штрихпунктирной линией показано изменение σ_y^Σ при $Z = -1$, сплошной — изменение $\sigma_y^\Sigma = \sigma_y$ при $Z = 0$ и $\overset{*}{\sigma}_y$ при $Z = +1$, штриховой — σ_y^Σ при $Z = +1$. На рис. 2 изображена зависимость напряжений от Y при $L = 2$, $D = 1$, $\mathrm{Fo} = 4$, $\mathrm{Bi}_\pm = 0{,}01$, $\mathrm{Bi}_\pm = 0{,}5$. На рис. 3 представлена зависимость напряжений от безразмерного времени Fo при $Y = 1$, $L = 2$, $D = 1$, $\mathrm{Bi}_\pm = 0{,}01$. Графики на рис. 4 показывают зависимость напряжений от удаления D источника тепла от края пластинки при $Y = 1$, $L = 2$, $\mathrm{Fo} = 4$, $\mathrm{Bi}_\pm = 0{,}01$. При подсчетах принято $\nu = 0{,}3$.

При увеличении критерия теплоотдачи в 50 раз напряжения σ_y в срединной плоскости пластинки уменьшаются в 3,4 раза, а напряжения изгиба $\overset{*}{\sigma}_y$ изменяются незначительно, т. е. теплоотдача с поверхностей пластинки мало влияет на напряжения изгиба, которые при возрастании D затухают быстрее напряжений в срединной плоскости.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 10.10.77

УДК 539.3

А. М. Куземко, Н. И. Куземко

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Пусть пологая оболочка произвольной формы и плана подвергнута действию некоторой нагрузки $q = q(x, y)$ и температурного поля $T = T(x, y, z)$, неравномерно распределенного по толщине и в срединной поверхности. Тогда напряженно-деформированное состояние оболочки описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений [3]

$$AU = V, \tag{1}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \Delta\Delta & 0 \\ 0 & \Delta\Delta \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} W \\ \Phi \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix};$$

$$V_1 = -E\left(\frac{1}{2} L(W, W) + \Delta_k W + \alpha \Delta T_N\right);$$

$$V_2 = \frac{q}{D} + \frac{h}{D}\left(L(\Phi, W) + \Delta_k \Phi - E\frac{\alpha h}{1-\nu}\Delta T_M\right);$$

$$\Delta_k = \frac{\partial^2}{\partial x^2} k_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} k_x;$$

$$L(W, \Phi) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y};$$

$$T_N = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} T(x, y, z)\,dz; \quad T_M = \frac{1}{h^2}\int_{-h/2}^{h/2} zT(x, y, z)\,dz;$$

$W(x, y)$ — функция прогибов; $\Phi(x, y)$ — функция напряжений; k_x, k_y — главные кривизны; h — толщина оболочки; D — цилиндрическая жесткость.

Система (1) вместе с граничными условиями

$$L(U)|_S = 0, \tag{2}$$

где L — дифференциальный оператор граничных условий, полностью определяет напряженно-деформированное состояние оболочки. Температурное поле определяется при решении задачи

$$a^2\Delta T = f(x, y), \tag{3}$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_S = \alpha [T_W - T_\varphi] \tag{4}$$

или

$$T|_S = f_1(P). \tag{5}$$

Здесь α — коэффициент теплопередачи; a — коэффициент температуропроводности; T_W — температура на границе оболочки; T_φ — температура окружающей среды; λ — коэффициент теплообмена; k—коэффициент теплопроводимости материала оболочки.

Систему (1) решаем методом последовательных приближений [5]

$$AU_i = V_{i-1}, \tag{6}$$

где

$$U_i(x, y) = U_i^{(1)}(x, y) + U_i^{(2)}(x, y); \tag{7}$$

$U_i^{(1)}(x, y)$—общее решение однородного уравнения

$$AU_i^{(1)} = 0; \tag{8}$$

$U_i^{(2)}(x, y)$ — частное решение уравнения (6). Для решения системы (8) используем потенциальные представления (1), (2):

$$U_i^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int_S \mu_i(Q) K_1(P, Q)\, dS_Q + \frac{2}{\pi}\int_S \lambda_i(Q) K_2(P, Q)\, dS_Q, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} K_1(P, Q) &= \cos^2(P, Q) + \varphi(P); \\ K_2(P, Q) &= \frac{\cos^3(P, Q)}{R(P, Q)} + \psi(P). \end{aligned} \tag{10}$$

Удовлетворив граничным условиям

$$LU_i^{(1)}|_S = 0, \tag{11}$$

получим систему регулярных интегральных уравнений относительно одномерных плотностей потенциалов $\lambda_i(t)$, $\mu_i(t)$, что значительно упрощает вычислительный процесс решения задачи.

Если край оболочки шарнирно оперт, то интегральные уравнения имеют вид

$$\begin{gathered} \lambda_i(P_0) + \frac{1}{\pi}\int_S \mu_i(Q) K_1(P_0, Q)\, dS_Q + \frac{2}{\pi}\int_S \lambda_i(Q) K_2(P_0, Q)\, dS_Q = -U_i^{(2)}(P_0), \\ \mu_i(P_0) + \frac{1}{\pi}\int_S \mu_i(Q)\left[\varkappa_0 K_1(P_0, Q) - \frac{1}{2\varkappa_0}\Delta K_1(P_1, Q)\right] dS_Q + \\ + \frac{2}{\pi}\int_S \lambda_i(Q)\left[K_2(P_0, Q) - \frac{1}{2\varkappa_0}\Delta K_2(P_0, Q)\right] dS_Q = \frac{\Delta U_i^{(2)}(P_0) - 2U_i^{(2)}(P_0)\varkappa_0}{2\varkappa_0}, \end{gathered} \tag{12}$$

где $\varkappa_0 = \varkappa(P_0)$ — кривизна контура оболочки; $\varphi(P)$, $\psi(P)$ — бигармонические функции в области.

Если край оболочки жестко защемлен, то соответствующие интегральные уравнения имеют вид

$$\begin{gathered} \lambda_i(P_0) = -W_0^{(2)}(P_0) - \frac{1}{\pi}\int_S \mu_i(Q) K_1(P_0, Q)\, dS_Q - \frac{2}{\pi}\int_S \lambda_i(Q) K_2(P_0, Q)\, dS_Q, \\ \mu_i(P_0) = \frac{\partial W_0^{(2)}(P_0)}{\partial n}\bigg|_S + 2\varkappa_0 W_0^{(2)}(\mathcal{P}_0) + \frac{1}{\pi}\int_S \mu_i(Q)\left[\frac{\partial K_1(P_0, Q)}{\partial n} + \right. \\ \left. + 2\varkappa_0 K_1(P_0, Q)\right] dS_Q + \frac{2}{\pi}\int_S \lambda_i(Q)\left[\frac{\partial K_2(P_0, Q)}{\partial n} + 2\varkappa_0 K_2(P_0, Q)\right] dS_Q. \end{gathered} \tag{13}$$

Приведение краевых задач (3), (4); (3), (5) к интегральным уравнениям известно [3, 4].

В качестве примера рассмотрим подвергавшуюся воздействию равномерно распределенной нормальной нагрузки круглую в плане гиперболическую оболочку, край которой жестко защемлен. Температурное поле задачи (3) — (5) определяется интегралом Пуассона. Тогда интегральные уравнения (13) имеют вид

$$\lambda_i(t) = f_1(t) - \frac{R_1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mu_i(\tau) K_{11}(t, \tau)\,d\tau - \frac{2R_1}{\pi}\int_0^{2\pi} \lambda_i(\tau) K_{12}(t, \tau)\,d\tau,$$

$$\mu_i(t) = f_2(t) + \frac{R_1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mu_i(\tau) K_{21}(t, \tau)\,d\tau + \frac{2R_1}{\pi}\int_0^{2\pi} \lambda_i(\tau) K_{22}(t, \tau)\,d\tau,$$

где

$$f_1(t) = -\frac{R_1^4 q}{8D}\cos^2 t \sin^2 t; \quad f_2(t) = \frac{3R_1^3}{4D}\cos^2 t \sin^2 t;$$

$$K_{11}(t, \tau) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos(t-\tau); \quad K_{12}(t, \tau) = \frac{1}{4R_1} - \frac{1}{4R_1}\cos(t-\tau);$$

$$K_{21}(t, \tau) = \frac{5}{2R_1} - \frac{3}{2R_1}\cos(t-\tau); \quad K_{22}(t, \tau) = -\frac{3}{4R_1^2}\cos(t-\tau);$$

R_1 — радиус плана оболочки. Полученная система интегральных уравнений всегда разрешима [1]. Построено три приближения $U_i(x, y)$ и протабулировано на ЭВМ «МИР-2». Третье приближение отличается от второго для функции прогибов не более 5%.

Исследовано влияние нелинейных членов при различных нагрузках и толщинах оболочки, что указывает на актуальность проблемы построения алгоритмов решения граничных задач в нелинейной постановке. Метод теории потенциала дает возможность построения весьма общих алгоритмов решения граничных задач с учетом сложности контура плана оболочки, ее геометрии и граничных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куземко А. М., Куземко Н. И.* О разрешимости интегральных уравнений теории пологих оболочек.— Вычисл. и прикл. математика, 1972, вып. 17, с. 134—140.
2. *Лопатинский Я. Б.* Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям.— Укр. мат. журн., 1953, 5, № 12, с. 123—151.
3. *Огибалов П. М., Грибанов В. Ф.* Термоустойчивость пластин и оболочек. М., Изд-во Моск. ун-та, 1968. 125 с.
4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., Гостехиздат, 1953. 465 с.
5. *Куземко А. М., Куземко Н. И.* О концентрации напряжений и устойчивости пологих оболочек.— Вычисл. и прикл. математика, 1974, вып. 24, с. 125—132.

Запорожский машиностроительный институт

Поступила в редколлегию 20.11.77

УДК 539.3

М. П. Ленюк, В. И. Делей

ДВУМЕРНАЯ ПЕРВАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

При наличии массовых сил дифференциальные уравнения движения для однородной изотропной упругой полуплоскости имеют вид [3]

$$A\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x) \equiv \left[\left(\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu\Delta\right) E_2^2 - (\lambda + \mu) Q\right] u(t, x) = f(t, x), \quad (1)$$