$\rho\,[b\,(D_i)] = \nu_i - \mu_i$. Поэтому $\rho\,[S_a b\,(A)] = n - \sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i$, что и требовалось доказать.

**Теорема 2.** Пусть $d\,(\lambda) = \lambda^k + d_1\lambda^{k-1} + \ldots + d_{k-1}\lambda + d_k$ — НОД многочленов $a\,(\lambda)$ и $b\,(\lambda)$, $0 \leqslant \mu_i \leqslant \nu_i$. Тогда последние $n-k$ столбцов матрицы $S_a b\,(A)$ линейно независимы. Если $\tau_i = \sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha_{ij}\tau_j$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, где $\tau_i$ — $i$-й столбец матрицы $S_a b\,(A)$, то $d_l = \alpha_{k+1-l,k+1}$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $b\,(\lambda) = c\,(\lambda)\,d\,(\lambda)$, причем многочлены $c\,(\lambda)$ и $a\,(\lambda)$ взаимно просты. Поэтому $S_a b\,(A) = S_a c\,(A)\,d\,(A)$, где $S_a c\,(A)$ — невырожденная матрица, а $\rho\,[d\,(A)] = n-k$ на основании теоремы 1. Нетрудно убедиться, что первые $n-k$ строк матрицы $d\,(A)$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} d_k & d_{k-1} & d_{k-2} & \ldots & d_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & d_k & d_{k-1} & \ldots & d_2 & d_1 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & d_k & \ldots & d_3 & d_2 & d_1 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что последние $n-k$ столбцов матрицы $d\,(A)$ и, следовательно, матрицы $S_a b\,(A)$ являются линейно независимыми. Если $\delta_i = \sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha_{ij}\delta_j\,(i = 1, 2, \ldots, k)$, где $\delta_i$ — $i$-й столбец матрицы $d\,(A)$, то с учетом выражения $\tau_i = S_a c\,(A)\,\delta_i$ получаем, что

$$\tau_i = \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_{ij}\tau_j \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

с теми же коэффициентами $\alpha_{ij}$. Анализ первой строки матрицы $d\,(A)$ приводит к соотношениям $\alpha_{k+1-l,k+1} = d_l$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$, что и доказывает теорему.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Балинский А. И.* Некоторые способы исследования обобщенных задач на собственные значения. Канд. дис. Львов, 1972. 113 с.
2. *Barnett S.* Greatest common divisor of two polinomials.— Linear Algebra and Its Appl., 1970, N 3, p. 7—9.



Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР



Поступила в редколлегию
10.X 1976 г.



УДК 517.946



*И. Д. Пукальский*


# ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Исследованию свойств решений основных задач математической физики для параболических и эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами посвящены работы [2—6]. В статье [3] построены фундаментальные решения и изучены краевые задачи для параболических систем при минимальной гладкости коэффициентов. В настоящей работе устанавливаются экстремальные свойства решений краевых задач для параболических уравнений второго порядка с разрывами более высокого порядка, чем в работе [3].

Рассмотрим в области $Q=(0,\ T)\times\Omega$ для параболического уравнения

$$Lu\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(t,\ x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(t,\ x)}{|x-x^0|}\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{a_0(t,\ x)}{|x-x^0|^2}u=f(t,\ x) \quad (1)$$

задачу Дирихле и Неймана с краевыми условиями

$$u|_{t=0}=\varphi(x), \quad (2)$$

$$u|_\Gamma=\psi(t,\ x), \quad (3)$$

$$Bu|_\Gamma\equiv\left.\left(\sum_{k=1}^{n}b_k(t,\ x)\frac{\partial u}{\partial x_k}-b_0(t,\ x)u\right)\right|_\Gamma=g(t,\ x), \quad (4)$$

где $\Gamma=(0,\ T)\times S$; $S$ — граница ограниченной области $\Omega\subset E_n$, причем точка $x^\circ$ находится внутри $\Omega$; вектор $\mathbf{b}=(b_1,\ \ldots,\ b_n)$ образует с внутренней нормалью $\mathbf{n}$ к поверхности $S$ острый угол.

Предположим, что для коэффициентов уравнения (1) выполняется условие $A$: функции $a_{ij}(t,\ x)$, $a_i(t,\ x)$ $(i,\ j=1,\ \ldots,\ n)$, $a_0(t,\ x)$ определены и непрерывны в $Q$ и для всех $(t,\ x)\in Q$ и действительных $\xi=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)$, $|\xi|=1$ имеет место неравенство

$$e^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(t,\ x)\leqslant\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(t,\ x)\xi_i\xi_j\leqslant n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(t,\ x)$$

($e$ — постоянная эллиптичности, которая не меньше $n$).

Определим класс рассматриваемых решений. Через $Q^\circ$ обозначим цилиндр $Q$, за исключением множества точек

$$Q_{(t,x^\circ)}=\{(t,\ x)\in Q,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad x=x^\circ\}.$$

В $Q^\circ$ рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемые по $x$ и один раз по $t$ решения, которые при $x\to x^\circ$ допускают рост $u\ (t,\ x)=0\ (|x-x^\circ|^{-\beta})$, $\beta>0$. Обозначим это так: $u\ (t,\ x)\in C^{(2,1)}\ (\beta,\ Q^\circ)$, $C^{(2,1)}\ (Q^\circ)$ — совокупность решений $u\ (t,\ x)$, имеющих непрерывную производную второго порядка по $x$ и непрерывную производную по $t$ в $Q\diagdown Q_{(t,x^\circ)}$. Для решений краевых задач справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** Если выполняется условие A, $\varphi\ (x)\in C\ (\Omega)$, $\psi\ (t,\ x)\in C\ (\Gamma)$ и в окрестности точки $(t,\ x^\circ)$ выполняется неравенство $a_0\ (t,\ x)<0$, то для решения задачи Дирихле (1)—(3) из класса $C^{(2,1)}\ (Q^\circ)\cap C\ (\overline{Q})$, $\overline{Q}=\Gamma_T\cup\cup Q$, $\Gamma_T=\Gamma\cup\{(t,\ x),\ x\in\Omega,\ t=0\}$ выполняются неравенства: при $f\ (t,\ x)\leqslant 0$

$$u\ (t,\ x)\leqslant\max\{0,\ \max_\Omega\varphi\ (x),\ \max_\Gamma\psi\ (t,\ x),\ u\ (t,\ x^\circ)\}, \quad (5)$$

а при $f\ (t,\ x)\geqslant 0$

$$u\ (t,\ x)\geqslant\min\{0,\ \min_\Omega\varphi\ (x),\ \min_\Gamma\psi\ (t,\ x),\ u\ (t,\ x^\circ)\}. \quad (5')$$

При этом равенство достигается только на параболической границе области $\Gamma_T$ или на $Q_{(t,x^\circ)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $f\ (t,\ x)\leqslant 0$, и докажем неравенство (5). Возможны три случая: или $u\ (t,\ x)$ неположительна в $\overline{Q}$, или наибольшее в $\overline{Q}$ положительное значение $u\ (t,\ x)$ принимает на $\Gamma_T$, или это наибольшее значение принимается в какой-либо точке $M_1\ (t^1,\ x^1)\in Q$. В первом случае $\max\limits_{\overline{Q}}u\leqslant 0$, во втором — $0\leqslant\max\limits_{Q}u\leqslant\max\limits_{\Gamma_T}u$.

Пусть $M_1\in Q_{(t,x^\circ)}$, тогда рассмотрим третий случай и покажем, что $u\ (t^1,\ x^1)\leqslant\max\limits_{\Gamma_T\cup Q_{(t,x^\circ)}}u\ (t,\ x)$. Обозначим

$$Q_\delta=\{(t,\ x)\in Q,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad |x-x^\circ|<\delta\},$$

$S_\delta$ — граница $Q_\delta$, где $\delta$ — достаточно малое положительное число.

Если рассматривать решения уравнения (1) в области $Q \setminus Q_\delta$, то в силу теоремы 2.1 работы [2] $u(t, x) \leqslant \max\limits_{\Gamma_T \cup S_\delta} u(t, x)$.

Докажем неравенство $\max\limits_{S_\delta} u \leqslant \max\limits_{\Gamma_T} u$. Предположим, что $\max\limits_{\overline{Q}} u = \max\limits_{S_\delta} u = u(t^1, x^1)$, тогда, применяя обычный принцип максимума к области $Q \setminus Q_{\delta_1}$, $0 < \delta_1 < \delta$, получаем $u(t, x) < \max\limits_{\Gamma_T \cup S_{\delta_1}} u(t, x)$. Отсюда находим $\max\limits_{S_\delta} u(t, x) < \max\limits_{\Gamma_T} u(t, x)$. Покажем теперь, что значение функции $u(t, x)$ в области $Q_\delta \setminus Q_{(t,x^\circ)}$ не превосходит значения $u(t, x)$ на $\Gamma_T \cup Q_{(t,x^\circ)}$.

Пусть $M_\delta = \max\limits_{S_\delta} u(t, x)$. Рассмотрим функцию $v(x) = \ln|x - x^\circ|^{-1}$. Применим к $v(x)$ оператор $L$ и получим

$$Lv = |x - x^0|^{-2}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t, x) - 2\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t, x)\frac{(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}{|x - x^0|^2}\right] + \right.$$
$$\left. + \left[\sum_{i=1}^{n} a_i(t, x)\frac{(x_i - x_i^0)}{|x - x^0|} - a_0(t, x)\ln|x - x^0|^{-1}\right]\right\}.$$

В силу условия А первое слагаемое не меньше $(n-2)\,n^{-1}|x - x^\circ|^{-2} \times \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}(t, x)$. Выбирая $\delta$ достаточно малым, получаем $Lv > 0$ в области $Q \setminus Q_{(t,x^\circ)}$. Полагая в $Q \setminus Q_{(t,x^\circ)}$

$$W(t, x) = u(t, x) - M_\delta - d\ln|x - x^0|^{-1},$$

где $d > 0$ — некоторое число, получаем $W|_{S_\delta} < 0$ и

$$LW = f(t, x) + a_0(t, x)M_\delta - dLv(x) < 0,$$

так как $f(t, x) \leqslant 0$, $a_0(t, x) < 0$.

Если в некоторой точке $(\overline{t}, \overline{x}) \in Q_\delta \setminus Q_{(t,x^\circ)}$ было бы $u(t^3, x^3) > M_\delta$, то при достаточно малом $d = d(t^3, x^3)$ $W(t, x) > 0$, а в то же время при достаточно малом $|x^2 - x^\circ| < \delta_0 < \delta$ $W(t, x^*) < 0$. Применяя обычный принцип максимума в области $Q_\delta \setminus Q_{\delta_0}$, получаем $W(t, x) < 0$, что противоречит неравенству $W(\overline{t}, \overline{x}) > 0$. Значит, имеет место неравенство (5).

Неравенство (5′) доказывается аналогично. Только при рассмотрении решения $u(t, x)$ в точке наименьшего неположительного значения в качестве вспомогательной функции $W(t, x)$ берем

$$W_1(t, x) = u(t, x) + m_\delta + d\ln|x - x^0|^{-1},$$

где $m_\delta = -\min\limits_{S_\delta} u$, и доказываем, что $LW_1 > 0$ при $(t, x) \in Q_\delta \setminus Q_{(t,x^\circ)}$. Затем, повторяя приведенные выше рассуждения, приходим к оценке (5′). Теорема доказана.

**Теорема 1′.** Пусть выполнены все условия теоремы 1 и в окрестности $(t, x^\circ)$ выполняется неравенство

$$-\beta\sum_{i=1}^{n} a_i(t, x)(x_i - x_i^0)|x - x^0|^{-1} < \beta(1 - (\beta + 2)n^{-1})\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t, x) -$$
$$- a_0(t, x), \tag{6}$$

тогда для решения задачи Дирихле (1)—(3) из класса $C^{(2,1)}(\beta, Q^\circ) \cap C(\overline{Q}^\circ)$, $\overline{Q}^\circ = \Gamma_T \cup Q^\circ$ и для всех $(t, x) \in Q$ выполняются неравенства: при $f(t, x) \leqslant 0$

$$u(t, x) \leqslant \max\{0, \max_{\Gamma_T \cup Q_{(t,x^\circ)}} u(t, x)\}, \tag{7}$$

а при $f(t, x) \geqslant 0$

$$u(t, x) \geqslant \min\{0, \min_{\Gamma_T \cup Q_{(t,x^0)}} u(t, x)\}. \tag{7'}$$

При этом равенство возможно на $\Gamma_T \cup Q_{(t,x^\circ)}$.

Доказывается эта теорема так же, как и теорема 1, т. е. анализируются все возможные расположения положительного максимума и отрицательного минимума решения $u(t, x)$. Отличие в рассуждениях имеется только, когда доказывается, что значение в области $Q_\delta \diagdown Q_{(t,x^\circ)}$ не превосходит значения $u(t, x)$ на $\Gamma_T \cup Q_{(t,x^\circ)}$. Условие (6) означает, что $L(|x - x^\circ|^{-\beta}) > 0$. Найдутся такие малые числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что в области $Q_\delta$ будет $L(|x - x^\circ|^{-\beta-\varepsilon}) > 0$. Тогда, взяв вместо $v(x)$ функцию $v_1(x) = |x - x^\circ|^{-\beta-\varepsilon}$ и повторив приведенные рассуждения теоремы 1, получим $u(t, x) \leqslant \max_{\Gamma^T \cup Q_{(t,x^\circ)}} u(t, x)$ для всех $(t, x) \in Q_\delta$.

**Теорема 2.** Пусть выполняется условие А, $f(t, x) \geqslant 0$, поверхность $S$ принадлежит классу Дини $C^{(1,\omega)}$ [1] и для каждой точки $M_1 \in \Gamma$, в которой достигается отрицательный минимум решения $u(t, x)$ уравнения (1) из класса $C^{(2,1)}(Q^\circ) \cup C_x^1(Q \cup \Gamma)$, существует окрестность $K(M_1) \in Q^\circ$, такая, что в ней $u(t, x) > u(M_1)$. Тогда для каждой прямой $l$, образующей острый угол с нормалью n в точке $M_1$, производная $\frac{\partial u(M_1)}{\partial l}$ положительна.

Доказательство получается из теоремы 1 и теоремы 1 работы [1], примененной к области $Q \diagdown Q_\delta$.

**Теорема 3.** Предположим, что выполняется условие А, $a_0(t, x) < 0$ в окрестности точки $(t, x^\circ)$, $\varphi \in C(\Omega)$, $S \in C^{(1,\omega)}$, $g(t, x) \in C(\Gamma)$, $b_k(t, x) \in C(\Gamma)$ $(k = 0, \ldots, n)$, $b_0(t, x)|_\Gamma < 0$. Тогда для решения задачи Неймана (1), (2), (4) из класса $C^{(2,1)}(Q^\circ) \cap C_x^1(Q \cup \Gamma)$ и для всех $(t, x) \in Q$ выполняются неравенства: при $f(t, x) \leqslant 0$

$$u(t, x) \leqslant \max\{0, \max_\Omega \varphi(x), \max_\Gamma [g(t, x) b_0^{-1}(t, x)], u(t, x^0)\}, \tag{8}$$

а при $f(t, x) \geqslant 0$

$$u(t, x) \geqslant \min\{0, \min_\Omega \varphi(x), \min_\Gamma [g(t, x) b_0^{-1}(t, x)], u(t, x^0)\}. \tag{8'}$$

Равенство возможно на $\Gamma_T \cup Q_{(t,x^\circ)}$.

Доказывается теорема 3 так же, как и теорема 1. Отличие имеем только тогда, когда экстремум достигается на Г. Так, если $u(t, x)$ принимает свое наименьшее в $Q$ значение в какой-либо точке $M_1(t^1, x^1) \in \Gamma$, то $\sum_{k=1}^n b_k(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_k}\Big|_{M_1} > 0$ в силу теоремы 2. Из условия (4) получаем $u(M_1) \geqslant g(t, x) b_0^{-1}(t, x)|_{(t^1,x^1)}$. В случае максимума решения $u(t, x)$ имеем $u(t, x) \leqslant g(t, x) b_0^{-1}(t, x)|_{M_1}$.

Аналогичные теоремы о знаке косой производной и для решения задачи Неймана имеют место в классе $C^{(2,1)}(\beta, Q^\circ) \cap C_x^1(Q^\circ \cup \Gamma)$.

**Следствие.** Если выполнены условия теорем 1—3, то при $\psi \leqslant 0$, $\varphi \leqslant 0$, $f \leqslant 0$, $g \geqslant 0$ решение задач Дирихле и Неймана из соответствующих классов неположительно в $\overline{Q}^\circ$, при $\psi \geqslant 0$, $\varphi \geqslant 0$, $f \geqslant 0$, $g \leqslant 0$ решение задач (1)—(4) неотрицательно в $\overline{Q}^\circ$, а при $\varphi \equiv f \equiv g \equiv \psi \equiv 0$ решение задач (1)—(4) тождественно равно нулю в $\overline{Q}^\circ$.

Как показывает пример 1 (см. [2 с. 40]), условие (6) и ограничение на знак функции $a_0(t, x)$ существенны для справедливости теоремы единственности.

Таким образом, установлены неравенства для предполагаемого решения краевых задач в замкнутой области при условии ограниченности коэффициентов при старших производных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Камынин Л. И., Химченко Б. Н.* О принципе максимума для эллиптико-параболического уравнения второго порядка.— Сиб. мат. журн., 1972, 13, № 4, с. 773—789.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1971. 736 с.
3. *Матийчук М. И.* Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применения к краевым задачам.— Дифференц. уравнения, 1974, **10**, № 8, с. 1463—1477.
4. *Михайлов Л. Г.* Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами.— Тр. АН ТаджССР, 1963, № 1, с. 1—183.
5. *Парасюк Л. С.* Умови розв'язності і граничні властивості першої крайової задачі для еліптичних рівнянь другого порядку з розривними коефіцієнтами.— Допов. АН УРСР, 1970, № 10, с. 889—893.
6. *Турсунов М.* Об одной многомерной краевой задаче.— Докл. АН ТаджССР, 1969, **11**, № 5, с. 3—9.

Черновицкий университет

Поступила в редколлегию
5.1 1976 г.

УДК 519.21

*Л. Н. Федоренко*

## СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u(t, x, \omega)}{\partial t} = \sum_{0<|k|\leqslant 2b} a_k(t) D_x^k u(t, x, \omega) + b(t) u(t, x, \omega) \frac{d\xi(t, \omega)}{dt}, \quad (1)$$

$$u(t, x, \omega)|_{t=0} = \varphi(x, \omega). \quad (2)$$

Предположим, что коэффициенты уравнения (1) непрерывны при $t \geqslant 0$ и удовлетворяют условию равномерной параболичности в смысле И. Г. Петровского в каждом слое $\{0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in E_n\}$; $\xi(t, \omega)$ — винеровский процесс, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, F, P)$ при $t \geqslant 0$, а $F_t$ — монотонно возрастающее семейство $\sigma$-алгебр множеств из $F$, согласованное с $\xi(t, \omega)$; $\varphi(x, \omega)$ — случайная функция, определенная на $E_n \times \Omega$, измеримая относительно $F$, почти непрерывная и ограниченная.

Согласно определению стохастического дифференциала задачу (1), (2) следует понимать как решение стохастического интегрального уравнения

$$u(t, x, \omega) = \varphi(x, \omega) + \int_0^t \sum_{0<|k|\leqslant 2b} a_k(\tau) D_x^k u(\tau, x, \omega)\, d\tau + \int_0^t b(\tau) u(\tau, x, \omega)\, d\xi(\tau, \omega).$$

Как показано в работе [1], решение задачи (1), (2) существует и единственно в классе случайных функций, определенных в слое $\Pi_{[0,T]} = [0, T] \times E_n \times \Omega$, измеримых при почти всех $\omega$ по $t$, $x$ относительно $\sigma$-алгебры борелевских множеств в $[0, T] \times E_n$, а по $\omega$ при почти всех $t$ и $x$ относительно $F_t$ и интегрируемых с квадратом по $t$, $x$, $\omega$ в слое $\Pi_{[0,T]}$. В доказательстве существенным являлось условие

$$\int_0^T b^2(\tau)\, d\tau < \infty.$$