Как видно из графиков, напряжения $\sigma_{\theta\theta}^{(1)*}$, $\sigma_{\rho\rho}^{*}$ почти для всех случаев δ и a отрицательны, а напряжения $\sigma_{\theta\theta}^{(0)*}$, $\sigma_{\theta\theta}^{*}$ — положительны, причем для одного включения по мере приближения его к границе диска напряжения увеличиваются и достигают максимального значения при $\theta = 0$. Если же в диске имеются два включения, то максимальные значения достигаются при $\theta = 0$, когда включения находятся в непосредственной близости от границы диска. По мере их сближения (т. е. отдаления от границы диска) напряжения уменьшаются в окрестности этой точки и увеличиваются в окрестности точки $\theta = \pi$.

Подсчеты произведены также для большего числа циклически размещенных включений ($n = 3, 4, 5, 6$). Из анализа полученных результатов следует, что с увеличением числа включений напряжения на спае возрастают, а кольцевые напряжения на границе диска имеют колебательный характер, причем с тем большей амплитудой, чем больше n.

На рис. 4 приведены значения напряжений σ_{yy}^{*} на диаметре диска в случае двух включений. Как видно из графика, максимального значения напряжение достигает при приближении включения к границе диска в точке $x = 1$ (кривая *4*).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963. 640 с.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Наука, 1966. 708 с.
3. *Прусов И. А.* Некоторые задачи термоупругости. Минск, Изд-во Белорус. ун-та, 1972. 198 с.
4. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев, Наук. думка, 1968. 888 с.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 10.10. 77

УДК 539.377

М. Г. Кривцун

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫХ ТРЕЩИН ВДОЛЬ ДУГ ЭЛЛИПСОВ

Напряженное состояние плоскости с периодической системой прямолинейных разрезов исследовано в работах [1, 2]. В работе [3] получены интегральные уравнения стационарных задач теплопроводности и термоупругости для бесконечной изотропной плоскости с периодической системой криволинейных разрезов и указан метод их решения численным путем. В настоящей работе исследовано напряженное состояние плоскости с периодической системой теплоизолированных трещин, расположенных вдоль дуг эллипсов, обусловленное возмущением однородного теплового потока q, направленного под углом β к оси Ox. Пусть берега трещин свободны от внешних усилий, а на бесконечности заданы главные значения напряжений $N_1 = p$ и $N_2 = \lambda_p p$. Угол между осью Ox и линией действия напряжений N_1 обозначаем через θ. Температурное поле ищем в виде

$$T(x, y) = 2\,\mathrm{Re}\,F(z),\quad F(z) = \frac{1}{2}qe^{-i\beta}z + \frac{1}{2di}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma(\tau)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi(\tau - z)}{d}\,d\tau, \qquad (1)$$

где d — расстояние между центрами соседних эллипсов (период задачи); τ_1, τ_2 — комплексные координаты вершин трещины, расположенной вдоль дуги эллипса с центром в начале координат, точки которой выражаются через безразмерную угловую координату s соотношением

$$\tau(s) = R\omega(s), \ \omega(s) = (1+m)\cos(\psi+\delta s) + i(1-m)\sin(\psi+\delta s), \qquad (2)$$

где R — положительная действительная постоянная;

$$\psi = \frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}; \quad \delta = \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}; \quad \tau_j = R\left(e^{i\varphi_j} + me^{-i\varphi_j}\right).$$

Функция $\gamma(\tau)$, удовлетворяющая условию $\gamma(\tau_j) = 0$, определяется из интегрального уравнения, которое после замены переменных (2) запишется так:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \gamma'(s)\left[\frac{1}{s-s_0} + K_1(s, s_0)\right] ds = f(s_0), \ s_0 \in [-1, 1], \qquad (3)$$

где

$$K_1(s, s_0) = \operatorname{Re}\{\omega'(s_0)\,Q(s, s_0)\} - \frac{1}{s-s_0}; \quad K_1(s, s) = \operatorname{Re} A(s);$$

$$A(s) = -\frac{\omega''(s)}{2\omega'(s)}; \quad Q(s, s_0) = \frac{\pi}{\varepsilon}\operatorname{ctg}\frac{\pi[\omega(s)-\omega(s_0)]}{\varepsilon}; \quad \varepsilon = \frac{d}{R}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $\int_{-1}^{1} \gamma'(s)\,ds = 0$, определим в виде

$$\gamma'(s) = \frac{\gamma_*(s)}{\sqrt{1-s^2}}, \ \gamma_*(s) \doteq \frac{2}{N}\sum_{\nu=1}^{N} \gamma_\nu \sum_{m=1}^{N-1} T_m(s_\nu)\,T_m(s). \qquad (4)$$

Здесь $T_m(s)$ — полиномы Чебышева первого рода; $s_\nu = \cos\theta_\nu$; $\theta_\nu = \frac{2\nu-1}{2N}\pi$, а постоянные $\gamma_\nu = \gamma_*(s_\nu)$ определяются из системы уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{N} \gamma_\nu \alpha_{\nu m} = f(s_m), \ m = \overline{1, N}, \qquad (5)$$

в которой

$$\alpha_{\nu m} = \frac{1}{N}\left[\frac{\operatorname{ctg}\dfrac{\theta_m + (-1)^{m-\nu}\theta_\nu}{2}}{\sin\theta_m} + K_{1\nu m} - K^*_{1m}\right];$$

$$K_{1\nu m} = K_1(s_\nu, s_m), \ K^*_{1m} = \frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} K_1(s_\nu, s_m).$$

Комплексные потенциалы Колосова — Мусхелишвили ищем в виде

$$\Phi(z) = \frac{p(1+\lambda_p)}{4} + \frac{1}{2d}\int_{\tau_1}^{\tau_2} g'(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\pi(\tau-z)}{d}\,d\tau,$$

$$\Psi(z) = -\frac{p(1-\lambda_p)}{2}e^{-2i\theta} + \frac{1}{2d}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left\{\overline{g'(\tau)}\operatorname{ctg}\frac{\pi(\tau-z)}{d}\,d\bar{\tau} + \right. \qquad (6)$$

$$\left. + g'(\tau)\left[\frac{\pi}{d}(\tau-\bar{\tau}-z)\operatorname{cosec}^2\frac{\pi(\tau-z)}{d} - \operatorname{ctg}\frac{\pi(\tau-z)}{d}\right]d\tau\right\}.$$

Функция $g'(\tau)$ определяется из интегрального уравнения, которое после замены переменных (2) запишется так:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left\{g'(s)\left[\frac{1}{s-s_0} + K_1(s, s_0)\right] + \overline{g'(s)}\,K_2(s, s_0)\right\} ds = \psi(s_0), \ s_0 \in [-1, 1], \qquad (7)$$

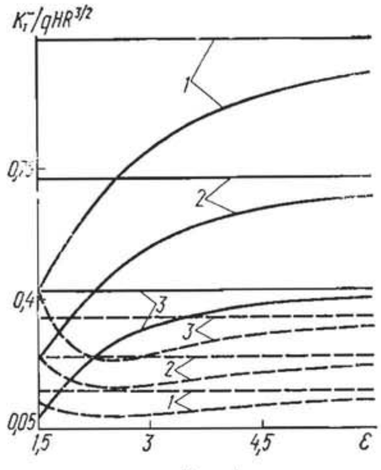

Рис. 1

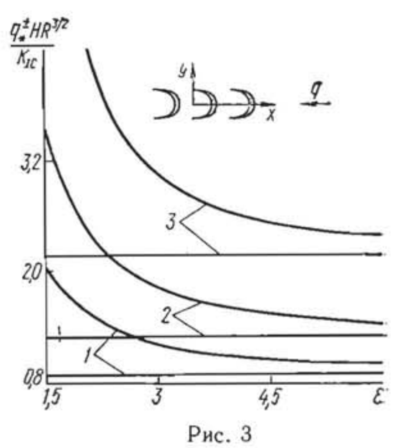

Рис. 3

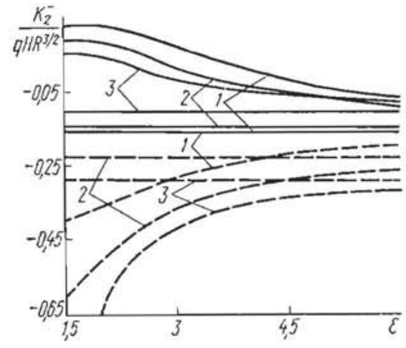

Рис. 2

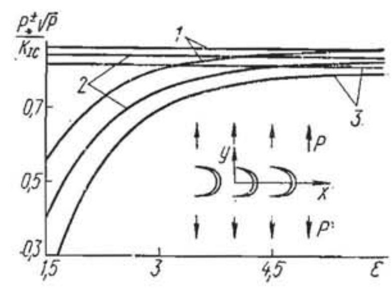

Рис. 4

где

$$K_2(s, s_0) = i\left\{\overline{Q(s, s_0)}\,\mathrm{Im}\,\omega'(s_0) - \overline{\omega'(s_0)}\,\mathrm{Im}\,[\omega(s) - \omega(s_0)]\left[\frac{\pi^2}{\varepsilon^2} + \overline{Q^2(s, s_0)}\right]\right\};$$

$$K_2(s, s) = i\frac{\omega'(s)}{\overline{\omega'(s)}}\,\mathrm{Im}\,A(s);\quad \psi(s) = \frac{pR}{2}\left[(1+\lambda_p)\,\omega'(s) + (1-\lambda_p)\,\overline{\omega'(s)}\,e^{2i\theta}\right].$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} g'(s)\,ds = \Gamma_0$, определим в виде

$$g'(s) = \frac{\mu(s)}{\sqrt{1-s^2}},\ \mu(s) = \Gamma_0 + \frac{2}{N}\sum_{\nu=1}^{N}\mu_\nu\sum_{m=1}^{N-1}T_m(s_\nu)\,T_m(s), \tag{8}$$

где

$$\Gamma_0 = \frac{H}{\pi i}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma'(\tau)\,\tau d\tau = \frac{H}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{N}\tau(s_\nu)\,\gamma_\nu.$$

Система для определения постоянных $\mu_\nu = \mu(s_\nu)$ и соотношения для коэффициентов интенсивности напряжений приведены в работе [3].

На рис. 1—4 приведены некоторые зависимости коэффициентов интенсивности напряжений и предельных значений силовой или температурной нагрузки от безразмерного параметра $\varepsilon = \frac{d}{R}$ для трещин, симметричных относительно оси Ox ($\psi = 0$), с одинаковой длиной дуги πR при значениях параметра эллипса $m = 0;\ 0{,}25;\ 0{,}5$, обозначенных на графиках соответственно *1, 2, 3*. Линии, параллельные оси абсцисс, соответствуют случаю одной трещины ($\varepsilon \to \infty$).

На рис. 1, 2 построены графики k_i^- (в вершине τ_1) для значений угла $\beta = 0$ (сплошные линии) и $\beta = \frac{\pi}{2}$ (штриховые линии). Отметим, что ввиду симметрии $k_1^+(0) = k_1^-(0)$, $k_1^+\left(\frac{\pi}{2}\right) = -k_1^-\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $k_2^+(0) = -k_2^-(0)$, $k_2^+\left(\frac{\pi}{2}\right) = k_2^-\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Коэффициенты интенсивности напряжений при произвольном угле β и фиксированном ε определим как суперпозицию их значений при углах $\beta = 0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$:

$$k_j(\beta) = k_j(0)\cos\beta + k_j\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\beta, \ j = 1, 2. \tag{9}$$

На рис. 3 изображен график предельного значения теплового потока q_* при $\beta = 0$, а на рис. 4 — график предельного значения напряжений p_* при одноосном растяжении $\left(\lambda_p = 0, \ \theta = \frac{\pi}{2}\right)$. Анализ этих двух напряженных состояний, идентичных (в том смысле, что в обоих случаях $k_1^\pm > 0$) по своему воздействию на трещину, позволяет сделать вывод, что при термическом нагружении трещины взаимодействуют сильнее, чем при силовом. Здесь под критерием степени взаимодействия трещин подразумевается то минимальное значение параметра d, при котором предельные нагрузки в теле с одной трещиной и с системой трещин практически совпадают (одинаковое относительное отклонение): чем оно выше, тем сильнее взаимодействие.

Подсчитаны также значения q при $\beta = \frac{\pi}{2}$ и величина p_* при $\lambda_p = 0$, $\theta = 0$. Из анализа полученных результатов можно сделать вывод, что при растяжении или направлении теплового потока вдоль линии расположения трещин прочность тела выше, а при аналогичных воздействиях в направлении, перпендикулярном к указанному, ниже, чем прочность тела с одной трещиной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кит Г. С., Соколовский М. П.* Плоская задача теплопроводности и термоупругости для тела с периодической системой прямолинейных разрезов.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1976, вып. 4, с. 44—51.
2. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев, Наук. думка, 1976. 444 с.
3. *Кривцун М. Г.* Интегральные уравнения теплопроводности и термоупругости для плоскости с периодической системой криволинейных разрезов.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 8, с. 48—53.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 10.11.77

УДК 539.3

Ю. З. Повстенко

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ЭНЕРГИИ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Отличительной особенностью решений задач теории упругости при граничных условиях для механических параметров, учитывающих поверхностные эффекты, является существование в теле напряжений, вызванных неоднородностью распределения поверхностной энергии, при отсутствии внешней