43. *Тайц Н. Ю.* Технология нагрева стали. М., Металлургиздат, 1962. 567 с.
44. *Токарский Б. Н.* Оптимизация прогрева трубопровода.— Инж. физ. журн., 1969, **16**, № 3, с. 489—493.
45. *Филимонов Ю. П., Старк С. В., Морозов В. А.* Металлургическая теплотехника. М., Металлургия, 1974. Т. 2. 520 с.
46. *Шевелев А. А.* Температурные напряжения в пластине и выбор оптимального режима нагревания.— Инж. физ. журн., 1965, **8**, № 1, с. 79—81.
47. *Ярема С. Я.* Температурне поле і температурні напруження в барабанах котлів під час пуску і зупинки.— В кн.: Температурні напруження в тонкостінних конструкціях. Київ, 1959, с. 61—100.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 16.09.77

УДК 539.377

Я. И. Бурак, Н. В. Дацко

К ОПТИМИЗАЦИИ УСЛОВИЙ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОГО НАГРЕВА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Пусть изотропная цилиндрическая оболочка радиуса R и длины $2l$ находится под действием неосесимметричного температурного поля $t = T_1 + \frac{\gamma}{h} T_2$. При этом интегральные характеристики температурного поля T_1 и T_2 подчинены условиям

$$a_1 T_1 (z, \varphi) = a_2 f_1 (z, \varphi), \quad a_3 T_2 (z, \varphi) = a_4 f_2 (z, \varphi), \tag{1}$$

где a_i $(i = \overline{1, 4})$ — некоторые константы; f_i $(i = 1, 2)$ — заданные функции. В частности, если все $a_i = 0$ $(i = \overline{1, 4})$, то соотношения (1) превращаются в тождества.

Рассмотрим задачу определения температурных полей и условий закрепления краев, при которых напряженное состояние цилиндрической оболочки является оптимальным. В качестве критерия оптимальности принимаем условие минимума функционала энергии упругой деформации оболочки [1]

$$K = \frac{\pi R}{2Eh} \int_0^{2\pi} \int_{-l}^{l} \Big[N_1^2 + N_2^2 - 2\nu N_1 N_2 + 4 (1 + \nu) S_{12}^2 + \frac{6 (1 + \nu)}{h^2} H_{12}^2 + $$
$$+ \frac{3}{h^2} (M_1^2 + M_2^2 - 2\nu M_1 M_2) \Big] dz d\varphi. \tag{2}$$

Функции усилий N_1, N_2, S_{12} и моментов M_1, M_2, H_{12} удовлетворяют уравнениям равновесия [2]

$$R \frac{\partial N_1}{\partial z} + \frac{\partial S_{12}}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} + R \frac{\partial S_{12}}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial H_{12}}{\partial z} = 0,$$
$$N_2 - R \frac{\partial^2 M_1}{\partial z^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial^2 H_{12}}{\partial z \partial \varphi} = 0 \tag{3}$$

и определяются через компоненты вектора перемещения u, v, w и интегральные характеристики T_1, T_2 соотношениями

$$N_1 = \frac{2Eh}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\nu}{R} w \right) - \frac{2\alpha Eh}{1 - \nu} T_1,$$
$$N_2 = \frac{2Eh}{1 - \nu^2} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} w \right) - \frac{2\alpha Eh}{1 - \nu} T_1,$$
$$S_{12} = \frac{Eh}{1 - \nu} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad H_{12} = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1 + \nu} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \varphi} \right), \tag{4}$$

$$M_1 = \frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\nu^2}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\nu}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\nu}{R}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) - \frac{2}{3}\frac{\alpha E h^2}{1-\nu}T_2,$$

$$M_2 = \frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\nu^2}\left(-\nu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) - \frac{2}{3}\frac{\alpha E h^2}{1-\nu}T_2,$$

где $2h$ — толщина оболочки; E — модуль упругости; координата γ определяет положение точки на нормали к срединной поверхности; ν — коэффициент Пуассона; α — линейный коэффициент температурного расширения. Учитывая соотношения (4), можно рассматривать энергию упругой деформации оболочки как функционал, определенный на множестве функций $u(z, \varphi)$, $v(z, \varphi)$, $w(z, \varphi)$, $T_1(z, \varphi)$, $T_2(z, \varphi)$.

Сформулированная задача сводится к нахождению экстремалей функционала $K[u, v, w, T_1, T_2]$ на множестве функций u, v, w, T_1, T_2, которые удовлетворяют соотношениям (1), (3) и (4). Используя метод множителей Лагранжа, эту задачу можно свести к оптимизации функционала

$$K_*[u, v, w, T_1, T_2] = \frac{\pi R}{2Eh}\int_0^{2\pi}\int_{-l}^{l}\Big[N_1^2 + N_2^2 - 2\nu N_1 N_2 + 4(1+\nu)S_{12}^2 + \\ + \frac{6(1+\nu)}{h^2}H_{12}^2 + \frac{3}{h^2}(M_1^2 + M_2^2 - 2\nu M_1 M_2) + \\ + \lambda_1(z, \varphi)\left(R\frac{\partial N_1}{\partial z} + \frac{\partial S_{12}}{\partial \varphi}\right) + \lambda_2(z, \varphi)\left(\frac{\partial N_2}{\partial \varphi} + R\frac{\partial S_{12}}{\partial z} + \frac{1}{R}\frac{\partial M_2}{\partial z} + \right. \\ \left. + 2\frac{\partial H_{12}}{\partial z}\right) + \lambda_3(z, \varphi)\left(N_2 - R\frac{\partial^2 M_1}{\partial z^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} - 2\frac{\partial^2 H_{12}}{\partial z \partial \varphi}\right) + \\ + \lambda_4(z, \varphi)(a_1 T_1 - a_2 f_1) + \lambda_5(z, \varphi)(a_3 T_2 - a_4 f_2)\Big]dz d\varphi, \quad (5)$$

где $\lambda_i(z, \varphi)\,(i = \overline{1,5})$ — множители Лагранжа.

Из необходимого условия экстремума функционала K_* получаем систему уравнений Эйлера — Остроградского и экстремальные условия на краях оболочки. Уравнения Эйлера — Остроградского вместе с уравнениями равновесия, условиями (1) и краевыми условиями составляют полную систему соотношений для определения экстремальных температурных полей, условий закрепления краевых сечений и напряженного состояния оболочки. Методику определения оптимальных температурных полей и условий закрепления краев цилиндрической оболочки проиллюстрируем на примерах осесимметричной и плоской задач термоупругости.

Для осесимметричной задачи минимизируемый функционал имеет вид

$$K_*[u, w, T_1, T_2] = \frac{\pi^2 R}{Eh}\int_{-l}^{l}\Big[N_1^2 + N_2^2 - 2\nu N_1 N_2 + \frac{3}{h^2}(M_1^2 + M_2^2 - 2\nu M_1 M_2) + \\ + \lambda_1(z)\frac{dN_1}{dz} + \lambda_2(z)\left(N_2 - R\frac{d^2 M_1}{dz^2}\right) + \lambda_4(z)(a_1 T_1 - a_2 f_1) + \\ + \lambda_5(z)(a_3 T_2 - a_4 f_2)\Big]dz, \quad (6)$$

при этом соотношения (4) записываются так:

$$S_{12} = 0, \quad H_{12} = 0,$$

$$N_1 = \frac{D_0}{1-\nu^2}\left[\frac{du}{dz} + \frac{\nu}{R}w - \alpha(1+\nu)T_1\right],$$

$$N_2 = \frac{D_0}{1-\nu^2}\left[\nu\frac{du}{dz} + \frac{1}{R}w - \alpha(1+\nu)T_1\right], \quad (7)$$

$$M_1 = -D_1\left[\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{(1+\nu)\alpha}{h}T_2\right], \quad M_2 = -D_1\left[\nu\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{(1+\nu)\alpha}{h}T_2\right],$$

где $D_0 = 2Eh$, $D_1 = \frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\nu^2}$.

Из необходимого условия экстремума функционала (6), принимая варьированные значения функций u, w, T_1, T_2 и их производных при $z = \pm l$ произвольными, получаем систему уравнений Эйлера — Пуассона

$$\frac{d^2\lambda_1}{dz^2} - \nu \frac{d\lambda_2}{dz} = 0, \quad \frac{d^4\lambda_2}{dz^4} - \frac{3\nu}{R^2h^2}\frac{d\lambda_1}{dz} + \frac{3}{R^2h^2}\lambda_2 = 0,$$

$$\frac{d\lambda_1}{dz} - \lambda_2 + \frac{a_1(1-\nu)}{\alpha D_0}\lambda_4 = 2(1-\nu)(N_1 + N_2), \tag{8}$$

$$\frac{d^2\lambda_2}{dz^2} + \frac{a_3 h}{D_1 R\alpha(1+\nu)}\lambda_5 = \frac{6(1-\nu)}{Rh^2}(M_1 + M_2)$$

и систему экстремальных краевых условий при $z = \pm l$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \frac{d\lambda_2}{dz} = 0, \quad \frac{d\lambda_1}{dz} = 2(1-\nu^2)N_1,$$
$$\frac{d^3\lambda_2}{dz^3} = \frac{4EhD_1}{R}\frac{dM_1}{dz}, \quad \frac{d^2\lambda_2}{dz^2} = \frac{4EhD_1}{R}M_1. \tag{9}$$

В случае, когда T_1, T_2 — искомые функции ($a_i = 0$, $i = \overline{1, 4}$), из анализа первых двух уравнений (8) и первых трех экстремальных условий (9) получаем

$$N_1 + N_2 = 0, \quad M_1 + M_2 = 0, \quad \lambda_1(z) = 0, \quad \lambda_2(z) = 0. \tag{10}$$

Учитывая (10), при условиях (9) получаем

$$N_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad \frac{dM_1}{dz} = 0 \quad \text{при } z = \pm l, \tag{11}$$

т. е. получаем условия свободного закрепления краев. Из уравнений равновесия и граничных условий следует, что $N_1(z) = 0$, $N_2(z) = 0$. Тогда, решая второе уравнение равновесия при условиях свободных краев, с учетом соотношений (7) и (10) получаем выражения для T_1 и T_2:

$$T_1 = cz + d, \quad T_2 = 0, \tag{12}$$

т. е. получаем температурное поле, при котором напряжения в оболочке равны нулю.

Когда искомой функцией является T_1, а T_2 задано ($a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = a_4 = 1$), получаем аналогичным способом, что оптимальными условиями закрепления краев оболочки являются также условия свободных краев. В этом случае оптимальное температурное поле имеет вид

$$T_1 = \frac{1}{\alpha R}\left\{\left[A - \frac{(1+\nu)\alpha}{h}\int_{-l}^{z} f_2''(\xi)\,d\xi\right]z^3 + \left[B + \frac{(1+\nu)\alpha}{2h}\int_{-l}^{z} f_2''(\xi)\,\xi d\xi\right]z^2 + \right.$$
$$\left. + \left[C - \frac{(1+\nu)\alpha}{2h}\int_{-l}^{z} f_2''(\xi)\,\xi^2 d\xi\right]z + \left[D + \frac{(1+\nu)\alpha}{6h}\int_{-l}^{z} f_2(\xi)\,\xi^3 d\xi\right]\right\},$$

где постоянные A, B, C, D определяются из условий свободного закрепления краев.

В случае плоской задачи, когда напряженное состояние зависит только от кольцевой координаты φ, усилия N_1, N_2, S_{12} и моменты M_1, M_2, H_{12} связаны уравнениями равновесия

$$\frac{dS_{12}}{d\varphi} = 0, \quad \frac{dN_2}{d\varphi} + \frac{1}{R}\frac{dM_2}{d\varphi} = 0, \quad N_2 - \frac{1}{R}\frac{d^2M_2}{d\varphi^2} = 0 \tag{13}$$

и уравнениями неразрывности деформаций в усилиях-моментах

$$\frac{dH_{12}}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d(M_1 - \nu M_2)}{d\varphi} - \frac{h^2}{3R}\frac{d(N_2 - \nu N_1)}{d\varphi} =$$
$$= \frac{2}{3}\alpha E h^2\left(\frac{h}{R}\frac{dT_1}{d\varphi} - \frac{dT_2}{d\varphi}\right), \tag{14}$$

$$M_1 - \nu M_2 + \frac{h^2}{3R}\frac{d^2(N_1 - \nu N_2)}{d\varphi^2} = -\frac{2}{3}\alpha E h^2\left(\frac{h}{R}\frac{d^2T_1}{d\varphi^2} + T_2\right).$$

Сформулированная выше задача сводится к нахождению экстремалей функционала (2) на множестве функций усилий и моментов, которые удовлетворяют уравнениям (13), (14).

Решения системы (13), (14) имеют вид

$$\begin{aligned} &S_{12} = c_1, \quad M_2 = c_2 + c_3\cos\varphi + c_4\sin\varphi, \quad H_{12} = c_5,\\ &N_2 = -\frac{1}{R}(c_3\cos\varphi + c_4\sin\varphi),\\ &N_1 = a\cos\varphi + b\sin\varphi - 2\alpha EhT_1 - \frac{3Rm}{h^2},\\ &M_1 = \nu M_2 + \frac{h^2}{3R}(a\cos\varphi + b\sin\varphi - \nu N_2) - \frac{2\alpha E h^2}{3}T_2, \end{aligned} \tag{15}$$

где c_i $(i = \overline{1, 5})$, a, b, m — некоторые константы.

Если T_1, T_2 — искомые функции, то при решении экстремальной задачи два последних соотношения из (15) можно рассматривать как уравнения для определения температурных полей при известных усилиях и моментах. Функционал энергии упругой деформации с учетом соотношений (15) принимает вид

$$\begin{aligned} K_*[c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, N_1, M_1] = \frac{\pi R l}{Eh}\int_0^{2\pi}\Big[N_1^2 + 4(1+\nu)c_1^2 + \frac{6(1+\nu)}{h^2}c_5^2 +\\ + \frac{1}{R^2}(c_3\cos\varphi + c_4\sin\varphi)^2 + \frac{2\nu}{R}N_1(c_3\cos\varphi + c_4\sin\varphi) -\\ - \frac{6\nu}{h^2}M_1(c_2 + c_3\cos\varphi + c_4\sin\varphi) + \frac{3}{h^2}M_1^2 +\\ + \frac{3}{h^2}(c_2 + c_3\cos\varphi + c_4\sin\varphi)^2\Big]d\varphi. \end{aligned} \tag{16}$$

Из необходимого условия экстремума функционала (16) получаем систему уравнений для определения экстремалей:

$$\begin{aligned} &N_1 = -\frac{\nu}{R}(c_3\cos\varphi + c_4\sin\varphi), \quad M_1 = \nu(c_2 + c_3\cos\varphi + c_4\sin\varphi),\\ &c_3 = \frac{\nu}{\pi}\int_0^{2\pi} M_1\cos\varphi\, d\varphi - \frac{h^2\nu}{3\pi R}\int_0^{2\pi} N_1\cos\varphi\, d\varphi,\\ &c_4 = \frac{\nu}{\pi}\int_0^{2\pi} M_1\sin\varphi\, d\varphi - \frac{h^2\nu}{3\pi R}\int_0^{2\pi} N_1\sin\varphi\, d\varphi,\\ &c_1 = 0, \quad c_5 = 0, \quad c_2 = \frac{\nu}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_1 d\varphi. \end{aligned} \tag{17}$$

Из анализа этой системы и соотношений (15) вытекает, что $N_1 = N_2 = S_{12} = 0$, $M_1 = M_2 = H_{12} = 0$. Из последних двух соотношений (15) определяем соответствующее температурное поле, которое не вызывает напряжений:

$$T_1 = \frac{1}{\alpha D_0}\left(a\cos\varphi + b\sin\varphi - \frac{3R}{h^2}\right), \quad T_2 = \frac{1}{\alpha D_0}(a\cos\varphi + b\sin\varphi).$$

Если температурное поле задано, т. е. заданы функции T_1 и T_2, то два последних соотношения системы (15) служат для определения напряженного состояния оболочки.

Из решения вариационной задачи для этого случая получаем систему соотношений для определения неизвестных параметров c_i ($i = \overline{1, 5}$), a, b, m:

$$a - \frac{\nu}{R} c_3 = \frac{\alpha D_0}{A_0} \int_0^{2\pi} \left(T_1 + \frac{h}{3R} T_2\right) \cos \varphi d\varphi,$$

$$\frac{\nu A_0}{R} a + A_1 c_3 = \frac{D_0 \alpha \nu}{R} \int_0^{2\pi} \left(T_1 + \frac{h}{3R} T_2\right) \cos \varphi d\varphi,$$

$$b + \frac{\nu}{R} c_4 = \frac{D_0 \alpha}{A_0} \int_0^{2\pi} \left(T_1 + \frac{h}{3R} T_2\right) \sin \varphi d\varphi, \tag{18}$$

$$A_1 c_4 + \frac{\nu}{R} A_0 b = \frac{\alpha D_0}{R} \int_0^{2\pi} \left(T_1 + \frac{h\nu}{3R} T_2\right) \sin \varphi d\varphi,$$

$$c_1 = c_2 = c_5 = 0, \quad m = -\frac{\alpha E h^3}{3\pi R} \int_0^{2\pi} T_1 d\varphi,$$

где $A_0 = \pi\left(1 + \frac{h^2}{3R^2}\right)$; $A_1 = \pi\left[\frac{1}{R^2}\left(1 + \frac{h^2\nu^2}{3R^2}\right) + \frac{3(1-\nu^2)}{h^2}\right]$.

Пусть оболочка находится под действием заданного постоянного по толщине температурного поля $t = T_1$ ($a_3 = a_4 = 0$). Рассмотрим задачу об определении температурных перепадов по толщине оболочки — функций T_2, которые минимизируют напряженное состояние. В исследуемом случае последнее соотношение системы (15) рассматриваем как уравнение для определения T_2 при найденных константах c_i ($i = \overline{1, 5}$), a, b, m и функции M_1. Из решения вариационной задачи получаем

$$c_1 = c_5 = 0, \quad m = -\frac{\alpha E h^3}{3\pi R} \int_0^{2\pi} T_1 d\varphi, \quad c_2 = \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_1 \cos \varphi \, d\varphi,$$

$$M_1 = \nu (c_2 + c_3 \cos \varphi + c_4 \sin \varphi),$$

$$\frac{3\pi A_0}{h^2} c_3 + \frac{\nu\pi}{R} a = \frac{\nu \alpha D_0}{R} \int_0^{2\pi} T_1 \cos \varphi d\varphi + \frac{3\nu}{h^2} \int_0^{2\pi} M_1 \cos \varphi d\varphi,$$

$$a + \frac{\nu}{R} c_3 = \frac{D_0 \alpha}{\pi} \int_0^{2\pi} T_1 \cos \varphi d\varphi, \quad b + \frac{\nu}{R} c_4 = \frac{\alpha D_0}{\pi} \int_0^{2\pi} T_1 \sin \varphi d\varphi,$$

$$\frac{3\pi A_0}{h^2} c_4 - \frac{\nu\pi}{R} b = \alpha \nu D_0 \int_0^{2\pi} T_1 \sin \varphi d\varphi + \frac{3\nu}{h^2} \int_0^{2\pi} M_1 \sin \varphi d\varphi.$$

В частности, если $T_1 = t_0 (1 + \cos \varphi)$, то оптимальные перепады температурного поля по толщине оболочки имеют вид

$$T_2 = \frac{2ht_0}{R}\left[1 + \frac{h^2\nu^2}{(1-\nu^2)(h^2 + 3R^2)}\right] \cos \varphi.$$

Аналогично можно найти оптимальные температурные поля при заданной функции перепадов температурного поля по толщине оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурак Я. И., Григолюк Э. И., Подстригач Я. С.* О применении методов вариационного исчисления к решению задач об оптимальном нагреве тонких оболочек.— В кн.: Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. М., 1970, с. 101—109.
2. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках. Київ, Вид-во АН УРСР, 1961. 212 с.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 02.09.77