

6. Мартынович Т. Л. Об одном эффективном методе решения задач о напряженном состоянии в анизотропных пластинках с подкрепленным краем.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 2, с. 110—116.
7. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М., Гостехиздат, 1954. 444 с.

Львовский государственный университет

Поступила в редколлегию 20.VIII 1976 г.

УДК 539.3

В. А. Осадчук

НАПРЯЖЕНИЯ В ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С СИСТЕМОЙ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТРЕЩИН

Напряженно-деформированное состояние замкнутой цилиндрической оболочки с одной или несколькими трещинами (разрезами) исследовалось на основании технической теории оболочек [3—5]. Пределы применимости полученных при этом результатов могут быть установлены с использованием более точных (общих) уравнений теории оболочек. В настоящей работе исследовано упругое равновесие замкнутой цилиндрической оболочки с системой коллинеарных трещин, периодически расположенных вдоль окружности; в качестве исходных приняты уравнения общей моментной теории оболочек. С использованием метода дисторсий [5] задача о напряжениях в оболочке с трещинами сведена к решению сингулярных интегральных уравнений и получены формулы для определения коэффициентов интенсивности.

Рассмотрим отнесенную к ортогональной криволинейной системе координат (α, β, γ) бесконечную цилиндрическую оболочку с системой k трещин, периодически расположенных вдоль окружности $\alpha = 0$. Предположим, что эта оболочка находится под действием нагрузки, которая в идентичной оболочке без трещин вызывает осесимметричное напряженное состояние. В этом случае напряженно-деформированное состояние рассматриваемой оболочки с трещинами будет циклически симметричным, что позволяет в дальнейшем исследовать цилиндрическую панель $|\beta| \leq \frac{\pi}{k}$ с трещиной $\alpha = 0, |\beta| \leq \beta_0 \left(\beta_0 < \frac{\pi}{k} \right)$.

Используя предложенный в работах [3, 5] метод решения задач теории оболочек с трещинами, исходные уравнения рассматриваемой задачи записываем так:

$$L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w = g_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_{11} &= \partial_1^2 + \frac{1-\nu}{2} \partial_2^2; & L_{12} &= L_{21} = \frac{1+\nu}{2} \partial_1 \partial_2; & L_{13} &= L_{31} = \nu \partial_1; \\ L_{22} &= \frac{1-\nu}{2} \partial_1^2 + \partial_2^2 + c_1^2 [2(1-\nu) \partial_1^2 + \partial_2^2]; & L_{23} &= L_{32} = \partial_2 (1 - c_1^2 L); \\ L_{33} &= 1 + c_1^2 \nabla^2 \nabla^2; & L &= (2-\nu) \partial_1^2 + \partial_2^2; & \partial_1 &= \frac{\partial}{\partial \alpha}, & \partial_2 &= \frac{\partial}{\partial \beta}; \\ & & \nabla^2 &= \partial_1^2 + \partial_2^2; & c_1^2 &= \frac{h^2}{3R^2}; \\ g_1 &= R \partial_1 \varepsilon_{11}^0; & g_2 &= \nu R \partial_2 \varepsilon_{11}^0 + \frac{h^2}{3} \nu \partial_2 \kappa_{11}^0; \\ g_3 &= \nu R \varepsilon_{11}^0 - \frac{h^2}{3} (\partial_1^2 + \nu \partial_2^2) \kappa_{11}^0; \end{aligned}$$

u, v, w — перемещения срединной поверхности оболочки; R, h — соответственно радиус и полутолщина оболочки. Функции $\varepsilon_{11}^0, \kappa_{11}^0$, характеризующие скачки перемещений u и углов поворота Θ_1 на линиях трещин, имеют вид

$$\varepsilon_{11}^0(\alpha, \beta) = \varepsilon(\beta) \delta(\alpha), \quad \kappa_{11}^0(\alpha, \beta) = -\frac{1}{R} \kappa(\beta) \delta(\alpha) \quad \text{при } |\beta| < \beta_0, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{11}^0 = \kappa_{11}^0 = 0 \quad \text{при } |\beta| \geq \beta_0,$$

где

$$\varepsilon(\beta) = \frac{1}{R} (u^+ - u^-); \quad \kappa(\beta) = \Theta_1^+ - \Theta_1^-;$$

$\delta(\alpha)$ — функция Дирака; индексами «+» и «-» обозначены граничные значения соответствующей величины слева и справа от линии трещины (при движении вдоль положительного направления по направляющей).

Решение системы уравнений (1), затухающее на бесконечности, представим в виде

$$u = R(L_{1u}\varphi_1 + P_{1u}\psi_1), \quad v = R(L_{1v}\varphi_1 + P_{1v}\psi_1), \quad w = R(L_{1w}\varphi_1 + P_{1w}\psi_1), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} L_{1u} &= \partial_1 \{ [\partial_1^2 + (2 + \nu) \partial_2^2] \nabla^2 \nabla^2 + c^{-2} \partial_1^2 + \partial_2^2 [(4 + 3\nu) L + 2(1 + \nu)] \}; \\ P_{1u} &= \partial_1 [\nu (\partial_1^4 - \partial_2^4) - (1 - \nu^2) \partial_1^2 \partial_2^2 - \nu \partial_2^2] + c_1^2 (1 + \nu) \partial_1^3 \partial_2^2 (\nabla^2 + P); \\ L_{1v} &= -\partial_2 [(\partial_1^2 - \nu \partial_2^2) \nabla^2 \nabla^2 + c^{-2} \partial_1^2 - \nu \partial_2^2 L]; \\ P_{1v} &= \partial_2 P_0 P + \nu \partial_2 [\nabla^2 + (1 + 2\nu) \partial_1^2] - c_1^2 \partial_1^2 \partial_2 [4 \partial_1^2 \nabla^2 + (1 - \nu^2) \partial_2^4]; \\ L_{1w} &= c^{-2} \partial_1^2 \partial_2^2 - \partial_2^2 [(\partial_1^2 - \nu \partial_2^2) L - \nu \partial_2^2]; \quad P_{1w} = -P \nabla^2 \nabla^2 - \nu \partial_2^2 P_0, \\ P &= \partial_1^2 + \nu \partial_2^2, \quad P_0 = (2 + \nu) \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad c^2 = \frac{c_1^2}{1 - \nu^2}; \end{aligned} \quad (4)$$

φ_1, ψ_1 — функции, удовлетворяющие уравнениям

$$D\varphi_1 = \varepsilon_{11}^0, \quad D\psi_1 = R\kappa_{11}^0, \quad (5)$$

$$D = \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 + c^{-2} \partial_1^4 + 2(4 - \nu^2) \partial_1^2 \partial_2^2 + 8 \partial_1^2 \partial_2^4 + 2 \partial_2^6 + 4 \partial_1^2 \partial_2^2 + \partial_2^4.$$

Подставляя выражения (2) в (5) и учитывая условия циклической симметрии

$$v = 0, \quad \partial_2 w = 0 \quad \text{при } \beta = \pm \frac{\pi}{k}, \quad (6)$$

для определения разрешающих функций φ_1, ψ_1 получаем формулы

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha, \beta) &= \frac{k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \Phi_n(\alpha) \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \varepsilon(\theta) \cos kn(\beta - \theta) d\theta, \\ \psi_1(\alpha, \beta) &= -\frac{k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \Phi_n(\alpha) \int_{-\beta_c}^{\beta_0} \kappa(\theta) \cos kn(\beta - \theta) d\theta, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(\alpha) &= \frac{c^2}{12} |\alpha|^3 - \frac{c^3 \sqrt{2c}}{4} e^{-\frac{|\alpha|}{\sqrt{2c}}} \left(\cos \frac{\alpha}{\sqrt{2c}} + \sin \frac{|\alpha|}{\sqrt{2c}} \right); \\ \Phi_1(\alpha) &= \frac{|\alpha|}{12(p_{21}^2 + q_{21}^2)} \left(\alpha^2 + \frac{p_{21}}{p_{21}^2 + q_{21}^2} \right) + \frac{1}{L_1} \frac{e^{-a_{21}|\alpha|}}{q_{21}(a_{21}^2 + b_{21}^2)} \times \\ &\times [(b_{21}C_{21} - a_{21}B_{21}) \cos b_{21}\alpha + (a_{21}C_{21} + b_{21}B_{21}) \sin b_{21}|\alpha|] \quad \text{при } k = 1; \\ \Phi_n(\alpha) &= \frac{1}{L_n} \sum_{j=1}^2 \frac{e^{-a_{jn}|\alpha|}}{q_{jn}(a_{jn}^2 + b_{jn}^2)} [(b_{jn}C_{jn} - a_{jn}B_{jn}) \cos b_{jn}\alpha + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (a_{jn}C_{jn} + B_{jn}b_{jn}) \sin b_{jn} |\alpha|, \quad n \geq 2; \\
L_n &= 2(C_{1n}^2 + B_{1n}^2); \quad B_{1n} = 2(p_{2n} - p_{1n})q_{1n}; \quad B_{2n} = 2(p_{1n} - p_{2n})q_{2n}; \\
C_{1n} &= (p_{2n} - p_{1n})^2 + q_{2n}^2 - q_{1n}^2; \quad C_{2n} = (p_{1n} - p_{2n})^2 + q_{1n}^2 - q_{2n}^2; \\
p_{jn} &= a_{jn}^2 - b_{jn}^2; \quad q_{jn} = 2a_{jn}b_{jn}; \quad \lambda_0 = \frac{1}{2}; \quad \lambda_n = 1, \quad n \geq 1;
\end{aligned}$$

a_{jn}, b_{jn} — соответственно мнимая и действительная части корней характеристического уравнения

$$s^8 + 4k^2n^2s^6 + (6k^4n^4 + c^{-2})s^4 + 4k^2n^2(k^2n^2 - 1)^2s^2 + k^4n^4(k^2n^2 - 1)^2 = 0. \quad (8)$$

Выражение для $\Phi_1(\alpha)$ при $k > 1$ имеет вид, аналогичный $\Phi_n(\alpha)$ при $n \geq 2$, поскольку в этом случае уравнение (8) при $n = 1$ не имеет нулевых корней.

Подставляя выражения (7) в (3), а затем в соответствующие соотношения для определения усилий и моментов [5] и удовлетворяя на свободных берегах трещин условиям

$$N_1(0, \beta) = 0, \quad M_1(0, \beta) = 0, \quad |\beta| < \beta_0, \quad (9)$$

для определения неизвестных функций $\varepsilon(\beta)$, $\varkappa(\beta)$ получаем систему сингулярных интегральных уравнений

$$\sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 F_j(u) K_{mj}[\beta_0(s-u)] du = \frac{2\pi}{k\beta_0} f_{m0}(s), \quad |s| \leq 1 \quad (m = 1, 2). \quad (10)$$

Здесь

$$F_1(\theta) = \frac{d\varepsilon}{d\theta}; \quad F_2(\theta) = c \frac{d\varkappa}{d\theta};$$

$$f_{10} = \frac{1}{Eh} N_1^0; \quad f_{20} = -\frac{1}{cREh} M_1^0; \quad s = \frac{\beta}{\beta_0}; \quad u = \frac{\theta}{\beta_0};$$

N_1^0, M_1^0 — усилия и моменты на линиях трещин в оболочке без трещин; β_0 — центральный угол между серединой и концом трещины; E — модуль упругости.

Ядра системы имеют вид

$$\begin{aligned}
K_{mj}(z) &= a_{mj} \operatorname{ctg} \frac{kz}{2} + K_{mj}^0(z), \\
K_{11}^0(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin knz, \quad K_{12}^0(z) = \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin knz, \\
K_{21}^0(z) &= \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin knz, \quad K_{22}^0(z) = \frac{z}{\sqrt{2c}} - \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin knz,
\end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}
B_n &= -1 + \frac{4k_n^3}{L_n} \sum_{j=1}^2 \frac{C_{jn}^{(1)}}{q_{jn}}; \quad C_n = -2a_{12} + \frac{4k_n}{L_n} \sum_{j=1}^2 \frac{C_{jn}^{(2)}}{q_{jn}}; \\
E_n &= -2a_{21} + \frac{4k_n}{L_n} \sum_{j=1}^2 \frac{D_{jn}^{(1)}}{q_{jn}}; \quad D_n = 2a_{22} + \frac{4}{L_n} \left(k_n \sum_{j=1}^2 \frac{D_{jn}^{(2)}}{q_{jn}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{c^2 k_n} \sum_{j=1}^2 \frac{A_{jn}}{q_{jn}} \right); \quad C_{jn}^{(1)} = A_{jn} + 2k_n^2 t_{jn} + k_n^4 d_{jn} - \\
&\quad - 2 \left[(2 - \nu) - \frac{1}{k_n^2 (1 + \nu)} \right] t_{jn} + (1 - 2k_n^2) d_{jn}; \\
C_{jn}^{(2)} &= A_{jn} + \nu k_n^2 t_{jn} + \frac{1 - \nu}{1 + \nu} c_1^2 k_n^2 A_{jn} - \frac{2c_1^2}{1 + \nu} (p_{jn} A_{jn} - q_{jn} D_{jn}) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\nu(1 + c_1^2 k_n^4) t_{jn}; \quad D_{jn}^{(1)} = C_{jn}^{(2)} + \frac{1-\nu}{1+\nu} k_n^2 \nu c_1^2 t_{jn}; \\
D_{jn}^{(2)} &= 2(1 - \nu + 2\nu c_1^2) (\rho_{jn} A_{jn} - q_{jn} D_{jn}) - [(5 - 4\nu - \nu^2 + 4\nu c_1^2) k_n^2 - \\
& - 4(2 - \nu - \nu^2)] A_{jn} - 2\{[2 - \nu - \nu^2 + c_1^2 \nu(1 - \nu^2)] k_n^4 - \\
& - (4 - \nu - 2\nu^2 + \nu^3) k_n^2 + 2 - \nu^2 + \nu^3\} t_{jn} - k_n^2(1 - \nu^2)(1 - k_n^2)^2 d_{jn}; \\
t_{jn} &= a_{jn} B_{jn} + b_{jn} C_{jn}; \quad d_{jn} = \frac{1}{a_{jn}^2 + b_{jn}^2} (b_{jn} C_{jn} - a_{jn} B_{jn}); \\
A_{jn} &= (b_{jn}^2 - 3a_{jn}^2) b_{jn} C_{jn} - (a_{jn}^2 - 3b_{jn}^2) a_{jn} B_{jn}; \\
D_{jn} &= (b_{jn}^2 - 3a_{jn}^2) b_{jn} B_{jn} + (a_{jn}^2 - 3b_{jn}^2) a_{jn} C_{jn}; \quad k_n = nk; \\
a_{11} &= \frac{1}{2}; \quad a_{12} = a_{21} = \frac{c}{16} (11 - 13\nu + \nu^2 + \nu^3); \\
a_{22} &= \frac{3 - 2\nu - \nu^2}{2} + \frac{\nu c_1^2}{16} (25 - \nu^2).
\end{aligned}$$

Вводя новые функции

$$\Phi_1 = a_{11} F_1(u) + a_{12} F_2(u), \quad \Phi_2 = a_{21} F_1(u) + a_{22} F_2(u) \quad (12)$$

и новые переменные

$$\xi = \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{k\beta_0 u}{2}, \quad t = \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{k\beta_0 s}{2}, \quad \lambda = \operatorname{tg} \frac{k\beta_0}{2}, \quad (13)$$

систему интегральных уравнений (10) представим в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Omega_m(\xi)}{t - \xi} d\xi = G_m(t), \quad |t| \leq 1 \quad (m = 1, 2). \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
G_m &= \frac{1}{1 + \lambda^2 t^2} \left\{ f_m(t) - \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 \Omega_j(\xi) \Psi_{mj}[\omega(\xi, t)] d\xi \right\}; \\
\Omega_m(t) &= \frac{\Phi_m(t)}{1 + \lambda^2 t^2}; \quad f_m = \frac{1}{2} f_{m0}; \quad \omega(\xi, t) = \frac{2}{k} \operatorname{arctg} \frac{\lambda(t - \xi)}{1 + \lambda^2 \xi^2}; \\
\Psi_{11}(z) &= \frac{1}{a} [a_{22} K_{11}^0(z) - a_{21} K_{12}^0(z)]; \quad \Psi_{12}(z) = \frac{1}{a} [a_{11} K_{12}^0(z) - \\
& - a_{12} K_{11}^0(z)]; \quad \Psi_{21}(z) = \frac{1}{a} [a_{22} K_{21}^0(z) - a_{21} K_{22}^0(z)]; \\
\Psi_{22}(z) &= \frac{1}{a} [a_{11} K_{22}^0(z) - a_{12} K_{21}^0(z)]; \quad a = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.
\end{aligned}$$

Для построения решения системы уравнений (14) целесообразно воспользоваться одним из прямых методов решения сингулярных интегральных уравнений [1, 2, 6]. Для нахождения функций Ω_m применим обобщение метода Мультиппа [2]. Применяя этот метод в случае, когда нагрузка симметрична относительно сечения $\alpha = 0$, для определения коэффициентов интенсивности k_1 , соответствующего усилию N_1 , и k_3 — моменту M_1 , получаем формулы

$$k_i = \mu_i \sqrt{\frac{2R\lambda}{k} (1 + \lambda^2)} \sum_{j=1}^{n/2} A_{2j-1}^{(i)} \quad (i = 1, 3), \quad (15)$$

где

$$A_{2j-1}^{(i)} = \frac{4}{n} \sum_{\nu=1}^{n/2} \varphi_{\nu}^{(i)} \cos(2j-1)\theta_{\nu}; \quad \theta_{\nu} = \frac{2\nu-1}{2n} \pi; \quad \mu_1 = 1; \quad \mu_3 = Rc;$$

$\Phi_v^{(i)}$ — корни системы алгебраических уравнений

$$\sum_{v=1}^{n/2} (\alpha_{mv} \Phi_v^{(1)} + \beta_{mv} \Phi_v^{(2)}) = \frac{1}{2} f_m^{(1)},$$

$$\sum_{v=1}^{n/2} (\beta_{mv}^0 \Phi_v^{(1)} + \alpha_{mv}^0 \Phi_v^{(2)}) = \frac{1}{2} f_m^{(2)} \quad \left(m = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \right);$$
(16)

n — натуральное четное число, равное количеству чебышевских узлов. Коэффициенты системы алгебраических уравнений вычисляются по формулам

$$\alpha_{mv} = \frac{1}{2n} \{ \gamma_{mv} + A_m \lambda [\Psi_{11}(z_1) - \Psi_{11}(z_2)] \}, \quad \beta_{mv} = A_m \frac{\lambda}{2n} [\Psi_{12}(z_1) - \Psi_{12}(z_2)],$$

$$\alpha_{mv}^0 = \frac{1}{2n} \{ \gamma_{mv} + A_m \lambda [\Psi_{22}(z_1) - \Psi_{22}(z_2)] \}, \quad \beta_{mv}^0 = A_m \frac{\lambda}{2n} [\Psi_{21}(z_1) - \Psi_{21}(z_2)],$$
(17)

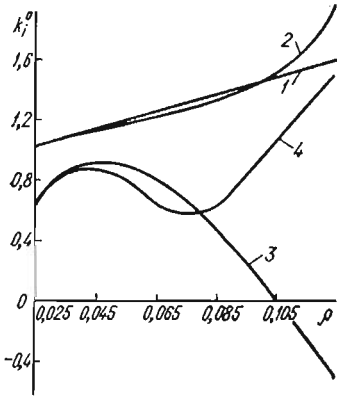
$$z_i = \frac{2}{k} \operatorname{arctg} \frac{\lambda [\cos \theta_v + (-1)^i \cos \theta_m]}{1 + (-1)^{i-1} \lambda^2 \cos \theta_m \cos \theta_v}, \quad A_m = \frac{1}{1 + \lambda^2 \cos^2 \theta_m},$$

$$\gamma_{mv} = \frac{1}{\sin \theta_m} \left[\operatorname{ctg} \frac{\theta_m \mp \theta_v}{2} + \operatorname{tg} \frac{\theta_m \mp \theta_v}{2} \right], \quad \theta_m = \frac{2m-1}{2n} \pi,$$

$$f_m^{(1)} = -A_m N_1^0, \quad f_m^{(2)} = \frac{A_m}{cR} M_1^0.$$

Верхний знак берется в случае, когда число $|m - v|$ нечетно, а нижний, когда оно четно.

Для случая, когда замкнутая оболочка растягивается равномерно рас-



пределенными усилиями N_0 , на ЭВМ «Минск-32» произведен численный анализ при следующих значениях параметров: $R = 0,15$ м; $h = 0,0015$ м; $\nu = 0,3$ при наличии в оболочке одной ($k = 1$) и семи ($k = 7$) трещин.

Приведенный рисунок иллюстрирует зависимость коэффициентов интенсивности усилий (k_1) и моментов (k_3) от относительной длины трещины $\rho = \frac{l}{\pi R}$ ($l = \pi R \beta_0$ — полу-длина трещины). Кривыми 1 ($k = 1$) и 2 ($k = 7$) представлена зависимость величины $k_1^0 = k_1 / N_0 \sqrt{l}$, а кривыми 3 ($k = 1$), 4 ($k = 7$) — величины $k_3^0 = k_3 / 0,125 N_0 \mu_3 \sqrt{l}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных уравнений. К., «Наук. думка», 1968. 287 с.
2. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М., «Наука», 1973. 304 с.
3. Осадчук В. А., Подстригач Я. С. К определению напряженного состояния в замкнутой цилиндрической оболочке и бесконечной пластинке с трещинами. — Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 3, с. 69—78.
4. Осадчук В. А., Никольшин М. М. Напряженное состояние в замкнутой цилиндрической оболочке с системой трещин. — Прикл. механика, 1976, 12, № 4, с. 26—31.
5. Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Никольшин М. М. Метод дисторсий в теории тонких оболочек. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 29—41.
6. Попов Г. Я. Об интегральных уравнениях теории упругости с разностными и суммарными ядрами. — ПММ, 1970, 34, № 4, с. 603—619.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
15.IX 1976 г.