мени $\tau = 0{,}1$ осевые напряжения (кривая I_0), обусловленные температурным полем сваривания (кривая I_0), осевые напряжения I и II, возникающие в результате сваривания с подогревом температурными полями, определенными соответственно при $\beta_1 = 0{,}4\pi$ (кривые I), $\beta_1 = 0{,}6\pi$ (кривые 2) и ограничениях (10) и осевые напряжения II'', вызванные свариванием с подогревом температурным полем $2''$ при $\beta_1 = 0{,}6\,\pi$ и ограничениях (11). Указанные температурные поля, а также температурное поле подогрева $2'$, соответствующее $\beta_1 = \pi$ и ограничениям (10), приведены на том же рисунке.

Отметим, что при локальном подогреве с увеличением зоны локального подогрева максимальные осевые напряжения уменьшаются и перемещаются в направлении от шва, а подогрев вдоль всей оболочки температурным полем $2'$ приводит к полному снятию в ней напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла.— Прикл. математика и механика, 1960, **24**, № 2, с. 361—363.
2. *Гельфанд М. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961. 228 с.
3. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.—Л., Гостехиздат, 1948. Ч. 1. 376 с.
4. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках. Київ, Наук. думка, 1961. 212 с.
5. *Рыкалин Н. Н.* Тепловые основы сварки. М.—Л., Наука, 1947. Ч. 1. 271 с.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 14.09.77

УДК 539.377

Б. В. Гера

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Цилиндрическая оболочка радиуса R и толщины $2h$, начальная температура которой равна нулю, теплоизолирована со стороны поверхности $\gamma = -h$. Поверхность оболочки $\gamma = h$ за промежуток времени $0 \leqslant \tau' \leqslant \tau_1'$ нагревается до температуры, задаваемой функцией $\tilde{t}_H(\beta)$ (β — угловая координата, $-\pi \leqslant \beta \leqslant \pi$). В дальнейшем при $\tau > \tau_1'$ распределение температуры на поверхности $\gamma = h$ поддерживается таким же. Задача состоит в нахождении функции $\tilde{t}^+(\beta, \tau)$, определяющей режим нагрева поверхности оболочки, при котором динамическое напряженное состояние оболочки оптимально близко к соответствующему ему квазистатическому приближению.

Динамические уравнения термоупругости для цилиндрической оболочки в условиях плоской деформации представим в безразмерном виде [1]

$$\left[c^2(1-l^2)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - (1+l^2)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right]V + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(l^2c^2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + l^2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - 1\right)W + \frac{\partial T_1}{\partial\beta} + l^2\frac{\partial T_2}{\partial\beta} = 0, \quad (1)$$

$$\left[c^2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left(l^2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right) + l^2\frac{\partial^4}{\partial\beta^4} + 1\right]W - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(l^2c^2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + l^2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - 1\right)V + l^2\frac{\partial^2 T_2}{\partial\beta^2} - T_1 = 0.$$

Здесь $V(\beta, \tau) = \frac{v(\beta, \tau)}{R}$, $W(\beta, \tau) = \frac{w(\beta, \tau)}{R}$, $v(\beta, \tau)$, $w(\beta, \tau)$ — компоненты вектора перемещения точек срединной поверхности; $\tau = \frac{\tau'}{\tau_1'}$ — безразмерное время; $l^2 = \frac{1}{3}\frac{h^2}{R^2}$; $c = \frac{R}{c_0\tau_1'}$; $c_0^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; ρ — плотность;

$$T_1(\beta, \tau) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} t(\gamma, \beta, \tau)\,d\gamma; \quad T_2(\beta, \tau) = \frac{3R}{2h^3}\int_{-h}^{h} \gamma t(\gamma, \beta, \tau)\,d\gamma;$$

α_t — коэффициент линейного расширения; $t(\gamma, \beta, \tau) = \alpha_t(1+\nu)\tilde{t}(\gamma, \beta, \tau)$; $\tilde{t}(\gamma, \beta, \tau)$ — температура в оболочке.

В квазистатическом приближении уравнения термоупругости запишутся так:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(l^2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - 1\right)W^* - (1+l^2)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}V^* + \frac{\partial T_1}{\partial\beta} + l^2\frac{\partial T_2}{\partial\beta} = 0, \tag{2}$$

$$\left(l^2\frac{\partial^4}{\partial\beta^4} + 1\right)W^* - \frac{o}{\partial\beta}\left(l^2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - 1\right)V^* + l^2\frac{\partial^2 T_2}{\partial\beta^2} - T_1 = 0.$$

Следуя методике работы [1], для рассматриваемых тепловых граничных условий

$$t(h, \beta, \tau) = t^+(\beta, \tau) \text{ и } \frac{\partial t(-h, \beta, \tau)}{\partial\gamma} = 0$$

в приближении линейного распределения температуры по толщине

$$t = T_1 + \frac{\gamma}{R}T_2 \tag{3}$$

имеем уравнения, связывающие T_1, T_2 и t^+:

$$T_1 + \frac{h}{R}T_2 - t^+ = 0, \tag{4}$$

$$\left(3l^2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - a_1\frac{\partial}{\partial\tau}\right)T_1 - \frac{h}{R}\left(l^2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \frac{a_1}{3}\frac{\partial}{\partial\tau} - 1\right)T_2 = 0,$$

где $a_1 = \frac{a^2h^2}{\tau_1'}$; a^2 — коэффициент температуропроводности. За начальные условия при $\tau = 0$ принимаем

$$V = 0,\ W = 0,\ \frac{\partial V}{\partial\tau} = 0,\ \frac{\partial W}{\partial\tau} = 0,\ T_1 = 0. \tag{5}$$

Функция $t^+(\beta, \tau)$ удовлетворяет условиям

$$t^+(\beta, 0) = 0 \text{ и } t^+(\beta, \tau) = t_H(\beta) \text{ при } \tau \geqslant 1, \tag{6}$$

где $t_H(\beta) = \alpha_t(1+\nu)\,\tilde{t}_H(\beta)$ — заданная функция.

Для реализации условий (6) на функцию $t^+(\beta, \tau)$ введем дополнительно ограничения вида

$$\int_0^1 \tau^i t^+(\beta, \tau)\,d\tau = \varkappa^{(i)}(\beta) \quad (i = 0, 1). \tag{7}$$

Здесь $\varkappa^{(i)}(\beta)$ — непрерывные функции, выбор которых связан с удовлетворением равенствам (6).

Функцию управления $t^+(\beta, \tau)$ в области оболочки для $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, которая должна обеспечить оптимальное приближение динамического напряженного состояния оболочки к квазистатическому, находим из условия минимума функционала

$$I = \int_0^{\tau_2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-h}^{h}[(\sigma_{11} - \sigma_{11}^*)^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{22}^*)^2]\,d\gamma d\beta d\tau, \tag{8}$$

где $\tau_2 > 1$; σ_{11}, σ_{22} — динамические, а $\overset{\bullet}{\sigma}_{11}$, $\overset{\bullet}{\sigma}_{22}$ — квазистатические напряжения, вызываемые одним и тем же температурным режимом, которые определяются по формулам

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu\left(\frac{\partial V}{\partial \beta} + W\right) - \nu\frac{\gamma}{R}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} - \frac{\partial V}{\partial \beta}\right) - T_1 - \frac{\gamma}{R}T_2\right], \qquad (9)$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial V}{\partial \beta} + W - \frac{\gamma}{R}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} - \frac{\partial V}{\partial \beta}\right) - T_1 - \frac{\gamma}{R}T_2\right] (-h \leqslant \gamma \leqslant h).$$

Функции $g(\beta) \equiv (t_H, \varkappa^{(i)})$, $f(\beta, \tau) \equiv (t^+, T_1, T_2, W, W^*)$, $p(\beta, \tau) \equiv (V, V^*)$ запишем в виде разложения по тригонометрическим функциям:

$$g(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty}(g_{1k}\cos k\beta + g_{2k}\sin k\beta),$$

$$f(\beta, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty}(f_{1k}(\tau)\cos k\beta + f_{2k}(\tau)\sin k\beta),$$

$$p(\beta, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty}(p_{1k}(\tau)\sin k\beta - p_{2k}(\tau)\cos k\beta).$$

Подставляя эти представления в уравнения (1), (2), (4), условия (5) — (7) и приравнивая выражения при одинаковых гармониках, получаем систему уравнений для коэффициентов разложения

$$\begin{aligned}
\Xi_{jk}^{(1)} &\equiv c^2(1-l^2)\frac{d^2V_{jk}}{d\tau^2} - kl^2c^2\frac{d^2W_{jk}}{d\tau^2} + (1+l^2)k^2V_{jk} + k(1+l^2k^2)W_{jk} - \\
&\quad - kT_{jk}^{(1)} - kl^2T_{jk}^{(2)} = 0,\\
\Xi_{jk}^{(2)} &\equiv c^2(1-l^2k^2)\frac{d^2W_{jk}}{d\tau^2} - c^2l^2k\frac{d^2V_{jk}}{d\tau^2} + k(1+l^2k^2)V_{jk} + (1+l^2k^4)W_{jk} - \\
&\quad - T_{jk}^{(1)} - l^2k^2T_{jk}^{(2)} = 0,\\
\Xi_{jk}^{(3)} &\equiv (1+l^2)k^2V_{jk}^{*} + k(1+l^2k^2)W_{jk}^{*} - kT_{jk}^{(1)} - kl^2T_{jk}^{(2)} = 0,\\
\Xi_{jk}^{(4)} &\equiv k(1+l^2k^2)V_{jk}^{*} + (1+l^2k^4)W_{jk}^{*} - T_{jk}^{(1)} - l^2k^2T_{jk}^{(2)} = 0,\\
\Xi_{jk}^{(5)} &\equiv T_{jk}^{(1)} + \frac{h}{R}T_{jk}^{(2)} - t_{jk}^{+} = 0,\\
\Xi_{jk}^{(6)} &\equiv \frac{a_1}{3}\frac{h}{R}\frac{dT_{jk}^{(2)}}{d\tau} - a_1\frac{dT_{jk}^{(1)}}{d\tau} + \left(1 + l^2k^2\right)\frac{h}{R}T_{jk}^{(2)} - 3l^2k^2T_{jk}^{(1)} = 0
\end{aligned} \qquad (10)$$

при $0 \leqslant \tau \leqslant 1$,

$$\int_0^1 \tau^i t_{jk}^{+}(\tau)\,d\tau = \varkappa_{jk}^{(i)} \quad (i = 0, 1), \qquad (11)$$

$$t_{jk}^{+}(\tau) = t_{jk}^{H} \text{ при } \tau \geqslant 1 \qquad (12)$$

и начальные условия при $\tau = 0$:

$$V_{jk} = 0,\ W_{jk} = 0,\ \frac{dV_{jk}}{d\tau} = 0,\ \frac{dW_{jk}}{d\tau} = 0,\ T_{jk}^{(1)} = 0 \quad (j = 1, 2;\ k = \overline{0, \infty}). \qquad (13)$$

Подставляя в формулу (8) выражения (9) для напряжений и интегрируя по γ и β, получаем

$$I = C\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}[k^2(1+l^2)(V_{jk} - V_{jk}^{*})^2 + 2k(1+k^2l^2)(W_{jk} - W_{jk}^{*}) \times \right.$$

$$\left. \times (V_{jk} - V_{jk}^{*}) + (1+k^4l^2)(W_{jk} - W_{jk}^{*})^2]\,d\tau + \bar{I}(\tau_2, \tilde{V}_{jk}, \tilde{\tilde{V}}_{jk}, \tilde{W}_{jk}, \tilde{\tilde{W}}_{jk}, \tilde{T}_{jk})\right\}.$$

Здесь C — некоторая постоянная; $\tilde{V}_{jk} = V_{jk}(1)$; $\tilde{\tilde{V}}_{jk} = \dfrac{dV_{jk}(1)}{d\tau}$; $\tilde{W}_{jk} = W_{jk}(1)$; $\tilde{\tilde{W}}_{jk} = \dfrac{dW_{jk}(1)}{d\tau}$; $\tilde{T}_{jk} = T_{jk}^{(1)}(1)$.

Задачу на условный экстремум функционала I при условиях (10) — (13), используя метод множителей Лагранжа, сведем к нахождению экстремума функционала

$$I^* = \frac{I}{C} + \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} [\chi_{jk}\Xi_{jk}^{(1)} + \lambda_{jk}\Xi_{jk}^{(2)} + \chi_{jk}^{*}\Xi_{jk}^{(3)} + \right.$$

$$\left. + \lambda_{jk}^{*}\Xi_{jk}^{(4)} + \theta_{jk}^{(1)}\Xi_{jk}^{(5)} + \theta_{jk}^{(2)}\Xi_{jk}^{(6)} + t_{jk}^{+}(\mu_{jk}^{(0)} + \mu_{jk}^{(1)}\tau)] \right\} d\tau,$$

заданного на множестве функций $V_{jk}(\tau)$, $W_{jk}(\tau)$, $V_{jk}^{*}(\tau)$, $W_{jk}^{*}(\tau)$, $T_{jk}^{(1)}(\tau)$, $T_{jk}^{(2)}(\tau)$, $t_{jk}^{+}(\tau)$. Здесь $\chi_{jk}(\tau)$, $\lambda_{jk}(\tau)$, $\chi_{jk}^{*}(\tau)$, $\lambda_{jk}^{*}(\tau)$, $\theta_{jk}^{(1)}(\tau)$, $\theta_{jk}^{(2)}(\tau)$, $\mu_{jk}^{(i)}$ — множители Лагранжа.

Из необходимого условия экстремума функционала I^* получим соответствующие рассматриваемой вариационной задаче уравнения Эйлера для $0 \leqslant \tau \leqslant 1$:

$$\begin{gathered}
c^2(1 - l^2)\frac{d^2\chi_{jk}}{d\tau^2} - c^2 l^2 k \frac{d^2\lambda_{jk}}{d\tau^2} + k^2(1 + l^2)(\chi_{jk} + V_{jk} - V_{jk}^{*}) + \\
+ k(1 + l^2k^2)(\lambda_{jk} + W_{jk} - W_{jk}^{*}) = 0, \\
c^2(1 - l^2k^2)\frac{d^2\lambda_{jk}}{d\tau^2} - kl^2c^2\frac{d^2\chi_{jk}}{d\tau^2} + (1 + l^2k^4)(\lambda_{jk} + W_{jk} - W_{jk}^{*}) + \\
+ k(1 + l^2k^2)(\chi_{jk} + V_{jk} - V_{jk}^{*}) = 0, \\
k^2(1 + l^2)(\chi_{jk}^{*} - V_{jk} + V_{jk}^{*}) + k(1 + l^2k^2)(\lambda_{jk}^{*} - W_{jk} + W_{jk}^{*}) = 0, \\
(1 + l^2k^4)(\lambda_{jk}^{*} - W_{jk} + W_{jk}^{*}) + k(1 + l^2k^2)(\chi_{jk}^{*} - V_{jk} + V_{jk}^{*}) = 0, \\
a_1\frac{d\theta_{jk}^{(2)}}{d\tau} - 3l^2k^2\theta_{jk}^{(2)} + \theta_{jk}^{(1)} - k(\chi_{jk} + \chi_{jk}^{*}) - \lambda_{jk} - \lambda_{jk}^{*} = 0, \\
\frac{a_1}{3}\frac{d\theta_{jk}^{(2)}}{d\tau} - \left(1 + l^2k^2\right)\theta_{jk}^{(2)} - \theta_{jk}^{(1)} + l^2\frac{R}{h}k[k(\lambda_{jk} + \lambda_{jk}^{*}) + \chi_{jk} + \chi_{jk}^{*}] = 0, \\
\theta_{jk}^{(1)} - \mu_{jk}^{(0)} - \mu_{jk}^{(1)}\tau = 0 \quad (j = 1, 2;\ k = \overline{0, \infty})
\end{gathered} \tag{14}$$

и условия в момент времени $\tau = 1$:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\tilde{I}}{\partial\tilde{V}_{jk}} - c^2\tilde{\tilde{\chi}}_{jk} + c^2l^2k\tilde{\tilde{\lambda}}_{jk} = 0, \quad \frac{\partial\tilde{I}}{\partial\tilde{W}_{jk}} - c^2(1 - l^2k^2)\tilde{\tilde{\lambda}}_{jk} = 0, \\
\frac{\partial\tilde{I}}{\partial\tilde{\tilde{V}}_{jk}} + c^2\tilde{\chi}_{jk} - c^2l^2k\tilde{\lambda}_{jk} = 0, \quad \frac{\partial\tilde{I}}{\partial\tilde{\tilde{W}}_{jk}} + c^2(1 - l^2k^2)\tilde{\lambda}_{jk} = 0, \\
\frac{\partial\tilde{I}}{\partial\tilde{T}_{jk}} - \frac{4}{3}a_1\tilde{\theta}_{jk} = 0,
\end{gathered} \tag{15}$$

где обозначено $\tilde{\chi}_{jk} = \chi_{jk}(1)$; $\tilde{\lambda}_{jk} = \lambda_{jk}(1)$; $\tilde{\tilde{\chi}}_{jk} = \dfrac{d\chi_{jk}(1)}{d\tau}$; $\tilde{\tilde{\lambda}}_{jk} = \dfrac{d\lambda_{jk}(1)}{d\tau}$; $\tilde{\theta}_{jk} = \theta_{jk}^{(2)}(1)$.

Решая систему (14) совместно с системой (10) при условиях (11), (12), (15), можно получить коэффициенты разложения функций $t^{+}(\beta, \tau)$ — оптимального режима нагрева и напряженно-деформированного состояния оболочки, соответствующего этому режиму.

Проведем расчет оптимальных режимов нагрева для функций $t_H(\beta) = t_0 = \text{const}$, $t_H(\beta) = t_0(1 + \cos\beta)$. В первом случае за время $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ требуется нагреть цилиндрическую оболочку до постоянной температуры. Тогда все коэффициенты разложения функции $t^+(\beta, \tau)$, кроме первого, при $k = 0$ обращаются в нули, т. е. $t^+ = t_{10}^+(\tau)$.

Численные расчеты выполнены для стальной оболочки с $h = 10^{-4}$ м, $R = 2 \cdot 10^{-2}$ м, $C_0 = 5{,}3 \cdot 10^3$ м/с, $\nu = 0{,}3$, $a^2 = 7{,}7 \cdot 10^{-4}$ с/м² при $\tau_2' =$

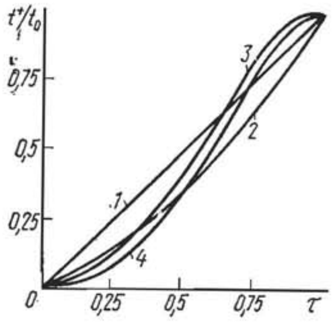

Рис. 1

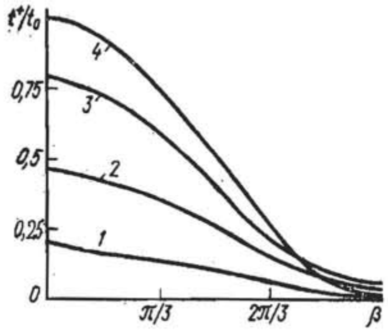

Рис. 2

$= 2\tau_1'$. На рис. 1 изображены графики функции $\frac{t^+(\tau)}{t_0}$ для $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Кривые *1—4* соответствуют $\tau_1' = 10^{-6}$, $3 \cdot 10^{-6}$, $3 \cdot 10^{-5}$, 10^{-4} с.

Численные исследования оптимального режима нагрева во втором случае выполнены для той же оболочки при $\tau_1' = 10^{-4}$ с. На рис. 2 кривые *1—4* характеризуют поведение функции $\frac{t^+(\beta, \tau)}{t_0}$ для значений $\tau = 0{,}4$; $0{,}6$; $0{,}8$; 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках. Київ, Вид-во АН УРСР, 1961. 212 с.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 14.09.77

УДК 539.3

В. А. Осадчук, М. М. Николишин, С. П. Регейло

ВЛИЯНИЕ УПРУГОГО ЗАПОЛНИТЕЛЯ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН

Задача о напряженном состоянии замкнутой цилиндрической оболочки с упругим заполнителем, ослабленной системой параллельных трещин, сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений. При этом упругий заполнитель моделируется основанием Винклера.

Рассмотрим упругое равновесие замкнутой круговой цилиндрической оболочки с упругим заполнителем, срединная поверхность которой отнесена к линиям кривизны α, β. Пусть в этой оболочке имеется система k параллельных периодически расположенных трещин (разрезов) $|\alpha| \leqslant \alpha_0$, $\beta = 2n\frac{\pi}{k}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\frac{k}{2}$ при k четном, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \frac{k-1}{2}$