

Ю. Д. Зозуляк, Е. А. Вдович

ОПТИМИЗАЦИЯ ИМПУЛЬСА ПАДАЮЩЕЙ ВОЛНЫ
В СИСТЕМЕ АКУСТИЧЕСКАЯ СРЕДА — УПРУГИЙ СЛОЙ

Пусть упругий слой $-h \leq z \leq h$ (среда 2) контактирует со стороны плоско-параллельных границ $z = \pm h$ с акустической средой, характеристики которой для $z > h$ (среда 1) равны ρ_1, c_1 , а для $z < -h$ (среда 3) — ρ_3, c_3 (ρ_i, c_i — плотность и скорость звука в i -й среде). Из среды 1 нормально к поверхности $z = h$ падает плоский зондирующий импульс продолжительности t_1 , который достигает поверхности $z = h$ в момент времени $t = 0$.

Задача определения дифракционной волны при заданном падающем импульсе сводится к решению системы волновых уравнений

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \xi^2} - \kappa_i^2 \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \tau^2} = 0 \quad (i = \overline{1, 3}) \quad (1)$$

с условиями сопряжения на границах раздела

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \tau^2} = m_1 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \tau^2} \quad \text{при } \xi = 1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial \tau^2} = m_3 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \tau^2} \quad \text{при } \xi = -1, \quad (3)$$

условиями затухания на бесконечности

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \Phi_1 = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \Phi_3 = 0, \quad (4)$$

и начальными условиями

$$\Phi_i(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial \Phi_i(\xi, 0)}{\partial \tau} = 0. \quad (5)$$

Здесь $\xi = \frac{z}{h}$, $\tau = \frac{c_2 t}{h}$; $\kappa_1 = \frac{c_2}{c_1}$, $\kappa_2 = 1$, $\kappa_3 = \frac{c_2}{c_3}$, $m_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1}$, $m_3 = \frac{\rho_2}{\rho_3}$, Φ_i — скалярные потенциалы перемещений в i -й среде.

Потенциал Φ_1 представим в виде суммы двух составляющих $\Phi_1 = \Phi_1^1 + \Phi_1^2$, где $\Phi_1^1 \equiv F[\kappa_1^{-1}\tau - (1 - \xi)]$ — скалярный потенциал перемещений падающей волны; Φ_1^2 — скалярный потенциал перемещений дифракционной волны. Функция F — решение уравнения (1) при $i = 1$ и отлична от нуля для положительных значений аргумента. Применяя преобразование Лапласа, контактную задачу (1) — (5) можно привести к следующей краевой для области упругого слоя [1]:

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}_2}{d\xi^2} - s^2 \bar{\Phi}_2 = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d\bar{\Phi}_2}{d\xi} + \kappa_1 m_1 s \bar{\Phi}_2 = \frac{d\bar{F}}{d\xi} + \kappa_1 s \bar{F} \quad \text{при } \xi = 1, \quad (7)$$

$$\frac{d\bar{\Phi}_2}{d\xi} - \kappa_3 m_3 s \bar{\Phi}_2 = 0 \quad \text{при } \xi = -1, \quad (8)$$

где $\bar{\Phi}_2, \bar{F}$ — трансформанты потенциалов Φ_2, F . Решение задачи (6) — (8) после выполнения обратного преобразования Лапласа запишется так:

$$\Phi_2 = 2Q\kappa_1 \sum_{n=0}^{\infty} N^n \{F[\kappa_1^{-1}(\tau - (1 - \xi) - 4n)] - MF[\kappa_1^{-1}(\tau - (3 + \xi) - 4n)]\}. \quad (9)$$

Здесь введены следующие обозначения: $N = \frac{B}{A}$; $M = \frac{D}{C}$; $Q = \frac{C}{A}$, $A = (\kappa_1 m_1 + 1)(\kappa_3 m_3 + 1)$, $B = (\kappa_1 m_1 - 1)(\kappa_3 m_3 - 1)$, $C = \kappa_3 m_3 + 1$, $D =$

$= \kappa_3 m_3 - 1$. Потенциал перемещений дифракционной волны Φ_1^2 определяется по найденному решению (9) и условиям сопряжения (2) в виде

$$\Phi_1^2 = 2Q\kappa_1 m_1 \sum_{n=0}^{\infty} N^n \{F[\kappa_1^{-1}(\tau - \kappa_1(\xi - 1) - 4n)] - MF[\kappa_1^{-1}(\tau - \kappa_1(\xi - 1) - 4(n+1))]\} - F[\kappa_1^{-1}(\tau - \kappa_1(\xi - 1))]. \quad (10)$$

Найдем такой оптимальный закон изменения импульса падающей волны, определяемой функцией F , который обеспечивает на границе $\xi = 1 + 0$ максимальную энергию дифракционной волны. В связи с этим в качестве критерия оптимальности примем условие минимума разности энергий падающей и отраженной волн при $\xi = 1 + 0$:

$$J = \frac{\beta \rho_1^2 c_2^4}{2h^4} \int_0^{\tau_1} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi_1^1}{\partial \tau^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \Phi_1^2}{\partial \tau^2} \right)^2 \right] d\tau, \quad (11)$$

где β — сжимаемость акустической среды 1. Задачу будем решать для случая, когда суммарное давление в падающей волне за время τ_1 равно P_0 , т. е.

$$P_0 = -\frac{\rho_1 c_2^4}{h^2} \int_0^{\tau_1} \frac{\partial^2 \Phi_1^1}{\partial \tau^2} d\tau. \quad (12)$$

На границе упругого слоя $\xi = 1$ выражения для потенциалов падающего импульса и дифракционной волны будут такими:

$$\Phi_1^1 = F(\kappa_1^{-1}\tau) S_+(\tau), \quad (13)$$

$$\Phi_1^2 = KF(\kappa_1^{-1}\tau) S_+(\tau) + L \sum_{n=0}^{k-1} N^n F[\kappa_1^{-1}(\tau - 4(n+1))] S_+[\tau - 4(n+1)], \quad (14)$$

где $S_+(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau > 0, \\ 0 & \text{при } \tau \leq 0; \end{cases}$ $k = E\left(\frac{\tau_1}{4}\right)$; $K = 2Q\kappa_1 m_1 - 1$;

$$L = 2Q\kappa_1 m_1 (N - M).$$

Подставляя выражения (13), (14) в функционал (11) и принимая варьируемые значения функции F и ее производных при $\tau = \tau_1$ произвольными, из необходимого условия экстремума получаем дифференциально-разностное уравнение Эйлера

$$\left\{ \frac{d^4}{d\tau^4} [F(\kappa_1^{-1}\tau) S_+(\tau)] \right\} \left\{ 1 - K^2 - LK \sum_{n=0}^{k-1} N^n S_+[\tau_1 - 4(n+1) - \tau] \right\} - L \sum_{n=0}^{k-1} N^n \left\langle \frac{d^4}{d\tau^4} [F[\kappa_1^{-1}(\tau - 4(n+1))] S_+[\tau - 4(n+1)]] \right\rangle \times \left\{ K + L \sum_{n=0}^{k-1} N^n S_+[\tau_1 - 4(n+1) - \tau] \right\} = 0 \quad (15)$$

и экстремальное условие при $\tau = \tau_1$:

$$\frac{d^2 \Phi_1^1}{d\tau^2} \delta \frac{d\Phi_1^1}{d\tau} - \frac{d^3 \Phi_1^1}{d\tau^3} \delta \Phi_1^1 - \frac{d^2 \Phi_1^2}{d\tau^2} \delta \frac{d\Phi_1^2}{d\tau} + \frac{d^3 \Phi_1^2}{d\tau^3} \delta \Phi_1^2 = 0. \quad (16)$$

Следовательно, решение экстремальной задачи сводится к определению из уравнения (15) функции управления F , удовлетворяющей условиям (5),

(12) и (16). Уравнение (15) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^4 f}{d\tau^4} = & - \sum_{n=0}^{k-1} N^n \left\{ \sum_{i=0}^3 L_i \left[K A_n^i \frac{d^i \delta [\tau_1 - 4(n+1) - \tau]}{d\tau^i} + \right. \right. \\ & \left. \left. + L B_n^i \sum_{l=0}^n \frac{d^i \delta [\tau_1 - 4(n-l+1) - \tau]}{d\tau^i} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f = & F(\kappa_1^{-1} \tau) S_+(\tau) \left\{ 1 - K^2 - LK \sum_{n=0}^{k-1} N^n S_+[\tau_1 - 4(n+1) - \tau] \right\} - \\ & - L \sum_{n=0}^{k-1} N^n \left\{ KF[\kappa_1^{-1}(\tau - 4(n+1))] S_+[\tau - 4(n+1)] + L \times \right. \\ & \times \left. \sum_{l=0}^n F[\kappa_1^{-1}(\tau - 4(l+1))] S_+[\tau_1 - 4(n-2l) - \tau] \right\}; \\ A_n^i = & \frac{d^{(3-i)}}{d\tau^{(3-i)}} \{ F[\kappa_1^{-1}(\tau_1 - 4(n+1))] S_+[\tau_1 - 4(n+1)] \}; \\ B_n^i = & \frac{d^{(3-i)}}{d\tau^{(3-i)}} \{ F[\kappa_1^{-1}(\tau_1 - 4(n+2))] S_+[\tau_1 - 4(n+2)] \}; \\ L_0 = & L_3 = L; \quad L_1 = L_2 = 3L. \end{aligned}$$

Решение уравнения (17) при $n = 0$ будет таким:

$$\begin{aligned} F(\kappa_1^{-1} \tau) [(1 - K^2) S_+(\tau) - LK S_+(\tau_1 - 4 - \tau)] - LF[\kappa_1^{-1}(\tau - 4)] \times \\ \times [KS_+(\tau - 4) + LS_+(\tau_1 - \tau)] = - \sum_{i=0}^3 \{ [L_i (KA_0^i + LB_0^i) \times \\ \times (\tau_1 - 4 - \tau)^{3-i}] S_+(\tau_1 - 4 - \tau) - d_i \tau^i \}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $L_0 = \frac{1}{6} L$; $L_1 = \frac{3}{2} L$.

Для падающего звукового импульса продолжительности $0 < \tau_1 \leq 4$ функция управления F определяется следующим полиномом:

$$F = a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + a_3 \tau^3 \quad (0 \leq \tau \leq \tau_1), \quad (19)$$

где коэффициенты a_i ($i = \overline{0, 3}$) находятся из условий (5), (12), (16). Скалярные потенциалы перемещений падающей и геометрически отраженной волн согласно (13), (14) представляются формулами

$$F \equiv \Phi_1^1 = - \frac{P_0 h^2}{2\rho_1 c_2^2 \tau_1} \tau^2, \quad \Phi_1^2 = - K \Phi_1^1. \quad (20)$$

Переходя, согласно [2], от скалярных потенциалов к давлению, получаем, что для рассматриваемого случая оптимальным падающим импульсом будет импульс постоянной интенсивности $P_1^1 = \frac{P_0}{\tau_1}$.

Для нормального зондирующего импульса продолжительности $4 < \tau_1 \leq 8$ функция F имеет вид

$$F = \sum_{i=0}^3 \tau^i [a_i S_+(4 - \tau) + b_i S_+(\tau - 4)], \quad (21)$$

где коэффициенты a_i , b_i определяются из условий (5), (12), (16) и условий сопряжения

$$\frac{d^i F(4 - 0)}{d\tau^i} = \frac{d^i F(4 + 0)}{d\tau^i} \quad (i = \overline{0, 3}). \quad (22)$$

Оптимальное давление в падающем импульсе в этом случае изменяется по линейному закону и определяется формулой

$$\mathcal{P}_1^1 = \frac{2P_0(T_1 - 3T_2\tau)}{\tau_1(2T_1 - 3T_2\tau_1)} \quad (0 \leq \tau \leq \tau_1). \quad (23)$$

Здесь

$$T_1 = [1 - (K + L)^2] \tau_1^3 + 24L(K + L) \tau_1^2 - 48L(3L + K) \tau_1 + 128L(2L - K);$$

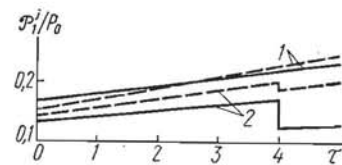
$$T_2 = 8L(K + L)(\tau_1 - 4).$$

Давление в дифракционной волне будет таким:

$$\mathcal{P}_1^2 = \frac{2P_0}{\tau_1(2T_1 - 3T_2\tau_1)} \{K(T_1 - 3T_2\tau) S_+(4 - \tau) + [(K + L)T_1 + 12LT_2 - 3(K + L)T_2\tau] S_+(\tau - 4)\}. \quad (24)$$

В момент времени $\tau = 4$ дифракционная волна имеет скачок, который соответствует наложению на геометрически отраженную волну первой волны, излученной упругим слоем.

В качестве примера рассматривалась система, когда акустической средой является вода, а упругий слой изготовлен из стали или алюминия. Для зондирующего импульса продолжительности $0 < \tau_1 \leq 4$ давление в геометрически отраженной волне от стального слоя будет $P_1^2 \simeq 0,927 \frac{P_0}{\tau_1}$, от слоя, изготовленного из алюминия, $P_1^2 \simeq 0,802 \frac{P_0}{\tau_1}$. На рисунке приведено оптимальное распределение давления в падающем импульсе (1) и в дифракционной волне (2) для зондирующего импульса продолжительности $\tau_1 = 5$. Штриховые линии соответствуют случаю стального слоя, сплошные — случаю слоя, изготовленного из алюминия.



ЛИТЕРАТУРА

1. Підстригач Я. С. Про один випадок ускладнення граничних умов в задачах гідропружності. — Допов. АН УРСР, 1975, № 3, с. 235—238.
2. Скучик Е. Основы акустики. М., Мир, 1976. Т. 2. 541 с.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 22.08.77

УДК 533.6.013.42

Р. А. Марчук

КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СОПРИКАСАЮЩЕЙСЯ С ЖИДКОСТЬЮ

Рассмотрим свободные осесимметричные колебания замкнутой цилиндрической оболочки длины l_0 и толщины $2h$, контактирующей с невязкой сжимаемой жидкостью. Края оболочки шарнирно опираются на жесткие плоские диафрагмы. Жидкость заполняет полость между оболочкой радиуса R_1 и соосной жесткой цилиндрической стенкой радиуса R_2 ($R_2 \geq R_1$). Верхний край оболочки совпадает со свободной поверхностью жидкости, а нижний — с дном полости. Движение жидкости опишем потенциалом скоростей, удовлетворяющим волновому уравнению, а движения оболочки из ортотропного материала — уравнениями, учитывающими деформации поперечного сдвига и силы инерции вращения [5].