде ряда

$$K_j(\rho, \tau) = K_{j0}(\rho) + \sum_{n=1}^m A_{jn} U_j(\gamma_n \rho) \exp \gamma_n^2 \tau + \sum_{n=1}^s B_{jn} U_j(i\lambda_n \rho) \exp(-\lambda_n^2 \tau) + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^r C_{jn} U_j(\mu_n \rho) \exp(\mu_n^2 \tau) + \left[ \Phi_j(v, \rho) \left( \tau - \frac{\varphi_j(v)}{\varphi_j'(v)} \right) + \Phi_j'(v, \rho) \right] \frac{\exp(-v^2 \tau)}{\varphi_j(v)} \quad (20)$$

$(j = 1, 2; 1 + m + s + r = \infty);$

$A_{jn}$  ( $n = \overline{1, m}$ ),  $B_{jn}$  ( $n = \overline{1, s}$ ),  $C_{jn}$  ( $n = \overline{1, r}$ ),  $K_{j0}$ ,  $U_j$ ,  $\Phi_j$ ,  $\varphi_j$  — известные коэффициенты и функции;  $\gamma_n > 0$  ( $n = \overline{1, m}$ ),  $i\lambda_n$  ( $i = \sqrt{-1}$ ;  $\lambda_n > 0$ ;  $n = \overline{1, s}$ ),  $\mu_n = \alpha_n + i\beta_n$  ( $\alpha_n, \beta_n > 0$ ;  $n = \overline{1, r}$ ) — однократные корни характеристического уравнения задачи

$$\Delta(\gamma) = 0; \quad (21)$$

$i\nu$  ( $\nu \geq 0$ ) — двукратный корень уравнения (21).

Как вытекает из выражения (20), в отличие от решения обычной задачи теплопроводности [22, 28], например задачи (1), (4), (7), (8), где функции влияния представляются в виде бесконечного ряда, каждый из членов которого содержит множителем лишь экспоненциальную функцию от отрицательного аргумента, функции влияния (20) для решения (19) могут иметь в своей структуре экспоненциальные функции от положительного ( $\exp \gamma_n^2 \tau$ ), отрицательного ( $\exp(-\lambda_n^2 \tau)$ ,  $\exp(-\nu^2 \tau)$ ) и комплексного ( $\exp \mu_n^2 \tau$ ) аргументов.

На рис. 1 показаны области существования мнимых и действительных корней уравнения (21) для пластины ( $j = 0$ ), когда

$$\Delta(\gamma) = H_2 \operatorname{ch} \gamma + \gamma \operatorname{sh} \gamma - (1 - c_1) \gamma (\gamma \operatorname{ch} \gamma + H_2 \operatorname{sh} \gamma) - H_2 \quad (H_2, c_1 \in (-\infty, \infty)).$$

Порядок целой трансцендентной функции  $\Delta(\gamma)$  равен конечному, нецелому числу 0,5. Поэтому на основании малой теоремы Пикара [29] можно доказать, что уравнение (21) имеет бесконечное счетное множество корней при любых действительных значениях  $c_1$  и  $H_2$ . Так, в открытой области  $G_1$  (для значений параметров  $c_1$  и  $H_2$  ниже кривой 1 на рис. 1) уравнение (21)

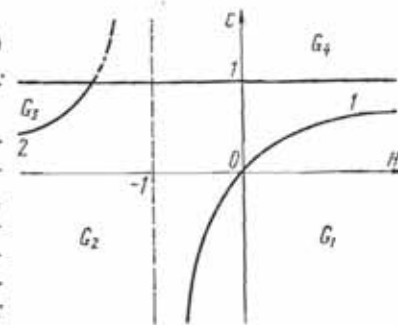


Рис. 1

при  $j = 0$  имеет только мнимые корни  $i\lambda_n$  ( $n = \overline{1, \infty}$ ;  $r = r = 0$ ;  $s = \infty$ ); в области  $G_2$  (для значений  $c_1$  и  $H_2$  между кривыми 1 и 2, но при  $c_1 < 1$ ) это уравнение имеет один действительный корень  $\gamma_1 > 0$  ( $m = 1$ ), остальные  $n = \overline{1, \infty}$  — мнимые  $i\lambda_n$  ( $s = \infty$ ;  $r = 0$ ); в области  $G_3$  (для значений  $c_1$  и  $H_2$  выше кривой 2, но при  $c_1 < 1$ ) существует уже два действительных корня  $\gamma_n > 0$  ( $n = 1, 2$ ;  $m = 2$ ), остальные  $n = \overline{1, \infty}$  — мнимые ( $s = \infty$ ;  $r = 0$ ); в части области  $G_4$  ( $c_1 \geq 1$ ) (для значений  $H_2$  правее кривой 2) существуют

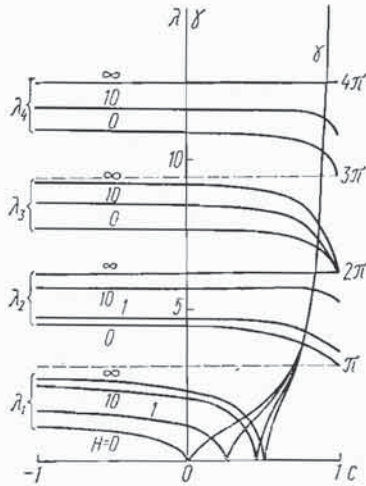


Рис. 2

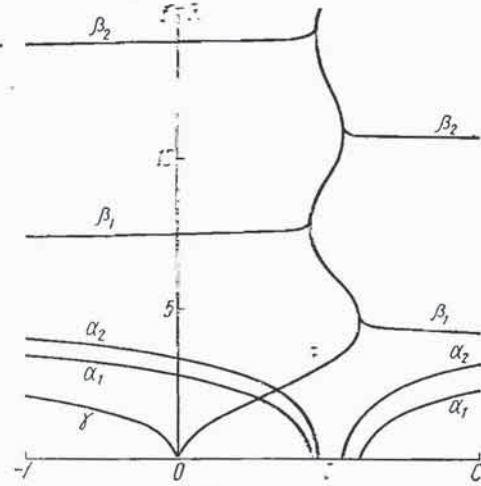


Рис. 4

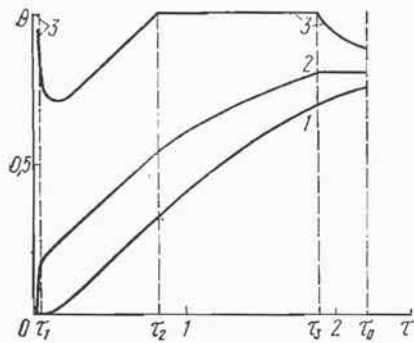


Рис. 3

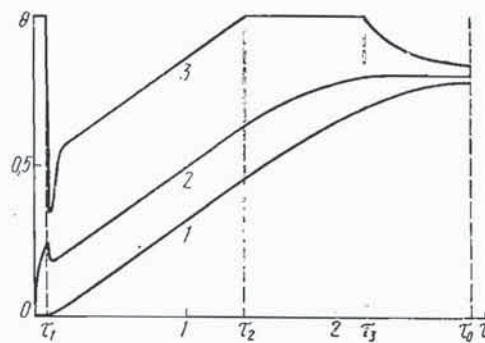


Рис. 5

только мнимые корни, а в части  $G_4$  (для значений  $H_2$  левее кривой 2) — один действительный, остальные мнимые.

На граничной кривой 1 (см. рис. 1), описываемой уравнением

$$2c_1(1 + H_2) = H_2 \quad (22)$$

при  $H_2 > -1$ , первый корень  $i\lambda_1 = 0$ , а на кривой 2, описываемой уравнением (22) при  $H_2 < -1$ , корень  $i\lambda_2 = 0$ .

Поведение первых корней уравнения (21) при  $j = 0$  показано на рис. 2, откуда видно, что при  $c_1 \rightarrow 1$  корень  $\gamma_1 \rightarrow \infty$ . Последнее свидетельствует о том, что при  $c_1 \geq 1$  термоупругие напряжения на поверхности управляемого обогрева  $\rho = k$  не ограничивают скорости нагрева тела, т. е. для значений параметров  $c_1$  и  $H_2$  из замкнутой области  $\bar{G}_4$  (см. рис. 1) нагрев тела можно осуществлять с произвольной, неограниченной скоростью — термоупругие напряжения ее не лимитируют.

Аналогично поведение корней уравнения (21) для полого цилиндра ( $j = 1$ ) и сферы ( $j = 2$ ), с той лишь разницей, что для определенных значений параметров  $c_1$ ,  $H_2$  и  $k$  некоторое количество мнимых корней  $i\lambda_n$  замещается комплексными  $\mu_n = \alpha_n + i\beta_n$ .

Следовательно, для случаев (9) и (10) управление  $t(\tau)$  и температурный режим  $T(\rho, \tau)$  могут быть определены указанным выше путем, а затем из условий сопряжения, в качестве которых выступает равенство (18) при переходе от режима (13) к режиму (19) и равенство  $t(\tau_2) = u_2(\tau_2)$  при переходе в обратном направлении, определяются моменты переключения управления  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Время отключения управления определяется из условий конечной цели нагрева (5), (6). При этом оптимальное управление строится аналогично описанному в работе [11].

В качестве примера на рис. 3 приведены безразмерная температура пластины  $T(1, \tau)/t_0$  (кривая 1) и  $T(0, \tau)/t_0$  (кривая 2), а также оптимальное управление  $t(\tau)/t_0$  (кривая 3) при ограничении на термоупругие напряжения на поверхности  $\rho = 0$ . При этом в расчете принималось  $u_2(\tau) = t_0 = \text{const}$ ;  $f(\rho) = 0$ ;  $T(0, \tau_0) = 0,8 t_0$ ;  $S_1^*(T) = -0,15 t_0$ ;  $\Delta T = 0,05 t_0$ ;  $c_1 = H_2 = 0$ ;  $H_1 = 1$ .

Оптимальное управление нагревом пластины представляет собой в этом случае кусочно-непрерывное четырехступенчатое управление с тремя переключениями в моменты времени  $\tau_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). На первом ( $\tau \in [0, \tau_1]$ ) и третьем ( $\tau \in [\tau_2, \tau_3]$ ) этапах нагрев осуществляется при предельно возможном управлении  $t(\tau) = t_0$ , на втором ( $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ ) этапе ограничивающим фактором являются сжимающие термоупругие напряжения, а на четвертом ( $\tau \in [\tau_3, \tau_0]$ ) — максимальная температура пластины  $T(0, \tau) = 0,8 t_0$ .

Применительно к хрупким материалам ограничивающим фактором скорости нагрева тела оказываются растягивающие термоупругие напряжения, возникающие на необогреваемой поверхности.

Для определения оптимального управления нагревом тела при ограничении на напряжения растяжения в случае (11) можно показать, что, как и в случае (10), решение задачи управления (1) — (8) сводится к решению уравнения теплопроводности (7) с краевыми условиями (4), (8) и неклассическим граничным условием

$$\frac{1+j}{1-k^{j+1}} \int_k^1 \rho^j T(\rho, \tau) d\rho - (1-c_2) T(1, \tau) = b_2(\tau) \quad (j=0, 1, 2). \quad (23)$$

Решение задачи (4), (7), (8), (23) представляется в том же виде (19), (20), где вместо функции  $b_1(\tau)$  и коэффициента  $c_1$  необходимо взять соответствующие величины  $b_2(\tau)$  и  $c_2$  линейной аппроксимации допустимых растягивающих напряжений  $S_2^*(T) = b_2(\tau) - c_2 T(1, \tau)$ . При этом, как и для задачи (4), (7), (8), (15), единственное решение задачи теплопроводности (4), (7), (8), (23) существует при необходимом условии согласования

$$\frac{1+j}{1-k^{j+1}} \int_k^1 \rho^j f(\rho) d\rho - (1-c_2) f(1) = b_2(0) \quad (j=0, 1, 2),$$

которое в нашем случае всегда выполняется как условие сопряжения

$$\frac{1+j}{1-k^{j+1}} \int_k^1 \rho^j T(\rho, \tau_1) d\rho - (1-c_2) T(1, \tau_1) = b_2(\tau_1) \quad (j=0, 1, 2) \quad (24)$$

при переходе от предыдущего режима (13) с ограничением на управление (18) на режим с ограничением на растягивающие напряжения  $S(T) = S_2^*(T)$ , откуда определяется время переключения управления  $\tau_1$ .

Поведение первых корней уравнения (21) для задачи (4), (7), (8), (23) при  $j=0$ , где

$$\Delta(\gamma) = \gamma \operatorname{sh} \gamma + H_2 \operatorname{ch} \gamma - (1-c_2) \gamma^2 - H_2,$$

показано на рис. 4 при  $H_2 = 0$ .

Уравнение (21) для задачи (4), (7), (8), (23) имеет один действительный корень  $\gamma_1 > 0$  ( $m=1$ ) при  $c_2 < -H_2/2$ , остальные  $n = \overline{1, \infty}$  — комплексные  $\mu_n = \alpha_n + i\beta_n$  ( $\alpha_n, \beta_n > 0$ );  $s=0$ ;  $r = \infty$  (см. рис. 5); при  $c_2 > -H_2/2$



уравнение (21) имеет ограниченное количество  $s$  мнимых корней  $i\lambda_n$  ( $\lambda_n > 0$ ;  $n = \overline{1, s}$ ) и неограниченное количество комплексных корней  $\mu_n$  ( $n = \overline{1, \infty}$ ;  $r = \infty$ ;  $m = 0$ ) и лишь при  $c_2 = 1$  количество мнимых корней  $s = \infty$ , но при этом  $m = r = 0$ .

Разумеется, что при переходе от мнимых корней  $i\lambda_n$  к комплексным  $\mu_n$  появляются двукратные мнимые корни  $iv$  (см. рис. 4), а при переходе от мнимого  $i\lambda_1$  к действительному  $\gamma_1$  при  $c_2 = -H_2/2$  — нулевой корень  $i\lambda_1 = 0$ .

Управление  $t(\tau)$ , обеспечивающее допустимый температурный режим, найденный при решении задачи (4), (7), (8), (23), определяется из граничного условия (1).

Отметим, что при решении поставленной задачи управления нагревом тела (1) — (8) никакой роли не играл нижний предел ограничения на управление  $u_1(\tau)$  (2). И это естественно. На практике достаточно потребовать, чтобы нижняя граница найденного управления  $t(\tau)$  не была меньше нижнего предела ограничения  $u_1(\tau)$ , т. е.

$$\min_{\tau \in [\tau_1, \tau_2]} t(\tau) \geq u_1(\tau).$$

В противном случае задача неуправляема с точки зрения достижения поставленной цели управления при наложенных ограничениях.

На рис. 5 показаны безразмерная температура  $T(1, \tau)/t_0$  (кривая 1) и  $T(0, \tau)/t_0$  (кривая 2), а также оптимальное четырехступенчатое управление  $t(\tau)/t_0$  (кривая 3) при ограничении на термоупругие напряжения на необогреваемой поверхности  $\rho = 1$ . При этом в расчете принималось  $u_2(\tau) = t_0 = \text{const}$ ;  $f(\rho) = 0$ ;  $T(0, \tau_0) = 0,8t_0$ ;  $S_2^*(T) = 0,06t_0$ ;  $\Delta T = 0,02t_0$ ;  $c_2 = -H_2 = 0$ ;  $H_1 = 1$ .

Здесь, как и раньше, ограничивающими оказываются термоупругие напряжения на втором этапе нагрева ( $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ ). При этом характерной особенностью допустимого температурного режима является резкое понижение температуры обогреваемой поверхности в первоначальный период после первого переключения управления (см. рис. 5). В остальном температурный режим пластины и управление напоминают графики, приведенные на рис. 3 для ограничения на сжимающие напряжения.

Итак, изложенная постановка задачи оптимального по быстродействию управления нестационарным одномерным температурным режимом твердого тела и приведенный метод ее решения позволяют в аналитическом виде найти оптимальное управление и допустимый температурный режим при ограничениях на управление и термоупругие напряжения, предельно допустимые значения которых являются соответствующими функциями от времени.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Ю. Н., Огульник М. Г. Оптимальный по быстродействию нагрев пластины при ограниченных температурных напряжениях.— В кн.: Кибернетика и управление. М., 1967, с. 43—52.
2. Балашов Ю. В. О допустимых температурных напряжениях при прогреве толстостенных паропроводов.— Электр. станции, 1964, № 12, с. 8—10.
3. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М., Мир, 1964. 517 с.
4. Будз С. Ф., Мирончук Ю. Г. Определение оптимальных по напряжениям режимов нагрева сферических оболочек.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 107—110.
5. Бурак Я. И., Гачкевич А. Р. Оптимальные по термонапряжениям режимы индукционного нагрева электропроводного слоя.— Прикл. механика, 1976, № 11, с. 62—68.
6. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., Наука, 1965. 474 с.
7. Бутковский А. Г., Малый С. А., Андреев Ю. Н. Оптимальное управление нагревом металла. М., Металлургия, 1972. 439 с.
8. Визак В. М., Прокопченко А. Г., Фальковский С. В. Определение допустимых скоростей прогрева и расхолаживания толстостенных паропроводов.— Наладоч. и эксперим. работы СРГРЭС, 1970, вып. 39, с. 83—87.

9. Вигах В. М. Исследования температурного и напряженного состояний упругих тел применительно к оптимизации переходных режимов в деталях энергооборудования. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук, Львов, 1973. 23 с.
10. Вигах В. М. Решение оптимальной нестационарной задачи теплопроводности для пластины.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 127—133.
11. Вигах В. М., Прокопенко А. Г., Федоришин А. А. Оптимальное управление нагревом цилиндра и сферы.— Физика и химия обраб. материалов, 1977, № 1, с. 25—32.
12. Вирк А. Х. Управление нагревом массивного тела с учетом ограничений на термонапряжения.— Автоматика и телемеханика, 1972, № 5, с. 185—188.
13. Голубь Н. Н. Управление нагревом линейно вязкоупругой пластины при ограничении температурных напряжений.— Автоматика и телемеханика, 1966, № 2, с. 18—27.
14. Голубь Н. Н. Оптимальное управление симметричным нагревом массивных тел при различных фазовых ограничениях.— Автоматика и телемеханика, 1967, № 12, с. 38—57.
15. Голубь Н. Н. Оптимальное управление процессом нагрева массивных тел с внутренними источниками тепла.— Автоматика и телемеханика, 1967, № 12, с. 76—86.
16. Григояк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С. Об одной экстремальной задаче термоупругости для бесконечной цилиндрической оболочки.— Докл. АН СССР, 1967, 174, № 3.
17. Григояк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С. Постановка и решение некоторых вариационных задач термоупругости тонких оболочек применительно к выбору оптимальных режимов местной термообработки.— Журн. прикл. механики и техн. физики, 1968, № 4, с. 47—54.
18. Губа В. М., Постольник Ю. С. О критическом состоянии допускаемых параметров нагрева тел простой формы.— Пробл. прочности, 1971, № 8, с. 95—98.
19. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М., Наука, 1965. 287 с.
20. Допустимые температурные напряжения и скорости прогрева (расхолаживания) толстостенных паропроводов / В. М. Вигах, С. В. Фальковский, А. Д. Горешник, Б. В. Машенко. М., Энергия, 1975. 104 с.
21. Захаров Е. С., Фальковский С. В., Вигах В. М. Из опыта монтажа и наладки паропроводов блоков мощностью 150 и 200 МВт. М., БТИ ОРГРЭС, 1964. 36 с.
22. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1964. 487 с.
23. Кеннеди А. Дж. Ползучесть и усталость в металлах. М., Металлургия, 1965. 312 с.
24. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. Киев, Наук. думка, 1970. 307 с.
25. Колаатц Л. Задачи на собственные значения. М., Наука, 1968. 504 с.
26. Колесов В. С., Федик I. I., Чуйко Е. Е. Оптимальные нагревания тела з урахуванням релаксації напружень.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1977, № 8, с. 706—709.
27. Колюдий Б. И. Оптимальный по быстродействию нагрев тонких пластин при ограничениях на температурные напряжения.— Автоматика и телемеханика, 1972, № 12, с. 33—36.
28. Львов А. В. Теория теплопроводности. М., Высш. школа, 1967. 600 с.
29. Маркушевич А. И. Целые функции. М., Наука, 1975. 119 с.
30. Мосленникова Г. Н., Харитонов Ф. Я. Электрокерамика, стойкая к термоударам. М., Энергия, 1977. 193 с.
31. Нормы расчета на прочность элементов реакторов, парогенераторов, сосудов и трубопроводов атомных электростанций, опытных и исследовательских ядерных реакторов и установок. М., Металлургия, 1973. 408 с.
32. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Київ, Вид-во АН УРСР, 1961. 212 с.
33. Підстригач Я. С., Вигах В. М. Про оптимальний режим нагрівання порожнистого циліндра.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1972, № 12, с. 1105—1108.
34. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С., Антипов Е. А. Сопrotивление жаропрочных материалов нестационарным силовым и температурным воздействиям. Киев, Наук. думка, 1974. 200 с.
35. Пляцко Г. В. Нестационарные задачи теплопроводности и термоупругости. Киев, Изд-во АН УССР, 1960. 104 с.
36. Подстригач Я. С., Прокопенко А. Г., Вигах В. М. Нестационарные оптимальные температурные режимы для полого цилиндра.— Прикл. механика, 1972, 8, № 6, с. 23—32.
37. Подстригач Я. С., Вигах В. М. Оптимальные режимы прогрева и расхолаживания паропроводов.— Теплоэнергетика, 1973, № 7, с. 68—73.
38. Подстригач Я. С., Марченко И. С., Бурак Я. И. и др. Определение оптимальных режимов нагрева оболочек кинескопов при откачке для увеличения производительности скачковых железных дорог.— Электрон. техника. Сер. 4. Электровакuum. и газсраязд. приборы, 1975, вып. 2, с. 78—84.
39. Термоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская. Киев, Наук. думка, 1977. 248 с.
40. Похорилер В. Л. Оптимальный режим прогрева деталей энергооборудования с учетом термических напряжений.— Энергомашиностроение, 1972, № 12, с. 29—31.
41. Расулов М. Л. Применение метода контурного интеграла к решению задач для параболических систем второго порядка. М., Наука, 1975. 255 с.
42. Расчет прочности трубопроводов энергоустановок для условий нестационарных температурных режимов / М-во тяжелого, энергет. и транспорт. машиностроения. М., 1974. 81 с.

43. *Тайц Н. Ю.* Технология нагрева стали. М., Metallurgizdat, 1962. 567 с.  
 44. *Токарский Б. Н.* Оптимизация прогрева трубопровода.— Инж. физ. журн., 1969, 16, № 3, с. 489—493.  
 45. *Филимонов Ю. П., Старк С. В., Морозов В. А.* Metallurgическая теплотехника. М., Metallurgiya, 1974. Т. 2. 520 с.  
 46. *Шевелев А. А.* Температурные напряжения в пластине и выбор оптимального режима нагревания.— Инж. физ. журн., 1965, 8, № 1, с. 79—81.  
 47. *Ярема С. Я.* Температурное поле і температурні напруження в барабанах котлів під час пуску і зупинки.— В кн.: Температурні напруження в тонкостінних конструкціях. Київ, 1959, с. 61—100.

Львовский филиал математической  
 физики Института математики  
 АН УССР

Поступила в редколлегию  
 16.09.77

УДК 539.377

**Я. И. Бурак, Н. В. Дацко**

**К ОПТИМИЗАЦИИ УСЛОВИЙ  
 НЕОСЕСИММЕТРИЧНОГО НАГРЕВА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ**

Пусть изотропная цилиндрическая оболочка радиуса  $R$  и длины  $2l$  находится под действием неосесимметричного температурного поля  $t = T_1 + \frac{y}{h} T_2$ . При этом интегральные характеристики температурного поля  $T_1$  и  $T_2$  подчинены условиям

$$a_1 T_1(z, \varphi) = a_2 f_1(z, \varphi), \quad a_3 T_2(z, \varphi) = a_4 f_2(z, \varphi), \quad (1)$$

где  $a_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) — некоторые константы;  $f_i$  ( $i = 1, 2$ ) — заданные функции. В частности, если все  $a_i = 0$  ( $i = \overline{1, 4}$ ), то соотношения (1) превращаются в тождества.

Рассмотрим задачу определения температурных полей и условий закрепления краев, при которых напряженное состояние цилиндрической оболочки является оптимальным. В качестве критерия оптимальности принимаем условие минимума функционала энергии упругой деформации оболочки [1]

$$K = \frac{\pi R}{2Eh} \int_0^{2\pi} \int_{-l}^l \left[ N_1^2 + N_2^2 - 2\nu N_1 N_2 + 4(1 + \nu) S_{12}^2 + \frac{6(1 + \nu)}{h^2} H_{12}^2 + \right. \\ \left. + \frac{3}{h^2} (M_1^2 + M_2^2 - 2\nu M_1 M_2) \right] dz d\varphi. \quad (2)$$

Функции усилий  $N_1, N_2, S_{12}$  и моментов  $M_1, M_2, H_{12}$  удовлетворяют уравнениям равновесия [2]

$$R \frac{\partial N_1}{\partial z} + \frac{\partial S_{12}}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} + R \frac{\partial S_{12}}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial H_{12}}{\partial z} = 0, \\ N_2 - R \frac{\partial^2 M_1}{\partial z^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial^2 H_{12}}{\partial z \partial \varphi} = 0 \quad (3)$$

и определяются через компоненты вектора перемещения  $u, v, w$  и интегральные характеристики  $T_1, T_2$  соотношениями

$$N_1 = \frac{2Eh}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\nu}{R} w \right) - \frac{2\alpha Eh}{1 - \nu} T_1, \\ N_2 = \frac{2Eh}{1 - \nu^2} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} w \right) - \frac{2\alpha Eh}{1 - \nu} T_1, \\ S_{12} = \frac{Eh}{1 - \nu} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad H_{12} = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1 + \nu} \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \varphi} \right), \quad (4)$$