

$$Q_{-\frac{1}{2}}(v) = wK(w), \quad -\frac{\frac{1}{2}v}{\partial R} = -\sqrt{\frac{r}{R}} \frac{1}{R-r} E(w), \quad (13)$$

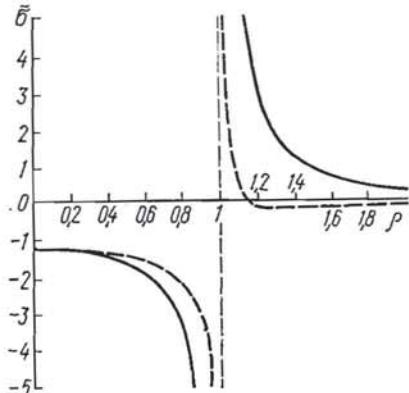
$$v = \frac{r^2 + R^2}{2rR}, \quad w = \frac{2\sqrt{rR}}{r+R}.$$

Напряжения на поверхности полупространства выражаются следующим образом:

$$\sigma_{rr} = 2(\gamma_2 - \gamma_1)[(1-v)C_1 - C_2],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2(\gamma_2 - \gamma_1)[(v-1)C_1 - vC_2],$$

$$C_1 = \frac{1}{\pi r^2} \times \\ \times \left[\frac{r^2 + R^2}{r+R} K(w) - (r+R) E(w) \right], \\ C_2 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{r+R} K(w) + \frac{1}{r-R} E(w) \right].$$



Зависимость безразмерных напряжений $\bar{\sigma}_{rr}$ (сплошная линия) и $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ (штриховая линия) от безразмерного радиуса $\rho = \frac{r}{R}$ при $z = 0$ в случае $v = 0,25$ приведена на рисунке; $\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}R}{\gamma_2 - \gamma_1}$.

Поскольку в окрестности неоднородности распределения поверхностной энергии возникают значительные градиенты напряжений, то при определенных условиях в указанной области может происходить интенсивная миграция различных структурных несовершенств кристаллического строения твердых тел, что может повлиять на протекание физико-механических процессов на поверхности тела.

ЛИТЕРАТУРА

- Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1971. 1108 с.
- Новацкий В. Вопросы термоупругости. М., Изд-во АН СССР, 1962. 364 с.
- Новацкий В. Теория упругости. М., Мир, 1975. 872 с.

Львовский филиал математической
физики Института математики
АН УССР

Поступила в редакцию
19.08.77

УДК 532.72 : 537.22

Б. П. Галапац, Б. М. Гнидец, Б. И. Стаднык, П. Г. Столлярчук

ТЕРМОДИФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ СЛОЕ

При эксплуатации термоэлектрических преобразователей температуры вследствие протекания различных физических процессов изменяются их метрологические свойства. С целью прогнозирования дестабилизации термоэлектрических характеристик в зависимости от рабочей температуры необходимо аналитически исследовать физические процессы, наиболее существенно влияющие на метрологические свойства в условиях эксплуатации. Для вольфрамрениевых термопар таким определяющим процессом является процесс диффузии рения [3].

В настоящей работе исследована диффузия рения с учетом его испарения во внешнюю среду в неоднородно нагретых вольфрамрениевых термоэлектродах, а также влияние процесса диффузии на термо-ЭДС вольфрамрениево-вольфрамрениевой термопары. При этом принимается, что рений дифундирует в виде электронейтрального атома.

Кинетика распределения растворенного вещества в неоднородно нагретом твердом теле определяется из решения системы уравнений [2]

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = D\Delta c + D^T \Delta t, \quad \mu = dc + d_t t, \quad (1)$$

$$\vec{J} = -L_Q T_0^{-1} \operatorname{grad} t - L_\mu \operatorname{grad} \mu$$

при соответствующих граничных и контактных условиях на поверхностях Γ_0 и Γ разделя твердое тело — внешняя среда и контакта разнородных тел. Здесь c , μ , t — отклонения концентрации, химического потенциала растворенного вещества в теле, температуры от их значений C_0 , M_0 , T_0 в исходном состоянии (при $\tau = 0$); \vec{J} — поток массы растворенного вещества; D , D^T — коэффициенты диффузии; d , d_t — концентрационный и температурный коэффициенты изменения химического потенциала; L_Q , L_μ — феноменологические коэффициенты, связанные с коэффициентами диффузии D , D^T соотношениями $L_Q = \rho T_0 \left(D^T - \frac{d_t}{d} D \right)$, $L_\mu = \frac{\rho}{d} D$; ρ — плотность тела.

На основании записанных уравнений исследуем процесс диффузии рения в вольфрамний-вольфрамниевой термопаре, помещенной во внешнюю среду, химический потенциал рения в которой M_c . Физические характеристики термопары будем считать постоянными. Термопару смоделируем слоем толщины h . В начальный момент времени $\tau = 0$ область $x > 0$ слоя характеризуется концентрацией рения C_{01} и химическим потенциалом $M_{01} = M_0 + dC_{01}$, а область $x < 0$ — концентрацией C_{02} и химическим потенциалом $M_{02} = M_0 + dC_{02}$, где M_0 — химический потенциал рения в беспримесном вольфраме.

Пусть для $\tau > 0$ области слоя нагреты по закону

$$t^{(k)} = t_1 \left[1 + (-1)^k \frac{x}{l} \right] U(l - |x|), \quad k = 1, 2, \quad (2)$$

где $t_1 = T_1 - T_0$; T_1 — температура слоя в сечении $x = 0$; $U(x)$ — симметричная единичная функция.

Для моментов времени $\tau > 0$ поля концентрации удовлетворяют уравнениям (1), которые с учетом (2) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial c^{(k)}}{\partial \tau} &= D \left(\frac{\partial^2 c^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c^{(k)}}{\partial y^2} \right), \quad \mu^{(k)} = dc^{(k)} + d_t t^{(k)}, \\ \vec{J}^{(k)} &= -L_Q T_0^{-1} \operatorname{grad} t^{(k)} - L_\mu \operatorname{grad} \mu^{(k)}, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

начальным ($\tau = 0$)

$$c^{(k)} = 0, \quad (4)$$

граничным ($y = 0$, $y = h$)

$$M^{(k)} \equiv \mu^{(k)} + M_{0k} = M_c \quad (5)$$

и контактным ($x = 0$)

$$J_x^{(1)} = J_x^{(2)}, \quad \mu^{(1)} + M_{01} = \mu^{(2)} + M_{02} \quad (6)$$

условиям. Решение уравнений (3) в трансформантах Лапласа, удовлетворяющее условиям (4) — (6), запишется так:

$$\begin{aligned} \bar{c}^{(k)} &= \sum_{n=1}^{\infty} [(a_{kn} - b_{kn}) \varepsilon_n^{-2} + A_{kn} e^{\varepsilon_n |x|} + B_{kn} e^{-\varepsilon_n |x|}] \sin \frac{\pi n}{h} y + \\ &+ d^{-1} s^{-1} (M_c - M_0 - dC_{0k} - d_t t^{(k)}), \quad 0 \leq |x| \leq l, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\bar{c}^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{kn} \varepsilon_n^{-2} + D_{kn} e^{-\varepsilon_n |x|}) \sin \frac{\pi n}{h} y + d^{-1} s^{-1} (M_c - M_0 - dC_{0k}), \quad |x| \geq l,$$

где s — параметр преобразования Лапласа; $\bar{c}^{(k)} = \int_0^\infty c^{(k)} e^{-s\tau} d\tau$ — преобразование Лапласа функции $c^{(k)}$;

$$\begin{aligned} a_{kn} &= 2(\pi dDn)^{-1} [1 - (-1)^n] (M_c - M_0 - dC_{0k}); \\ b_{kn} &= 2(\pi dDn)^{-1} [1 - (-1)^n] d_t t^{(k)}; \quad \varepsilon_n^2 = \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2 + sD^{-1}; \\ A_{kn} &= t_1 (\pi \ln \varepsilon_n)^{-1} [1 - (-1)^n] [d_t d^{-1} D^{-1} \varepsilon_n^{-2} + s^{-1} (D^{-1} D^T - d_t d^{-1})] e^{-\varepsilon_n l}; \\ B_{kn} &= A_{kn} (1 - 2e^{\varepsilon_n l}) + (-1)^k (\pi Dn)^{-1} \varepsilon_n^{-2} [1 - (-1)^n] (C_{01} - C_{02}); \\ D_{kn} &= A_{kn} (e^{2\varepsilon_n l} + 1 - 2e^{\varepsilon_n l}) + (-1)^k (\pi Dn)^{-1} \varepsilon_n^{-2} [1 - (-1)^n] (C_{01} - C_{02}), \\ k &= 1, 2. \end{aligned}$$

Переходя к оригиналам, получаем

$$\begin{aligned} C^{(k)} &\equiv c^{(k)} + C_{0k} = \sum_{n=1}^{\infty} (\pi n)^{-1} [1 - (-1)^n] \left[\left[2d^{-1} (M_0 - M_c) + 2d_t d^{-1} t_1 \times \right. \right. \\ &\times \left(1 - \frac{|x|}{l} \right) + t_1 d_t (dl)^{-1} \left(2 \sqrt{\frac{\tau D}{\pi}} (e^{-\frac{(l-|x|)^2}{4\tau D}} + e^{-\frac{(l+|x|)^2}{4\tau D}} - 2e^{-\frac{x^2}{4\tau D}}) - \right. \\ &- (l - |x|) \operatorname{erfc} \frac{l - |x|}{2\sqrt{\tau D}} - \operatorname{erfc} \frac{l + |x|}{2\sqrt{\tau D}} + 2|x| \operatorname{erfc} \frac{|x|}{2\sqrt{\tau D}} + \\ &\left. \left. + (-1)^k (C_{01} - C_{02}) \operatorname{erfc} \frac{|x|}{2\sqrt{\tau D}} \right] e^{-\left(\frac{\pi n}{h}\right)^2 \tau D} + \right. \\ &+ ht_1 (2\pi \ln)^{-1} (D^{-1} D^T - d_t d^{-1}) \left[e^{-\frac{(l-|x|)^2}{h}} \operatorname{erfc} \left(\frac{l - |x|}{2\sqrt{\tau D}} - \frac{\pi n}{h} \sqrt{\tau D} \right) - \right. \\ &- e^{\frac{(l-|x|)^2}{h}} \operatorname{erfc} \left(\frac{l - |x|}{2\sqrt{\tau D}} + \frac{\pi n}{h} \sqrt{\tau D} \right) + e^{\frac{(l+|x|)^2}{h}} \times \\ &\times \operatorname{erfc} \left(\frac{l + |x|}{2\sqrt{\tau D}} - \frac{\pi n}{h} \sqrt{\tau D} \right) - e^{\frac{(l+|x|)^2}{h}} \operatorname{erfc} \left(\frac{l + |x|}{2\sqrt{\tau D}} + \frac{\pi n}{h} \sqrt{\tau D} \right) - \\ &- 2e^{-\frac{\pi n}{h} |x|} \operatorname{erfc} \left(\frac{|x|}{2\sqrt{\tau D}} - \frac{\pi n}{h} \sqrt{\tau D} \right) + 2e^{\frac{\pi n}{h} |x|} \operatorname{erfc} \left(\frac{|x|}{2\sqrt{\tau D}} + \frac{\pi n}{h} \sqrt{\tau D} \right) \left. \right] \times \\ &\times \sin \frac{\pi n}{h} y + d^{-1} \left[M_c - M_0 - d_t t_1 \left(1 - \frac{|x|}{l} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

для $0 \leq |x| \leq l$;

$$\begin{aligned} C^{(k)} &\equiv c^{(k)} + C_{0k} = \sum_{n=1}^{\infty} (\pi n)^{-1} [1 - (-1)^n] \left[\left[2d^{-1} (M_0 - M_c) + 2C_{0k} + \right. \right. \\ &+ t_1 d_t (dl)^{-1} \left(2 \sqrt{\frac{\tau D}{\pi}} (e^{-\frac{(|x|-l)^2}{4\tau D}} + e^{-\frac{(|x|+l)^2}{4\tau D}} - 2e^{-\frac{x^2}{4\tau D}}) - \right. \\ &- (|x| - l) \operatorname{erfc} \frac{|x| - l}{2\sqrt{\tau D}} - (|x| + l) \operatorname{erfc} \frac{|x| + l}{2\sqrt{\tau D}} + 2|x| \operatorname{erfc} \frac{|x|}{2\sqrt{\tau D}} \right) + \\ &+ (-1)^k (C_{01} - C_{02}) \operatorname{erfc} \frac{|x|}{2\sqrt{\tau D}} \left. \right] e^{-\left(\frac{\pi n}{h}\right)^2 \tau D} + t_1 h (2\pi \ln)^{-1} (D^{-1} D^T - \\ &- d_t d^{-1}) \left[e^{-\frac{(|x|-l)^2}{h}} \operatorname{erfc} \left(\frac{|x| - l}{2\sqrt{\tau D}} - \frac{\pi n}{h} \sqrt{\tau D} \right) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -e^{\frac{(|x|-l)}{h} \frac{\pi n}{h}} \operatorname{erfc} \left(\frac{|x|-l}{2\sqrt{\tau D}} + \frac{\pi n}{h} \sqrt{\tau D} \right) + e^{-\frac{(|x|-l)}{h} \frac{\pi n}{h}} \operatorname{erfc} \left(\frac{|x|+l}{2\sqrt{\tau D}} - \right. \\
& \left. - \frac{\pi n}{h} \sqrt{\tau D} \right) - e^{\frac{(|x|+l)}{h} \frac{\pi n}{h}} \operatorname{erfc} \left(\frac{|x|+l}{2\sqrt{\tau D}} + \frac{\pi n}{h} \sqrt{\tau D} \right) - \\
& - 2e^{-\frac{|x|}{h} \frac{\pi n}{h}} \operatorname{erfc} \left(\frac{|x|}{2\sqrt{\tau D}} - \frac{\pi n}{h} \sqrt{\tau D} \right) + 2e^{\frac{|x|}{h} \frac{\pi n}{h}} \operatorname{erfc} \left(\frac{|x|}{2\sqrt{\tau D}} + \right. \\
& \left. + \frac{\pi n}{h} \sqrt{\tau D} \right) \Big] \sin \frac{\pi n}{h} y + d^{-1} (M_c - M_0)
\end{aligned} \quad (9)$$

для $|x| \geq l$

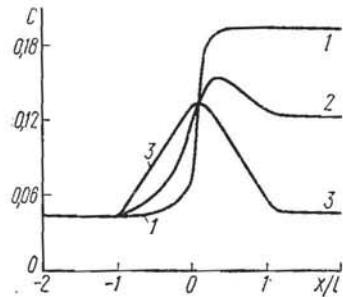


Рис. 1

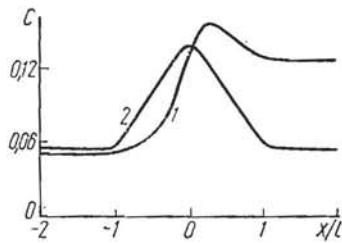


Рис. 2

В случае массоизолированного слоя, нагреветого по закону (2), распределение концентрации рения по длине слоя для произвольного момента времени определяется формулой

$$\begin{aligned}
C^{(k)} = C_{0k} + t_1 l^{-1} D^T \sqrt{\frac{\tau}{D}} \left[i \operatorname{erfc} \frac{l+|x|}{2\sqrt{\tau D}} - 2i \operatorname{erfc} \frac{|x|}{2\sqrt{\tau D}} + \right. \\
\left. + i \operatorname{erfc} \frac{|l+(-1)^k x|}{2\sqrt{\tau D}} \right] - 0,5 (-1)^k (C_{01} - C_{02}) \operatorname{erfc} \frac{|x|}{2\sqrt{\tau D}}, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \quad (10)$$

Здесь введено обозначение $i \operatorname{erfc} x = \int_x^\infty \operatorname{erfc} \zeta d\zeta$.

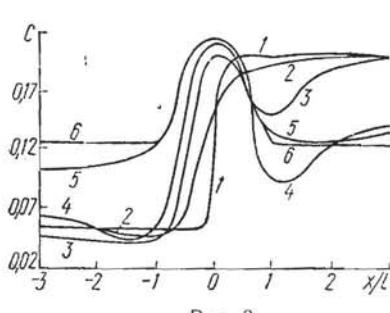


Рис. 3

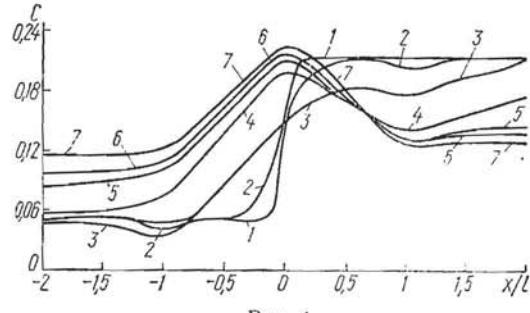


Рис. 4

Результаты числовых исследований приведены в виде графиков. Распределение концентрации рения в слое, испаряющем рений, иллюстрируют рис. 1, 2, а в массоизолированном слое — рис. 3, 4.

При вычислениях концентрации рения с учетом испарения принималось $h = 10^{-3}$ м; $l = 4 \cdot 10^{-3}$ м; $t_1 = 2,5 \cdot 10^3$ К; $C_{01} = 0,2$; $C_{02} = 0,05$; $d = 10^6$ кг⁻¹ · Дж; $d_t = -36$ кг · К⁻¹; $D^T = -10^{-14}$ м² · с⁻¹ · К⁻¹ и $D = 2,5 \cdot 10^{-14} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ или $D = 2,5 \cdot 10^{-10}$ м² · с⁻¹ (см. рис. 1 или рис. 2

соответственно). Изменение концентрации рения по длине слоя при $\frac{y}{h} = 0,5$ для $\tau = 3,6 \cdot 10^5; 3,6 \cdot 10^6; 3,6 \cdot 10^7$ с (кривые 1—3) показано на рис. 1, а для $\tau = 3,6 \cdot 10^2; 3,6 \cdot 10^3$ с (кривые 1, 2) на рис. 2. Слой помещен в среду, химический потенциал рения в которой равен химическому потенциальному рения в растворе W Re 5, поддерживаемом при однородной температуре T_0 , т. е. $M_c = M_0 + 0,05d$.

При вычислениях концентрации рения в массоизолированном слое принималось $t_1 = 2,5 \cdot 10^3$ К; $C_{01} = 0,2$; $C_{02} = 0,05$; $D^T = -10^{-14}$ м²·с⁻¹ × × К⁻¹; $D = 2,5 \cdot 10^{-10}$ м²·с⁻¹ и $l = 4 \cdot 10^{-3}$ м или $l = 8 \cdot 10^{-3}$ м (см. рис. 3 или рис. 4 соответственно). При этом распределение концентрации рения по длине слоя для моментов времени $\tau = 3,6 \cdot 10^2; 3,6 \cdot 10^3; 3,6 \times 10^4; 3,6 \cdot 10^5; 3,6 \cdot 10^6; 3,6 \cdot 10^7$ с иллюстрируют кривые 1—6 на рис. 3, а для моментов времени $\tau = 3,6 \cdot 10^2; 3,6 \cdot 10^3; 3,6 \cdot 10^4; 3,6 \cdot 10^5; 1,8 \cdot 10^6; 3,6 \cdot 10^6; 3,6 \cdot 10^7$ с — кривые 1—7 на рис. 4.

Из графиков видно, что процесс выравнивания концентрации рения в горячей зоне ускоряется испарением рения во внешнюю среду и при прочих равных условиях существенно зависит от величины коэффициента D и ширины области нагрева l .

Из полученных результатов следует, что при выравнивании концентрации рения в определенный момент времени τ_* в окрестности поверхности контакта $x = 0$ появляется область (3) — $l_1(\tau) \leq x \leq l_2(\tau)$ с симметричным распределением рения относительно поверхности контакта. Толщина области (3) возрастает со временем. Появление области (3) и увеличение ее толщины существенно ускоряется испарением рения во внешнюю среду.

Так как время релаксации процесса диффузии значительно больше времени релаксации процессов теплопроводности и электропроводности, то можно с достаточной точностью предположить, что в произвольный момент времени плотность \vec{j} электрического тока в неоднородно нагретой разомкнутой термопаре равна нулю, т. е.

$$\vec{j} = -\lambda_k \operatorname{grad}(\psi^{(k)} + \Phi^{(k)}) - \eta_k \operatorname{grad} t^{(k)} \equiv 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Здесь $\psi^{(k)}$ — потенциал напряженности электрического поля в области (k) ; $\Phi^{(k)}$ — термодинамический электрический потенциал тела k ; λ_k — коэффициент электропроводности области (k) ; η_k — коэффициент, характеризующий термоэлектрические явления в области (k) . Отметим, что определение и физическое содержание электрического потенциала $\Phi^{(k)}$, а также плотности электрического тока $\vec{j}^{(k)}$ дано в работе [1].

В дальнейшем будем считать коэффициенты λ_k, η_k постоянными. При этом из условия (11) находим

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= -\Phi^{(1)} - \eta_1 \lambda_1^{-1} t^{(1)} + C_1, \\ \psi^{(2)} &= -\Phi^{(2)} - \eta_2 \lambda_2^{-1} t^{(2)} + C_2, \\ \psi^{(3)} &= -\Phi^{(3)} - \eta_3 \lambda_3^{-1} t^{(3)} + C_3, \end{aligned} \quad (12)$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные; $t^{(3)} = t^{(1)}U(x) + t^{(2)}U(-x)$.

Термо-ЭДС, возникающая между точками M_1 и M_2 поверхности неоднородно нагретого слоя вне зоны нагрева, определяется формулой

$$\mathcal{E}_{M_1 M_2} = \psi^{(1)}(M_1) - \psi^{(2)}(M_2). \quad (13)$$

Учитывая, что на поверхностях $y = 0, h$ слоя, помещенного в неэлектропроводную неполяризованный среду, $\Phi^{(k)} = 0$, и используя выражения (12), соотношение (13) приводим к виду

$$\mathcal{E}_{M_1 M_2} = C_1 - C_2. \quad (14)$$

Из условий непрерывности потенциалов $\psi^{(k)}$, $\Phi^{(k)}$ на поверхностях $x = \pm l_1$

$$\begin{aligned} -t_1\eta_3\lambda_3^{-1}(1-l_1l^{-1})+C_3 &= -t_1\eta_1\lambda_1^{-1}(1-l_1l^{-1})+C_1, \\ -t_1\eta_2\lambda_2^{-1}(1-l_1l^{-1})+C_2 &= -t_1\eta_3\lambda_3^{-1}(1-l_1l^{-1})+C_3 \end{aligned} \quad (15)$$

находим

$$C_1 - C_2 = t_1(1 - l_1l^{-1})(\eta_1\lambda_1^{-1} - \eta_2\lambda_2^{-1}). \quad (16)$$

Таким образом, в произвольный момент времени

$$\mathcal{E}_{M_1 M_2}(\tau) = t_1(1 - l_1(\tau)l^{-1})(\eta_1\lambda_1^{-1} - \eta_2\lambda_2^{-1}). \quad (17)$$

Отметим, что в начальный момент времени ($\tau = 0$) $l_1 = 0$ и

$$\mathcal{E}_{M_1 M_2}(\tau = 0) = t_1(\eta_1\lambda_1^{-1} - \eta_2\lambda_2^{-1}).$$

Значения величин $l_1(\tau)l^{-1}$ для различных моментов времени определяются по известному распределению концентрации растворенного вещества.

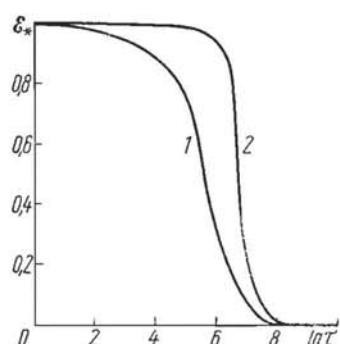


Рис. 5

Изменение во времени относительной термо-ЭДС $\mathcal{E}_* = \frac{\mathcal{E}_{M_1 M_2}(\tau)}{\mathcal{E}_{M_1 M_2}(\tau = 0)}$ массоизолированной вольфрамрений-вольфрамрениевой термопары при максимальном коэффициенте диффузии рения в вольфраме иллюстрирует рис. 5. При этом кривая 1 соответствует случаю, когда ширина зоны нагрева $l = 4 \cdot 10^{-3}$ м, а кривая 2 — когда ширина зоны нагрева $l = 8 \cdot 10^{-3}$ м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурак Я. И., Галапац Б. П., Подстригач Я. С. Исходные уравнения теории деформации неполяризованных электропроводных твердых тел.— В кн.: Избранные проблемы прикладной механики. М., 1974, с. 167—178.
2. Подстригач Я. С., Павлина В. С. Дифференциальные уравнения термодинамических процессов в n -компонентном твердом растворе.— Физ.-хим. механика материалов, 1965, № 4, с. 383—389.
3. Датчики для измерения температуры в промышленности / Г. В. Самсонов, А. И. Киц, О. А. Кюздени, В. И. Лах, И. Ф. Паляныця, Б. И. Стадник. Киев, Наук. думка, 1972. 224 с.

Львовский филиал математической
физики Института математики АН УССР,
НПО «Термоприбор»

Поступила в редакцию
15.11.77

УДК 534.141;16 : 539.3

А. П. Поддубняк

ЭХО-СИГНАЛ ОТ УПРУГОЙ СФЕРЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ОСТРОНАПРАВЛЕННОГО ЗВУКОВОГО ИМПУЛЬСА

Постановка задачи. Пусть в акустической невязкой сжимаемой среде находится упругая полая сфера, заполненная сжимаемой невязкой жидкостью. Предположим, что на сферу набегает зондирующий импульс, возбужденный преобразователем остронаправленного действия, размещенным на значительном расстоянии от исследуемого объекта. Рассмотрим случай, когда преобразователь имеет характеристику направленности в виде тела вращения, ось которого совпадает с акустической осью системы [3]