Приведение краевых задач (3), (4); (3), (5) к интегральным уравнениям известно [3, 4].

В качестве примера рассмотрим подвергавшуюся воздействию равномерно распределенной нормальной нагрузки круглую в плане гиперболическую оболочку, край которой жестко защемлен. Температурное поле задачи (3) — (5) определяется интегралом Пуассона. Тогда интегральные уравнения (13) имеют вид

$$\lambda_i(t) = f_1(t) - \frac{R_1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu_i(\tau)K_{11}(t,\tau)\,d\tau - \frac{2R_1}{\pi}\int_0^{2\pi}\lambda_i(\tau)K_{12}(t,\tau)\,d\tau,$$

$$\mu_i(t) = f_2(t) + \frac{R_1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu_i(\tau)K_{21}(t,\tau)\,d\tau + \frac{2R_1}{\pi}\int_0^{2\pi}\lambda_i(\tau)K_{22}(t,\tau)\,d\tau,$$

где

$$f_1(t) = -\frac{R_1^4 q}{8D}\cos^2 t\sin^2 t;\quad f_2(t) = \frac{3R_1^3}{4D}\cos^2 t\sin^2 t;$$

$$K_{11}(t,\tau) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos(t-\tau);\quad K_{12}(t,\tau) = \frac{1}{4R_1} - \frac{1}{4R_1}\cos(t-\tau);$$

$$K_{21}(t,\tau) = \frac{5}{2R_1} - \frac{3}{2R_1}\cos(t-\tau);\quad K_{22}(t,\tau) = -\frac{3}{4R_1^2}\cos(t-\tau);$$

R_1 — радиус плана оболочки. Полученная система интегральных уравнений всегда разрешима [1]. Построено три приближения $U_i(x, y)$ и протабулировано на ЭВМ «МИР-2». Третье приближение отличается от второго для функции прогибов не более 5%.

Исследовано влияние нелинейных членов при различных нагрузках и толщинах оболочки, что указывает на актуальность проблемы построения алгоритмов решения граничных задач в нелинейной постановке. Метод теории потенциала дает возможность построения весьма общих алгоритмов решения граничных задач с учетом сложности контура плана оболочки, ее геометрии и граничных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куземко А. М., Куземко Н. И.* О разрешимости интегральных уравнений теории пологих оболочек.— Вычисл. и прикл. математика, 1972, вып. 17, с. 134—140.
2. *Лопатинский Я. Б.* Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям.— Укр. мат. журн., 1953, 5, № 12, с. 123—151.
3. *Огибалов П. М., Грибанов В. Ф.* Термоустойчивость пластин и оболочек. М., Изд-во Моск. ун-та, 1968. 125 с.
4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., Гостехиздат, 1953. 465 с.
5. *Куземко А. М., Куземко Н. И.* О концентрации напряжений и устойчивости пологих оболочек.— Вычисл. и прикл. математика, 1974, вып. 24, с. 125—132.

Запорожский машиностроительный институт

Поступила в редколлегию 20.11.77

УДК 539.3

М. П. Ленюк, В. И. Делей

ДВУМЕРНАЯ ПЕРВАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

При наличии массовых сил дифференциальные уравнения движения для однородной изотропной упругой полуплоскости имеют вид [3]

$$A\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x) \equiv \left[\left(\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu\Delta\right)E_2^2 - (\lambda+\mu)Q\right]u(t,x) = f(t,x), \quad (1)$$

где $u=(u_1, u_2)$; $u_k(t, x)\equiv u_k(t, x_1, x_2)$ $(k=1, 2)$ — составляющие перемещения; E_2^2 — единичная матриц размерности 2×2; Q — дифференциальная матрица, введенная в работе [1]; ρ, λ, μ — плотность вещества, постоянные Ламе; $\Delta=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$.

Рассмотрим задачу о нахождении в полупространстве

$$R_3^+=E_2^+\times[0, T]=\{(t, x_1, x_2)=(t, x);\ -\infty<x_1<+\infty,\ 0\leqslant x_2<+\infty,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$$

ограниченного достаточно гладкого решения системы (1), удовлетворяющего начальным условиям

$$u(t, x)|_{t=0}=\varphi_1(x),\quad \left.\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_2(x) \tag{2}$$

и граничному условию

$$u(t, x)|_{x_2=0}=\psi(t, x_1). \tag{3}$$

Решение поставленной задачи будем строить методом главных (фундаментальных) матриц-функций.

Определение 1. Фундаментальной матрицей решения задачи Коши для системы (1) назовем обобщенную матрицу-функцию $G(t, x, \xi)$, которая удовлетворяет системе $Au=0$ и условиям

$$G(t, x, \xi)|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial G(t, x, \xi)}{\partial t}\right|_{t=0}=\delta_\xi E_2^2, \tag{4}$$

где δ_ξ — мера Дирака, сосредоточенная в точке $\xi=(\xi_1, \xi_2)$.

Определение 2. Матрицей-функцией Коши задачи (1) — (3) назовем обобщенную матрицу-функцию $K(t, x, \xi)$, которая удовлетворяет системе $Au=0$ и условиям

$$K(t, x, \xi)|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial K(t, x, \xi)}{\partial t}\right|_{t=0}=\delta_\xi E_2^2,\quad K(t, x, \xi)|_{x_2=0}=0. \tag{5}$$

Определение 3. Матрицей-функцией Грина задачи (1) — (3) назовем обобщенную матрицу-функцию $W(t, \tau, x, \xi_1)$, которая удовлетворяет системе $Au=0$ и условиям

$$W(t, \tau, x, \xi_1)|_{t=0}=\left.\frac{\partial W(t, \tau, x, \xi_1)}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad W(t, \tau, x, \xi_1)|_{x_2=0}=\delta_{(\tau, \xi_1)}E_2^2. \tag{6}$$

Определение 4. Фундаментальной матрицей-функцией задачи (1) — (3) назовем обобщенную матрицу-функцию $\mathcal{E}(t, \tau, x, \xi)$, которая удовлетворяет системе

$$Au=\delta(t-\tau, x-\xi)E_2^2=\delta(t-\tau)\otimes\delta(x-\xi)E_2^2=\delta_{(\tau, \xi)}E_2^2, \tag{7}$$

нулевым начальным и граничным условиям.

Лемма 1. Фундаментальная матрица решения задачи Коши для системы (1), сосредоточенная в точке $(\xi, 0)$, определяется по формуле

$$G(t, x, \xi)=\frac{1}{2\pi}\Big\{g_2(t, R)E_2^2-\frac{1}{R^2}[g_2(t, R)-g_1(t, R)]Q_1+$$
$$+\frac{1}{R^2}[g_2(t, R)w_2(t, R)-g_1(t, R)w_1(t, R)]\Big(E_2^2-\frac{2}{R^2}Q_1\Big)\Big\}, \tag{8}$$

где

$$g_k(t, R)=\frac{i(c_kt-R)}{c_k\sqrt{c_k^2t^2-R^2}};\quad w_k(t, R)=c_k^2t^2-R^2\quad (k=1, 2);$$

$$c_1^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho};\quad c_2^2=\frac{\mu}{\rho};\quad R=\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2};$$

$$Q_1=\begin{pmatrix}(x_1-\xi_1)^2 & (x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)\\ (x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2) & (x_2-\xi_2)^2\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Характеристический полином оператора A имеет вид: $\Phi(z, -\sigma^2) \equiv \det A(z, -i\sigma_1, -i\sigma_2) = (z^2 + c_2^2\sigma^2)(z^2 + c_1^2\sigma^2)$. Поэтому система $Au = 0$ инвариантна по $x = (x_1, x_2)$ относительно группы вращений вокруг начала координат евклидовой плоскости $E_2 = \{(x_1, x_2); -\infty < x_k < +\infty\ (k = 1, 2)\}$ и заменой $u = Tv$ приводится к одному гиперболическому по И. Г. Петровскому уравнению

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \Delta\right) v \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_2^2\Delta\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2\Delta\right) v = 0, \tag{9}$$

а дифференциальная матрица $T = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2\Delta\right) E_2^2 + (c_1^2 - c_2^2) Q$. Фундаментальное решение задачи Коши $G_0(t, R)$ для уравнения (9) определяется по формуле

$$G_0(t, R) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{e^{zt} dz}{\Phi(z, -\sigma^2)}\right) \sigma J_0(\sigma R)\, d\sigma, \tag{10}$$

где γ — замкнутый контур в комплексной z-плоскости, охватывающий все корни полинома $\Phi(z, -\sigma^2)$.

Действительно, применяя оператор L к функции $G_0(t, R)$, с учетом тождества $\Delta J_0(\sigma R) = -\sigma^2 J_0(\sigma R)$ получаем

$$LG_0(t, R) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma e^{zt} dz\right) \sigma J_0(\sigma R) d\sigma \equiv 0. \tag{11}$$

Выполнение условий

$$\lim_{t \to +0} \frac{\partial^k G_0(t, R)}{\partial t^k} = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, 2, \\ 1, & k = 3 \end{cases} \tag{12}$$

следует из тождеств

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{z^k dz}{\Phi(z, -\sigma^2)} = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, 2, \\ 1, & k = 3 \end{cases}$$

и интегрального представления меры Дирака в евклидовой плоскости E_2 [2]. В силу тождества (11) и условий (12) получаем, что фундаментальная матрица решения задачи Коши для системы (1) имеет вид

$$G(t, x, \xi) = TG_0(t, R). \tag{13}$$

После выполнения преобразований в формуле (13) получаем равенство (8).

Лемма 2. Пусть $E(t, x)$ — матрица-функция размерности 2×2, элементы которой есть обобщенные функции в пространстве K_2' и непрерывно зависят от t как от параметра, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ — одноколонная матрица-функция в пространстве K_3 основных переменных (t, x_1, x_2). Тогда матричное равенство

$$\langle E(t, x), \varphi(t, x)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle E(t, x), \varphi(t, x)\rangle_x\, dt, \tag{14}$$

где выражение $\langle\cdot\rangle_x$ означает применение матричного функционала $E(t, x)$ к основной функции $\varphi(t, x)$ по координатам (x_1, x_2) при фиксированном t, определяет обобщенную матрицу-функцию в пространстве K_3'.

Доказательство. Так как под знаком интеграла функция $E(t, x)$ при фиксированном t применяется к основной функции $\varphi(t, x)$ как функции (x_1, x_2) при том же t, то результат есть финитной функцией по t и поэтому интегрирование по t возможно. Очевидно, что матричный функционал $E(t, x)$ есть линейным и непрерывным на пространстве K_3' [4], поэтому $E \in K_3'$.

Лемма 3. Пусть $G(t, x)$ — фундаментальная матрица решения задачи Коши для системы

$$Lu = \left[E_2^2 \frac{\partial}{\partial t} - P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] u = 0.$$

Тогда обобщенная функция $E(t, x) = G(t, x)\ j_+(t)$, которая действует по правилу (14), есть фундаментальной функцией оператора L.

Доказательство. Поскольку

$$\int_0^\infty \left\langle G(t, x), \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle_x dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \langle G, \varphi \rangle_x dt - \int_0^\infty \left\langle \frac{\partial G}{\partial t}, \varphi \right\rangle_x dt =$$

$$= -\langle G(0, x), \varphi(0, x)\rangle - \int_0^\infty \left\langle \frac{\partial G}{\partial t}, \varphi \right\rangle_x dt =$$

$$= -\varphi(0, 0) - \int_0^\infty \left\langle P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) G, \varphi \right\rangle_x dt,$$

то

$$\left\langle \left[E_2^2 \frac{\partial}{\partial t} - P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] E(t, x), \varphi(t, x) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \left[E_2^2 \frac{\partial}{\partial t} - P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \times \right.$$

$$\left. \times E(t, x), \varphi(t, x) \right\rangle_x dt = \int_0^\infty \left\langle \left[E_2^2 \frac{\partial}{\partial t} - P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] G, \varphi \right\rangle_x dt =$$

$$= \int_0^\infty \left\langle G, \left[-E_2^2 \frac{\partial}{\partial t} - P\left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \varphi \right\rangle_x dt = -\int_0^\infty \left\langle G, \frac{\partial \varphi}{\partial t} E_2^2 \right\rangle_x dt -$$

$$- \int_0^\infty \left\langle G, P\left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi \right\rangle_x dt = E_2^2 \varphi(0, 0) + \int_0^\infty \left\langle P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) G, \varphi \right\rangle_x dt -$$

$$- \int_0^\infty \left\langle P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) G, \varphi \right\rangle_x dt = \langle \delta(t, x), \varphi(t, x)\rangle E_2^2.$$

Лемма 4. Пусть $G(t, x)$ — фундаментальная матрица решения задачи Коши для системы

$$Lu = \left[E_2^2 \frac{\partial^m}{\partial t^m} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial t^k} P_k\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] u = 0.$$

Тогда обобщенная функция $E(t, x) = G(t, x)\ j_+(t)$, которая действует на основные функции по правилу (14), есть фундаментальной функцией оператора L.

Доказательство заключается в приведении данной системы к системе первого порядка и использовании леммы 3.

Решим первую краевую задачу динамической теории упругости для полуплоскости. Поскольку процессы, осуществляемые в упругой полуплоскости, в классической динамической теории упругости могут быть однозначно описаны с помощью одноколонной матрицы $u(t, x)$, элементами которой есть перемещения вдоль осей прямоугольной декартовой системы координат, то рассмотрим задачу о построении в R_3^+ решения задачи (1) — (3). Главные решения будем строить методами интегральных преобразований Лапласа по t и Фурье по x_1.

В образах Лапласа — Фурье для функций

$$\hat{K}^* = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1\sigma_1} \int_0^\infty K(t, x, \xi) e^{-pt} dt dx_1, \quad \hat{W}^* = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1\sigma_1} \int_0^\infty W(t, \tau, x, \xi_1) e^{-pt} dt dx_1$$

на положительной полуоси $x_2 \geqslant 0$ получаем такие граничные задачи:

$$A\left(p, -i\sigma_1, \frac{d}{dx_2}\right)\tilde{K}^* = e^{-i\sigma_1\xi_1}\delta(x_2-\xi_2)E_2^2, \quad \tilde{K}^*|_{x_2=0} = 0, \tag{15}$$

$$A\left(p, -i\sigma_1, \frac{d}{dx_2}\right)\tilde{W}^* = 0, \quad \tilde{W}^*|_{x_2=0} = e^{-i\sigma_1\xi_1}e^{-\tau p}E_2^2. \tag{16}$$

Лемма 5. Если выполнено условие дополнительности

$$\sqrt{(s^2+c_1^2)(s^2+c_2^2)} - c_1c_2 \neq 0 \quad (s\sigma_1 = p;\ p = p_1 + ip_2;\ p_1 > 0,\ -\infty < p_2 < +\infty), \tag{17}$$

то единственное ограниченное при $x_2 \to +\infty$ решение задачи (15) имеет вид

$$\tilde{K}^* = \tilde{G}^* + \mathfrak{M}_\xi\tilde{G}^* = \tilde{G}^*(p, \sigma_1-\xi_1, x_2-\xi_2) - \tilde{G}^*(p, \sigma_1-\xi_1, x_2)\times$$
$$\times\begin{pmatrix} q_1q_2e^{-q_2\xi_2} - \sigma_1^2e^{-q_1\xi_2} & i\sigma_1q_1(e^{-q_2\xi_2}-e^{-q_1\xi_2}) \\ i\sigma_1q_2(e^{-q_2\xi_2}-e^{-q_1\xi_2}) & -\sigma_1^2e^{-q_2\xi_2}+q_1q_2e^{-q_1\xi_2}\end{pmatrix}\frac{1}{q_1q_2-\sigma_1^2}, \tag{18}$$

где

$$q_k^2 = \sigma_1^2 + \frac{p^2}{c_k^2} \quad (k = 1, 2);$$

$$\tilde{G}^* = \begin{cases}\tilde{G}_-^* & \text{при } x_2 > \xi_2, \\ \tilde{G}_+^* & \text{при } x_2 < \xi_2\end{cases} = \frac{e^{-i\sigma_1\xi_1}}{2\pi}\begin{cases}-\int\limits_{\gamma^-} e^{-i\sigma_2(x_2-\xi_2)}A^{-1}(p, -i\sigma)\,d\sigma_2 & \text{при } x_2 > \xi_2, \\ \int\limits_{\gamma^+} e^{-i\sigma_2(x_2-\xi_2)}A^{-1}(p, -i\sigma)\,d\sigma_2 & \text{при } x_2 < \xi_2.\end{cases}$$

Доказательство. Единственной конструкцией ограниченного на бесконечности решения задачи (15) есть матрица

$$\tilde{K}^* = \tilde{G}^* - \frac{e^{-i\sigma_1\xi_1}}{2\pi}\int\limits_{\gamma^-} e^{-i\sigma_2x_2}A^{-1}(p, -i\sigma)\,d\sigma_2\left[\int\limits_{\gamma^-} A^{-1}(p, -i\sigma)\,d\sigma_2\right]^{-1}\times$$
$$\times\int\limits_{\gamma^+} e^{-i\sigma_2\xi_2}A^{-1}(p, -i\sigma)\,d\sigma_2 = \tilde{G}^* + \mathfrak{M}_\xi\tilde{G}^*, \tag{19}$$

где $\gamma^\mp$ — замкнутый контур, содержащий корни полинома $\Phi(p, -\sigma^2)$ соответственно с отрицательной и положительной мнимыми частями, причем ориентация контуров γ^- и γ^+ одинакова. Непосредственно проверяется, что функция (19) удовлетворяет уравнению (15), поскольку условие (17) разрешает дифференцировать под знаком интеграла. Выполнение граничного условия очевидно. После вычисления контурных интегралов в (19) получаем (18).

Лемма 6. Если выполнено условие дополнительности (17), то единственное ограниченное при $x_2 \to +\infty$ решение задачи (16) имеет вид

$$\tilde{W}^* = e^{-q_1x_2}E_2^2 + \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & -i\sigma_1q_1 \\ -i\sigma_1q_2 & -q_1q_2\end{pmatrix}\frac{e^{-q_1x_2}-e^{-q_2x_2}}{q_1q_2-\sigma_1^2}. \tag{20}$$

Доказательство. С помощью вычетного метода решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений находим, что решение задачи (16) имеет вид

$$\tilde{W}^* = \frac{e^{-i\sigma_1\xi_1}e^{-\tau p}}{2\pi}\int\limits_{\gamma^-} e^{-i\sigma_2x_2}A^{-1}(p, -i\sigma)\,d\sigma_2\left[\int\limits_{\gamma^-} A^{-1}(p, -i\sigma)\,d\sigma_2\right]^{-1}. \tag{21}$$

Действительно, в силу условий (17) получаем

$$A\left(p,-i\sigma_1,\frac{d}{dx_2}\right)\tilde{W}^*=\frac{e^{-i\sigma_1\xi_1}e^{-\tau p}}{2\pi}\int\limits_{\gamma^-}e^{-i\sigma_2x_2}E_2^2d\sigma_2\left[\int\limits_{\gamma^-}A^{-1}(p,-i\sigma)\,d\sigma_2\right]^{-1}\equiv$$
$$\equiv 0,$$

т. е. матрица $\tilde{W}^*$ удовлетворяет системе (16). Выполнение краевого условия очевидно. В результате вычисления контурных интегралов получаем (20). Оригиналы элементов матриц K, W имеют вид

$$K_{ij}=G_{ij}+\sum_{s=1}^{2}\bar{G}_{is}\overset{*}{x}\overset{*}{t}l_{sj},$$

$$W_{11}=-\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{2\pi\bar{R}}\delta(t-c_2^{-1}\bar{R})-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(F_2-F_1),$$

$$W_{12}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[-\frac{1}{2\pi\bar{R}}\delta(t-c_1^{-1}\bar{R})-\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}H_y^{x_2}F_1\right],$$

$$W_{21}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{2\pi\bar{R}}\delta(t-c_2^{-1}\bar{R})+\frac{\partial F_1}{\partial x_2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}H_y^{x_2}F_2\right],$$

$$W_{22}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left[-\frac{1}{2\pi\bar{R}}\delta(t-c_1^{-1}\bar{R})-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}H_y^{x_2}(F_2-F_1)\right],\quad F_k=F_k(t,x_1,\xi_1,x_2),$$

где

$$l_{11}=-\frac{\partial}{\partial\xi_2}\frac{1}{2\pi R^*}\delta(t-c_2^{-1}R^*)-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(F_2-F_1);$$

$$l_{12}=-\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{2\pi R^*}\delta(t-c_2^{-1}R^*)+\frac{\partial F_1}{\partial\xi_2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}H_y^{\xi_2}F_2\right];$$

$$l_{21}=-\frac{\partial}{\partial x_1}\left[-\frac{1}{2\pi R^*}\delta(t-c_1^{-1}R^*)-\frac{\partial F_2}{\partial\xi_2}+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}H_y^{\xi_2}F_1\right];$$

$$l_{22}=\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left[-\frac{1}{2\pi R^*}\delta(t-c_1^{-1}R^*)-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}H_y^{\xi_2}(F_2-F_1)\right];\quad F_k=F_k(t,x_1,\xi_1,\xi_2);$$

$$F_j(t,x_1,\xi_1,z)=\frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{\alpha^2}(f_{1j}-f_{2j})-$$
$$-\frac{\alpha_j}{\alpha_1\alpha_2}\frac{\partial}{\partial z}(\alpha_{m_j}f_{1j}+\alpha_j^2f_{2j})\overset{*}{t}\overset{*}{x}g_{m_j};\quad m_j=j+(-1)^{j-1};$$

$$f_{1j}=L^{-1}F^{-1}\left[\frac{\exp\left\{-\frac{z}{\alpha_j}\sqrt{p^2+\alpha_j^2\sigma_1^2}\right\}}{p^2}\right]=\frac{1}{\pi}\frac{z}{z^2+x_1^2}\sqrt{t^2-\frac{x_1^2+z^2}{\alpha_j^2}}\times$$
$$\times j\left(t-\frac{\sqrt{x_1^2+z^2}}{\alpha_j}\right);$$

$$f_{2j}=L^{-1}F^{-1}\left[\frac{\exp\left\{-\frac{z}{\alpha_j}\sqrt{p^2+\alpha_j^2\sigma_1^2}\right\}}{p^2+\alpha^2\sigma_1^2}\right]=$$
$$=\frac{z}{2\pi\alpha}\int\limits_{-\alpha t}^{\alpha t}\frac{\left(t-\frac{|\beta|}{\alpha}\right)j\left(t-\frac{|\beta|}{\alpha}-\sqrt{\frac{z^2+(x-\beta)^2}{\alpha^2}}\right)}{[z^2+(x-\beta)^2]\sqrt{\left(t-\frac{|\beta|}{\alpha}\right)^2-\frac{z^2+(x-\beta)^2}{\alpha^2}}}d\beta;$$

$$g_i = L^{-1}F^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{p^2+\alpha_i^2\sigma_1^2}}\right] = \frac{i\left(t - \frac{|x_1|}{\alpha_i}\right)}{\pi\alpha_i\sqrt{t^2-\alpha_i^{-2}x_1^2}}; \quad H_y^2[f(z)] = \int_0^\infty f(z+y)\,dy;$$

$$\overline{G}_{ij} = G_{ij}|_{\xi_2=0}; \quad \overline{R} = R|_{\xi_2=0}; \quad R^* = R|_{x_2=0}; \quad \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2.$$

Лемма 7. Фундаментальная матрица-функция задачи (1) — (3) имеет вид

$$\mathscr{E}(t, \tau, x, \xi) = \frac{1}{\rho} K(t-\tau, x, \xi)\, j_+(t-\tau). \tag{22}$$

Доказательство. Так как $K(t, x, \xi) = G(t, x, \xi) + \mathfrak{M}_\xi G(t, x, \xi)$, то

$$\mathscr{E}(t, \tau, x, \xi) = G(t-\tau, x, \xi)\, j_+(t-\tau) + \mathfrak{M}_\xi G(t-\tau, x, \xi)\, j_+(t-\tau) =$$
$$= \mathscr{E}^{(1)} + \mathscr{E}^{(2)} \quad \text{и} \quad \sup \mathscr{E}^{(2)} \overline{\in} R_3^+.$$

Поэтому достаточно показать, что $A\mathscr{E}^{(1)} = \delta_{(\tau,\xi)}E_2^2$. Последнее имеет место в силу леммы 4. Выполнение начальных и краевого условий очевидно.

Теорема 1. Если выполнено условие (17), то обобщенное решение задачи (1) — (3) определяется по формуле

$$u(t, x) = \int_{E_2^+} \left\{K(t, x, \xi)\,\varphi_2(\xi) + \frac{\partial K(t, x, \xi)}{\partial t}\,\varphi_1(\xi)\right\} d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} W(t, \tau, x, \xi_1)\,\psi(\tau, \xi_1)\,d\xi_1 + \int_0^t d\tau \int_{E_2} \mathscr{E}(t, \tau, x, \xi)\,f(\tau, \xi)\,d\xi. \tag{23}$$

Доказательство. Перепишем формулу (23) так:

$$u = K\overset{*}{x}\varphi_2 + \frac{\partial K}{\partial t}\overset{*}{x}\varphi_1 + W\overset{*}{x_1}\overset{*}{t}\psi + \mathscr{E}\overset{*}{x}\overset{*}{t}f.$$

Тогда справедливость теоремы следует из свойств функций K, W, $\mathscr{E}$, теорем о непрерывности и дифференцированности свертки [4] и равенства

$$\left[\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}\overset{*}{x}\varphi_1\right]_{t=0} = \{[(c_2^2\Delta + c_1^2\,\mathrm{grad\,div})K]\overset{*}{x}\varphi_1\}|_{t=0} = 0.$$

Отметим, что при достаточной гладкости функций φ_1, φ_2, ψ, f формула (23) дает классическое решение первой краевой задачи динамической теории упругости для полуплоскости. При известных перемещениях тензор напряжений определяется по известным соотношениям [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ленюк М. П., Делей В. І.* Про стабілізацію розв'язків однієї гіперболічної системи.— Допов. АН УРСР, 1974, № 2, с. 117—121.
2. *Ленюк М. П., Шестопал А. Ф.* Про двічі розгалужений розв'язок задачі Коші одного класу параболічних систем.— Укр. мат. журн., 1971, 23, с. 117—124.
3. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958. 370 с.
4. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. М., Наука, 1965. 328 с.

Черновицкий университет
Хмельницкий технологический
институт бытового обслуживания

Поступила в редколлегию
15.03.77