

Оптимальное давление в падающем импульсе в этом случае изменяется по линейному закону и определяется формулой

$$\mathcal{P}_1^1 = \frac{2P_0(T_1 - 3T_2\tau)}{\tau_1(2T_1 - 3T_2\tau_1)} \quad (0 \leq \tau \leq \tau_1). \quad (23)$$

Здесь

$$T_1 = [1 - (K + L)^2] \tau_1^3 + 24L(K + L) \tau_1^2 - 48L(3L + K) \tau_1 + 128L(2L - K);$$

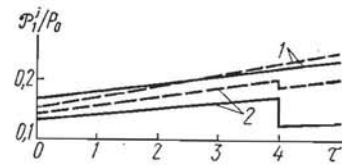
$$T_2 = 8L(K + L)(\tau_1 - 4).$$

Давление в дифракционной волне будет таким:

$$\mathcal{P}_1^2 = \frac{2P_0}{\tau_1(2T_1 - 3T_2\tau_1)} \{K(T_1 - 3T_2\tau) S_+(4 - \tau) + [(K + L)T_1 + 12LT_2 - 3(K + L)T_2\tau] S_+(\tau - 4)\}. \quad (24)$$

В момент времени $\tau = 4$ дифракционная волна имеет скачок, который соответствует наложению на геометрически отраженную волну первой волны, излученной упругим слоем.

В качестве примера рассматривалась система, когда акустической средой является вода, а упругий слой изготовлен из стали или алюминия. Для зондирующего импульса продолжительности $0 < \tau_1 \leq 4$ давление в геометрически отраженной волне от стального слоя будет $P_1^2 \simeq 0,927 \frac{P_0}{\tau_1}$, от слоя, изготовленного из алюминия, $P_1^2 \simeq 0,802 \frac{P_0}{\tau_1}$. На рисунке приведено оптимальное распределение давления в падающем импульсе (1) и в дифракционной волне (2) для зондирующего импульса продолжительности $\tau_1 = 5$. Штриховые линии соответствуют случаю стального слоя, сплошные — случаю слоя, изготовленного из алюминия.



ЛИТЕРАТУРА

1. Підстригач Я. С. Про один випадок ускладнення граничних умов в задачах гідропружності. — Допов. АН УРСР, 1975, № 3, с. 235—238.
2. Скучик Е. Основы акустики. М., Мир, 1976. Т. 2. 541 с.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 22.08.77

УДК 533.6.013.42

Р. А. Марчук

КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СОПРИКАСАЮЩЕЙСЯ С ЖИДКОСТЬЮ

Рассмотрим свободные осесимметричные колебания замкнутой цилиндрической оболочки длины l_0 и толщины $2h$, контактирующей с невязкой сжимаемой жидкостью. Края оболочки шарнирно опираются на жесткие плоские диафрагмы. Жидкость заполняет полость между оболочкой радиуса R_1 и соосной жесткой цилиндрической стенкой радиуса R_2 ($R_2 \geq R_1$). Верхний край оболочки совпадает со свободной поверхностью жидкости, а нижний — с дном полости. Движение жидкости опишем потенциалом скоростей, удовлетворяющим волновому уравнению, а движения оболочки из ортотропного материала — уравнениями, учитывающими деформации поперечного сдвига и силы инерции вращения [5].

Решение для безразмерного радиального перемещения w точек оболочки и безразмерного потенциала скоростей φ ищем в виде [5]

$$w = g(t) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin s_n x, \quad \varphi = \dot{g}(t) [\psi_1(x, r) + \psi_2(x, r)], \quad (1)$$

где $s_n = \frac{\pi n}{l}$; $l = \frac{l_0}{R_1}$. Здесь и в дальнейшем все обозначения, а также исходные уравнения и граничные условия взяты из работы [5]. В указанной работе предполагалось, что величины

$$\beta_n^2 = s_n^2 - \omega^2 = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - \omega^2, \quad \delta_i^2 = \varepsilon_i^2 - \omega^2 \quad (2)$$

принимают только положительные значения. Предлагаемое здесь решение расширено на случай любых действительных значений β_n^2, δ_i^2 .

При решении задачи функции ψ_1, ψ_2 имеют вид

$$\psi_1 = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(s_n x) \Phi_0(\beta_n r) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2a_n s_n \sin(\omega t)}{\omega \beta_n^2 (\alpha^2 - 1) \cos(\omega l)}, \quad (3)$$

$$\psi_2 = \sum_{i=1}^{\infty} b_i F(x) \xi_i(r),$$

где

$$\Phi_0(\beta_n r) = \frac{1}{\beta_n} \frac{K_0(\beta_n r) J_1(\beta_n \alpha) + K_1(\beta_n \alpha) I_0(\beta_n r)}{K_1(\beta_n) I_1(\beta_n \alpha) - K_1(\beta_n \alpha) I_1(\beta_n)} \quad (\beta_n^2 > 0);$$

$$\Phi_0(\beta_n r) = \frac{1}{\bar{\beta}_n} \frac{J_1(\bar{\beta}_n \alpha) Y_0(\bar{\beta}_n r) - Y_1(\bar{\beta}_n \alpha) J_0(\bar{\beta}_n r)}{J_1(\bar{\beta}_n \alpha) Y_1(\bar{\beta}_n) - Y_1(\bar{\beta}_n \alpha) J_1(\bar{\beta}_n)} \quad (\beta_n^2 < 0);$$

$$F(x) = \frac{\text{sh}(\delta_i x)}{\delta_i \text{ch}(\delta_i l)} \quad (\delta_i^2 > 0);$$

$$F(x) = \frac{\sin(\bar{\delta}_i x)}{\bar{\delta}_i \cos(\bar{\delta}_i l)} \quad (\delta_i^2 < 0);$$

$$\bar{\beta}_n^2 = -\beta_n^2 = \omega^2 - s_n^2; \quad \bar{\delta}_i^2 = -\delta_i^2 = \omega^2 - \varepsilon_i^2; \quad \omega = \frac{\lambda}{\mu}; \quad \mu = \frac{c_0}{c_1};$$

$$\xi_i(r) = m_i H_i(r) = m_i [\gamma_i J_0(\varepsilon_i r) + Y_0(\varepsilon_i r)]; \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1};$$

$$m_i = \{\pi [\alpha^2 H_i^2(\varepsilon_i \alpha) - H_i^2(\varepsilon_i)]\}^{-\frac{1}{2}}; \quad \xi_i(1) = [\xi_i(r)]_{r=1};$$

$$b_i = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha_n s_n \xi_i(1)}{\beta_n^2 + \varepsilon_i^2}; \quad c_1^2 = \frac{E_1}{\rho(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \quad \lambda = \frac{R_1}{c_1} \lambda_1;$$

λ, λ_1 — безразмерная и размерная частоты; $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}$ — модули Юнга и коэффициенты Пуассона ортотропного материала; ρ_0, ρ_1 — плотность жидкости и материала оболочки соответственно; c_0 — акустическая скорость звука в жидкости; J_n, Y_n, I_n, K_n — функции Бесселя действительного и мнимого аргумента. Модулем сдвига G_{13} учитывается анизотропия упругих свойств материала оболочки в направлении нормали. Постоянные ε_i, γ_i определяются из соотношений

$$\gamma_i = - \frac{Y_1(\varepsilon_i \alpha)}{J_1(\varepsilon_i \alpha)} = - \frac{Y_1(\varepsilon_i)}{J_1(\varepsilon_i)}. \quad (4)$$

Задача об определении форм и частот собственных колебаний цилиндрической оболочки, взаимодействующей с жидкостью, методом Бубнова —

Галеркина сводится к решению системы трансцендентных уравнений

$$la_s B_{1s} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+s} a_n s_n \left\{ B_2 \frac{\lg(\omega l)}{\omega \beta_n^2 \beta_s^2 (\alpha^2 - 1)} + \right. \\ \left. + \pi s_s \sum_{i=1}^{\infty} B_{3i} \frac{\xi_i^2(l) F(l)}{(\beta_n^2 + \varepsilon_i^2)(s_s^2 + \delta_i^2)} \right\} = 0 \quad (s, n = 1, 2, 3, \dots), \quad (5)$$

где

$$\beta_s^2 = s_s^2 - \omega^2; \quad s_s = \frac{\pi s}{l}; \quad F(l) = [F(x)]_{x=l}; \quad \Phi_0(\beta_s) = [\Phi_0(\beta_s r)]_{r=1};$$

$$B_{1s} = Q_1 - Q_2 s_s^2 + Q_3 s_s^4 - Q_4 s_s^6 + \Phi_0(\beta_s) [Q_6 - Q_5 s_s^2 + Q_7 s_s^4].$$

Остальные обозначения формулы (5) совпадают с обозначениями работы [5].

Соотношения (5) представляют собой бесконечную систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_n и безразмерной частоты λ . Последняя сумма в соотношении (5) появляется вследствие наличия функции ψ_2 в представлении (1), т. е. благодаря более точному удовлетворению граничного условия на нижнем крае оболочки. Пренебрегая в (5) членами, соответствующими деформациям поперечного сдвига и силам инерции вращения, а также сжимаемости жидкости, в случае изотропной оболочки получаем результат работы [4].

Решение задачи о собственных колебаниях оболочки, полностью заполненной жидкостью, при отсутствии ограничивающей стенки ($\alpha = 0$) найдем, если положим в соотношении (3)

$$\Phi_6(\beta_n r) = \frac{1}{\beta_n} \frac{I_1(\beta_n r)}{I_1(\beta_n)} \quad (\beta_n^2 > 0),$$

$$\Phi_0(\beta_n r) = -\frac{1}{\beta_n} \frac{J_0(\beta_n r)}{J_1(\beta_n)} \quad (\beta_n^2 < 0),$$

$$\xi_i(r) = m_i H_i(r) = m_i J_0(\varepsilon_i r),$$

где величины ε_i являются корнями уравнения $J_1(\varepsilon_i) = 0$.

Решение задачи исследовалось численными методами. Характеристики форм колебаний a_n нормированы так, что $a_1 = 1$. Расчеты производились для изотропной ($\nu_{12} = \nu_{21} = \nu = 0,3$; $E_1 = 2,6G_{13}$; $m = \frac{E_2}{E_1} = 1$) и для ортотропной ($m = 0,5$; $\nu_{12} = 0,3$; $\nu_{21} = 0,15$; $E_1 = 40G_{13}$) оболочек при таких общих данных: $\alpha = \frac{R_2}{R_1} = 0,5$; $l = \frac{l_0}{R_1} = 4$; $\mu = \frac{c_0}{c_1} = 0,5$; $k_0 = \frac{2h}{R_1} = 0,125$; $k' = \frac{5}{6}$; $\frac{\rho_0}{\rho_1} = 2\sqrt{3}\delta = \frac{1}{7,8}$. При этом последней суммой в системе уравнений (5) пренебрегали.

Таблица 1

N	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
1	0,213	—	—	—	—	0,777	—
3	0,214	0,426	0,538	—	—	0,779	—
5	0,215	0,425	0,537	0,613	0,684	0,780	—
10	0,215	0,425	0,537	0,613	0,684	0,780	0,845

В табл. 1 приведены безразмерные значения собственных частот λ для ортотропной оболочки, взаимодействующей со сжимаемой жидкостью. Значения λ вычислялись в интервале от нуля до единицы при различном количестве N усеченных уравнений системы (5). С увеличением количества уравнений увеличивается число частот в исследуемом интервале. При этом

оказывается, что число полуволн по длине оболочки для любой частоты, полученной при решении N уравнений, не больше величины N .

Коэффициенты a_n ряда (1) для первой собственной частоты при различных N представлены в табл. 2, из которой видно, что значения a_n быстро убывают. Из расчетов видно, что для получения первой частоты с достаточной точностью можно ограничиться одним уравнением.

Таблица 2

a_n	N			
	1	3	5	10
ω	0,213	0,214	0,215	0,215
a_1	1	1	1	1
$a_2 \times 10^4$	—	—282	—282	—282
$a_3 \times 10^4$	—	59,5	58,9	58,9
$a_4 \times 10^4$	—	—	—17,7	—17,7
$a_5 \times 10^4$	—	—	4,47	6,63
$a_6 \times 10^4$	—	—	—	—2,50
$a_7 \times 10^4$	—	—	—	1,07
$a_8 \times 10^4$	—	—	—	—0,496
$a_9 \times 10^4$	—	—	—	0,243
$a_{10} \times 10^4$	—	—	—	0,103

Влияние изменения величины параметров, характеризующих физические и геометрические свойства оболочки и жидкости, на собственные частоты системы показано в табл. 3. При расчетах учитывались пять уравнений усеченной системы (5). Пять первых частот, записанных в первой строке табл. 3, получены для ортотропной оболочки, взаимодействующей с жидкостью, при описанных выше исходных данных. В последующих стро-

Таблица 3

№ п.п.	Измененный параметр	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
1	—	0,215	0,425	0,537	0,613	0,684
2	$l = 2$	0,394	0,608	0,761	0,934	1,126
3	$\psi_2 \neq 0$	0,213	0,419	0,526	0,603	0,677
4	$l = 2; \psi_2 \neq 0$	0,387	0,593	0,747	0,923	1,114
5	$\alpha = 0,75$	0,186	0,366	0,493	0,583	0,664
6	$\frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial t^2} = 0$	0,215	0,425	0,537	0,614	0,686
7	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	0,210	0,427	0,541	0,615	0,685
8	$\mu = 0,75$	0,246	0,432	0,544	0,618	0,688
9	$\mu = \infty$	0,376	0,548	0,621	0,691	0,751
10	$\frac{\rho_0}{\rho_1} = 0,28$	0,330	0,445	0,528	0,605	0,678
11	$k_0 = 0,28$	0,251	0,525	0,664	0,773	0,822
12	$\nu_{21} = 0,3$	0,212	0,414	0,523	0,610	0,668
13	$E_1 = 2,6G_{13}$	0,215	0,428	0,541	0,613	0,698
14	$m = 1$	0,249	0,561	0,714	0,772	0,816
15	Изотропная оболочка	0,247	0,556	0,704	0,769	0,814

ках приведены частоты, полученные при изменении одного из параметров, в то время как остальные параметры остаются без изменения. В последней строке таблицы записаны частоты для случая, когда оболочка является изотропной. Из этой таблицы видно, что влияние точности удовлетворения граничных условий при низких частотах больше сказывается для коротких оболочек, чем для длинных. Существенное влияние на собственные частоты

оказывает толщина слоя жидкости между оболочкой и жесткой цилиндрической стенкой, причем ее увеличение ведет к возрастанию всех исследуемых частот. Для первой частоты этот результат был получен в работе [1]. Влияние продольной инерции $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ на низшие частоты значительно, а влияние инерции вращения $\frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial t^2}$ — несущественно, что согласуется с результатами работы [6], полученными для изотропного цилиндрического бака, заполненного жидкостью.

В последних строках табл. 3 показано влияние безразмерной плотности жидкости $\frac{\rho_0}{\rho_1}$, относительной толщины оболочки $k_0 = \frac{2h}{R_1}$, коэффициента Пуассона ν_{21} и величины отношения модулей $\frac{E_1}{G_{13}}$, $m = \frac{E_2}{E_1}$ ортотропного материала. Существенное влияние оказывают параметры k_0, m , возрастание которых ведет к увеличению собственных частот. Относительная плотность $\frac{\rho_0}{\rho_1}$ заметно изменяет только первую частоту. К аналогичным выводам пришли авторы работы [8], в которой исследовалось влияние толщины изотропной оболочки на первую собственную частоту.

Полученные результаты могут быть расширены для оболочки, частично заполненной ($R_2 < R_1$) либо частично окруженной жидкостью ($R_2 > R_1$), поскольку несмоченная часть оболочки не оказывает существенного влияния на колебания системы [2, 3, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г. Е. Колебания коаксиальных цилиндрических оболочек с зазором, частично заполненным жидкостью.— Изв. АН АрмССР Механика, 1968, 21, № 4, с. 40—47.
2. Балакирев Ю. Г. Осесимметричные колебания соосных цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью.— В кн.: Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. М., 1970, с. 81—87.
3. Гонткевич В. С. Собственные колебания оболочек в жидкости. Киев, Наук. думка, 1964. 104 с.
4. Мнев Е. Н., Перцев А. К. Гидроупругость оболочек. Л., Судостроение, 1970. 365 с.
5. Швец Р. Н., Марчук Р. А. Собственные колебания ортотропной цилиндрической оболочки, соприкасающейся с жидкостью.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 63—67.
6. Шклярчук Ф. Н. О влиянии сжимаемости жидкости при продольных колебаниях цилиндрического бака.— В кн.: Колебания упругих конструкций с жидкостью. Новосибирск, 1973, с. 291—313.
7. Шапов В. П. Об уравнениях осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с жидким заполнением.— Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 1, с. 170—173.
8. Bauer H. F., Teh-Min Hsu, J. Tin-Shun Wang. Interaction of a sloshing liquid with elastic containers.— Trans. ASME. D, 1968, 3, p. 55—60.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 01.09.77

УДК 539.377

Т. Л. Мартынович, С. И. Кибальникова

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ СТАТИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ ПРИ ЗАДАННОЙ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА НА ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим плоскую задачу стационарной термоупругости для однородного анизотропного тела с некруговой цилиндрической полостью, подверженного тепловому воздействию. Тело обладает прямолинейной анизотропией относительно упругих и тепловых свойств и отнесено к прямо-