УДК 539.377 : 621.791.06

Л. П. Беседина

ОПТИМИЗАЦИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К УСЛОВИЯМ ЕЕ СВАРКИ ВДОЛЬ МЕРИДИАНА

Рассмотрим свободную длинную цилиндрическую оболочку радиуса R, толщины $2h$, нагреваемую одновременно по всей длине переменным в кольцевом направлении β изменяющимся во времени t высокоградиентным в области $-\beta_0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0$ постоянным по толщине симметричным относительно сечения $\beta = 0$ температурным полем $T_0(\beta, t)$. Ставим задачу об определении дополнительного к $T_0(\beta, t)$ температурного поля

$$T(\beta, \gamma, t) = T_1(\beta, t) + \frac{\gamma}{h} T_2(\beta, t), \tag{1}$$

которое для заданных в фиксированных сечениях $\beta = \eta_i$ этой области ограничений на температурное поле и напряжения обеспечивает условия упругого деформирования при оптимально низком уровне температурных напряжений. Здесь

$$T_1(\beta, t) = T_0(\beta, t) + T_1^*(\beta, t)\,[S_+(\beta + \beta_1) - S_+(\beta - \beta_1)]; \tag{2}$$

$S_+(\beta)$ — единичная функция скачка. В данном случае оболочка находится в условиях плоской деформации и напряженное состояние ее определяется следующими [4] усилиями N_1, N_2 и моментами M_1, M_2:

$$N_1 = -\alpha D_0\left[T_1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi T_1 d\beta + \frac{2\cos\beta}{\pi(1-\nu)}\int_0^\pi\left(\nu T_1 - \frac{R}{h}T_2\right)\cos\beta d\beta\right],$$

$$N_2 = -\frac{2\alpha D_0}{\pi(1-\nu)}\left(1 + 3\frac{R^2}{h^2}\right)^{-1}\cos\beta\int_0^\pi\left(T_1 - \frac{R}{h}T_2\right)\cos\beta d\beta, \tag{3}$$

$$M_1 = -\frac{\alpha D_0 h}{3}\left(T_2 - \frac{2\cos\beta}{\pi}\int_0^\pi T_2\cos\beta d\beta\right),$$

$$M_2 = \frac{2\alpha D_0 R}{\pi(1-\nu)}\left(1 + 3\frac{R^2}{h^2}\right)^{-1}\cos\beta\int_0^\pi\left(T_1 - \frac{R}{h}T_2\right)\cos\beta d\beta,$$

где $D_0 = 2Eh$; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; α — коэффициент линейного температурного расширения; γ — координата по нормали к срединной поверхности оболочки.

Рассмотрим удельную энергию формоизменения [3] оболочки, которая с учетом тепловой деформации в перпендикулярном к срединной поверхности оболочки направлении представляется в виде

$$U = \frac{ERh}{3(1+\nu)\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\varepsilon_1^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\alpha T_1 + \alpha^2 T_1^2 +$$
$$+ \frac{h^2}{3}\left(\varkappa_1^2 - \varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2^2 - (\varkappa_1 + \varkappa_2)\frac{\alpha}{h}T_2 + \frac{\alpha^2}{h^2}T_2^2\right)\Big]d\beta, \tag{4}$$

где ε_i, $\varkappa_i$ — компоненты деформации срединной поверхности, и является функционалом, заданным на множестве искомых функций $T_1^*(\beta, t)$, $T_2(\beta, t)$. Для их определения решим вариационную задачу [2] минимизации функционала энергии формоизменения (4) на множестве допустимых функций $T_1^*(\beta, t)$, $T_2(\beta, t)$, обеспечивающих условия стационарности следующих функционалов:

$$
\begin{aligned}
G_k[T_1^*] &\equiv \int_{-\beta_1}^{\beta_1} \cos k\beta T_1^*(\beta, t)\, d\beta = A_k, \ k = \overline{0, n}, \\
\Phi_i[T_2] &\equiv \int_{-\pi}^{\pi} \cos i\beta\, T_2(\beta, t)\, d\beta = B_i, \ i = \overline{0, m},
\end{aligned} \tag{5}
$$

где A_k, B_i — некоторые постоянные. Получим

$$
T_1^*(\beta, t) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k(t) \cos k\beta - T_0(\beta, t), \tag{6}
$$

$$
T_2(\beta, t) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i(t) \cos i\beta. \tag{7}
$$

Неизвестные параметры γ_k, λ_i определяются из конкретных условий локального подогрева и ограничений на напряженное состояние в заданных меридиональных сечениях оболочки.

Определим оптимальные дополнительные усредненные по толщине температурные поля $T_1^*(\beta, t)$ подогрева области $-\beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_1$ и перепады температуры $T_2(\beta, t)$ по толщине применительно к условиям сварки стыковым меридиональным швом цилиндрической оболочки.

Пусть сварка находящейся в условиях конвективного теплообмена с окружающей средой цилиндрической оболочки происходит в результате действия на нее в промежутке времени $0 \leqslant t \leqslant t_0$ вдоль меридиана $\beta = 0$ равномерно распределенных по толщине источников тепла постоянной интенсивности. Изменяющееся во времени постоянное по толщине температурное поле $T_0(\beta, t)$, вызванное действием этих источников, следуя работе [5], найдем в виде

$$
\begin{aligned}
T_0(\beta, t) = \frac{T_*}{2\,\mathrm{erf}(\sqrt{\mathrm{Bi}\,\tau_0})} \Big[&-2\,\mathrm{sh}(\sqrt{\mathrm{Bi}}\,|\beta|) + e^{\sqrt{\mathrm{Bi}}\,|\beta|}\,\mathrm{erf}\Big(\frac{|\beta|}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\mathrm{Bi}\,\tau}\Big) - \\
&- e^{-\sqrt{\mathrm{Bi}}\,|\beta|}\,\mathrm{erf}\Big(\frac{|\beta|}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\mathrm{Bi}\,\tau}\Big)\Big] \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant t_0,
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
T_0(\beta, t) = \frac{T_*}{2\,\mathrm{erf}(\sqrt{\mathrm{Bi}\,\tau_0})} \Big\{ e^{-\sqrt{\mathrm{Bi}}\,|\beta|} \Big[\mathrm{erf}\Big(\frac{|\beta|}{2\sqrt{\tau - \tau_0}} - \\
- \sqrt{\mathrm{Bi}(\tau - \tau_0)}\Big) - \mathrm{erf}\Big(\frac{|\beta|}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\mathrm{Bi}\,\tau}\Big)\Big] - e^{\sqrt{\mathrm{Bi}}\,|\beta|} \Big[\mathrm{erf}\Big(\frac{|\beta|}{2\sqrt{\tau - \tau_0}} + \\
+ \sqrt{\mathrm{Bi}(\tau - \tau_0)}\Big) - \mathrm{erf}\Big(\frac{|\beta|}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\mathrm{Bi}\,\tau}\Big)\Big]\Big\} \quad \text{при } t_0 \leqslant t < \infty.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Здесь

$$
\mathrm{erf}\, x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi; \quad \mathrm{Bi} = \frac{kR^2}{\lambda h}; \quad \tau = \frac{\lambda t}{c\rho R^2}; \quad T_* = T_0(0, t_0);
$$

λ — коэффициент теплопроводности; k — коэффициент теплоотдачи поверхности тела; c — теплоемкость единицы массы; ρ — плотность материала.

Соответствующие усредненные по толщине температурные поля $T_1^*(\beta, t)$ подогрева и перепады температуры по толщине определялись для $n = m = 1$ при следующих ограничениях:

$$
\begin{gathered}
T_1^*(0, t) = 0, \ T_1^*(\beta_1, t) = 0, \\
N_2(0, t) = 0, \ M_1(0, t) = 0
\end{gathered} \tag{10}
$$

и для $n = 2$, $m = 1$ при условиях

$$
\begin{gathered}
T_1^*(0, t) = 0, \ T_1^*(\beta_1, t) = 0, \\
N_1(0, t) = 0, \ N_2(0, t) = 0, \ M_1(0, t) = 0.
\end{gathered} \tag{11}
$$

Числовые исследования выполнены для цилиндрической оболочки с $\frac{R}{h} = 30$, $\nu = 0{,}3$ при $\mathrm{Bi} = 3{,}6$, $\tau_0 = \frac{\lambda t_0}{c\rho R^2} = 0{,}1$.

На рис. 1 штрихпунктирными линиями изображены температурные поля сваривания $T_0(\beta, t)$ в моменты времени $\tau = 0{,}01$ (кривые *1*), $\tau = 0{,}1$ (кривые *2*) и $\tau = 0{,}11$ (кривые *3*), сплошными и штриховыми — оптимальные температурные поля $T(\beta, t)$ на внешней $T^{(+)} = T_1 + T_2$ и внутренней $T^{(-)} = T_1 - T_2$ поверхностях оболочки соответственно, причем цифрам *1, 2, 3* отвечают оптимальные температурные поля для моментов времени $\tau = 0{,}01$; $0{,}1$; $0{,}11$ при $\beta_1 = 0{,}6\,\pi$, а цифре *2'* — оптимальные температурные поля для момента времени $\tau = 0{,}1$ при $\beta_1 = \pi$, соответствующие ограничениям (10). Цифрой *2"* отмечены оптимальные температурные поля для момента времени $\tau = 0{,}1$, найденные при ограничениях (11).

На рис. 2 изображены температурные поля подогрева на внешней $T_n^{(+)} = T_1^* + T_2$ (сплошные линии) и внутренней $T_n^{(-)} = T_1^* - T_2$ (штриховые линии) поверхностях оболочки в моменты времени $\tau = 0{,}01$ (кривые *1*), $\tau = 0{,}1$ (кривые *2*), $\tau = 0{,}11$ (кривые *3*) при $\beta_1 = 0{,}6\,\pi$ и ограничениях (10) и осевые напряжения σ (сплошные линии *I, II, III*) в процессе сваривания с подогревом соответственно. Штрихпунктирными линиями *I, II, III* представлены осевые напряжения σ, возникающие в те же моменты времени сваривания без подогрева. Из рисунка видно, что наибольшие осевые напряжения возникают в момент времени $\tau = \tau_0 = 0{,}1$ выключения источников тепла. Кольцевые напряжения практически отсутствуют во всех рассматриваемых случаях.

На рис. 3 проиллюстрированы возникающие в момент вре-

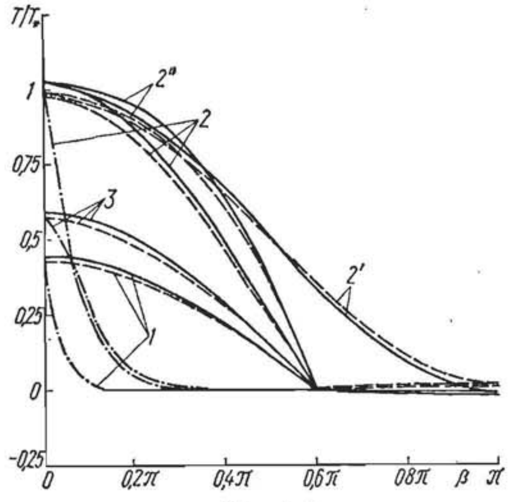

Рис. 1

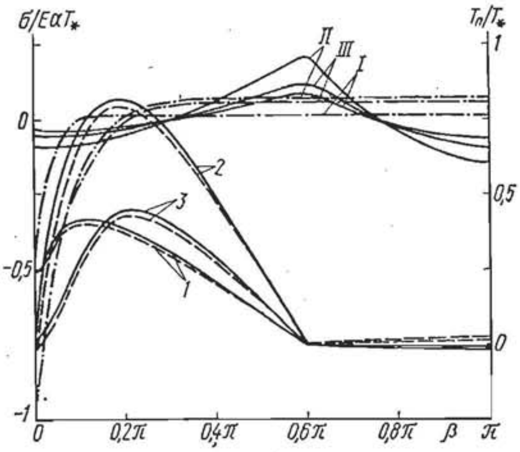

Рис. 2

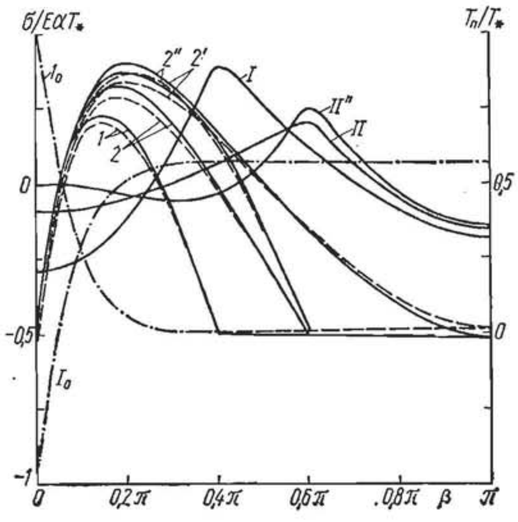

Рис. 3

мени $\tau = 0{,}1$ осевые напряжения (кривая I_0), обусловленные температурным полем сваривания (кривая I_0), осевые напряжения I и II, возникающие в результате сваривания с подогревом температурными полями, определенными соответственно при $\beta_1 = 0{,}4\pi$ (кривые 1), $\beta_1 = 0{,}6\pi$ (кривые 2) и ограничениях (10) и осевые напряжения II'', вызванные свариванием с подогревом температурным полем $2''$ при $\beta_1 = 0{,}6\,\pi$ и ограничениях (11). Указанные температурные поля, а также температурное поле подогрева $2'$, соответствующее $\beta_1 = \pi$ и ограничениям (10), приведены на том же рисунке.

Отметим, что при локальном подогреве с увеличением зоны локального подогрева максимальные осевые напряжения уменьшаются и перемещаются в направлении от шва, а подогрев вдоль всей оболочки температурным полем $2'$ приводит к полному снятию в ней напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла.— Прикл. математика и механика, 1960, 24, № 2, с. 361—363.
2. *Гельфанд М. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961. 228 с.
3. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.—Л., Гостехиздат, 1948. Ч. 1. 376 с.
4. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках. Київ, Наук. думка, 1961. 212 с.
5. *Рыкалин Н. Н.* Тепловые основы сварки. М.—Л., Наука, 1947. Ч. 1. 271 с.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 14.09.77

УДК 539.377

Б. В. Гера

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Цилиндрическая оболочка радиуса R и толщины $2h$, начальная температура которой равна нулю, теплоизолирована со стороны поверхности $\gamma = -h$. Поверхность оболочки $\gamma = h$ за промежуток времени $0 \leqslant \tau' \leqslant \tau_1'$ нагревается до температуры, задаваемой функцией $\tilde{t}_H(\beta)$ (β — угловая координата, $-\pi \leqslant \beta \leqslant \pi$). В дальнейшем при $\tau > \tau_1'$ распределение температуры на поверхности $\gamma = h$ поддерживается таким же. Задача состоит в нахождении функции $\tilde{t}^+(\beta, \tau)$, определяющей режим нагрева поверхности оболочки, при котором динамическое напряженное состояние оболочки оптимально близко к соответствующему ему квазистатическому приближению.

Динамические уравнения термоупругости для цилиндрической оболочки в условиях плоской деформации представим в безразмерном виде [1]

$$\left[c^2(1-l^2)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - (1+l^2)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right]V + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(l^2c^2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + l^2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - 1\right)W + \frac{\partial T_1}{\partial\beta} + l^2\frac{\partial T_2}{\partial\beta} = 0, \tag{1}$$

$$\left[c^2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left(l^2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right) + l^2\frac{\partial^4}{\partial\beta^4} + 1\right]W - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(l^2c^2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + l^2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - 1\right)V + l^2\frac{\partial^2 T_2}{\partial\beta^2} - T_1 = 0.$$

Здесь $V(\beta, \tau) = \dfrac{v(\beta, \tau)}{R}$, $W(\beta, \tau) = \dfrac{w(\beta, \tau)}{R}$, $v(\beta, \tau)$, $w(\beta, \tau)$ — компоненты вектора перемещения точек срединной поверхности; $\tau = \dfrac{\tau'}{\tau_1'}$ — без-