1) $\alpha \neq 0$, $u \equiv 0$ в области D_l независимо от $\sigma(P)$, $B_j \equiv 0$ $(j = \overline{1, n})$;

2) $\alpha = 0$, $u \equiv 0$, так как в противном случае квадратичные формы действительных и мнимых частей функции $u = u_1 + iu_2$ в левой части равенства будут положительно определены, если в D_l выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_j}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} B_j^2 + \beta^2 > 0,$$

а подынтегральное выражение первого слагаемого справа будет отрицательным, если

$$\sum_{j=1}^{n} B_j \cos(\widehat{\overline{n}, \overline{x}_j}) - \sigma(P)|_S \leqslant 0;$$

полученное противоречие указывает на то, что $u \equiv 0$;

3) $\alpha = 0$, $u \equiv 0$, если $\sigma(P) \geqslant 0$, так как неравенства (4) выполняются при $B_j \equiv 0$ $(j = \overline{1, n})$.

Заметим, что теорема единственности (3) работы [2] следует из случаев 1), 3).

Для решения неравенств (4) берем функции $B_j(x)$ в виде $B_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\sigma^*$, где $\sigma^* = \max\limits_S |\sigma|$; φ — нормальное уравнение поверхности S [4]. Тогда

$$\sigma^* \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} - (\sigma^*)^2 \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)^2 + \beta^2 > 0,$$

$$\sigma^* \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \cos(\widehat{\overline{n}, \overline{x}_j}) - \sigma|_S \leqslant 0.$$

Эти неравенства будут выполняться, если

$$\beta^2 > (\sigma^*)^2 \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)^2 - \sigma^* \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2}.$$

Таким образом, получен простой достаточный признак единственности задачи (1)—(3) в случае, когда $\sigma < 0$. Из теоремы Жиро вытекает, что если граница области и функции f, σ достаточно гладкие, то из единственности решения задачи (1)—(3) следует ее разрешимость.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векуа И. Н.* О метагармонических функциях.— Тр. Тбил. мат. ин-та, 1943, № 12, с. 105—174.
2. *Данилова И. А.* Внешние краевые задачи для уравнения Гельмгольца.— Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1968, **103**, с. 58—72.
3. *Купрадзе В. Д.* Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М.—Л., Гостехиздат, 1950. 280 с.
4. *Рвачев В. Л.* Методы алгебры логики в математической физике. К., «Наук. думка», 1974. 259 с.

Луцкий филиал Львовского политехнического института

Поступила в редколлегию 23.III 1976 г.

УДК 517.946.519.4/5

И. М. Ковальчик

ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ПРОИЗВЕДЕНИИ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Для упрощения и вычисления континуальных интегралов большое значение имеют формулы преобразования этих интегралов при различных заменах переменной интегрирования (см. ссылки в [1, 2]). В данной работе рассматривается преобразование кратных интегралов Винера в пространстве непрерывных функций двух переменных при ортогональном преобразовании в функциональном пространстве. Полученная формула применима, в частности, для вычисления континуальных интегралов. Кроме того, с помощью доказанной теоремы выражается решение некоторой системы интегральных уравнений типа Вольтерра — Стилтьеса через континуальный интеграл.

Пусть C_2 — пространство непрерывных функций $x = x(t, s)$ $(t, s) \in Q = [0, 1] \times [0, 1]$, удовлетворяющих условию $x(t, 0) = x(0, s) = 0$, и $C_2^p = \underbrace{C_2 \times \ldots \times C_2}_{p}$. Мера в пространстве C_2^p, обобщающая меру Винера, рассмотрена в работе [3].

Если $F(x_1, \ldots, x_p)$ — измеримый функционал, заданный на пространстве C_2^p, то интеграл, построенный по данной мере, называется p-кратным интегралом Винера в пространстве непрерывных функций двух переменных и обозначается символом

$$\int\limits_{C_2^p} F(x_1, \ldots, x_p)\, d_W x_1 \ldots d_W x_p.$$

Функционал $F(x_1, \ldots, x_p)$ предполагаем непрерывным в пространстве C_2^p и мажорируемым интегрируемым функционалом.

Рассмотрим следующее преобразование:

$$x_k(t, s) \to y_k(t, s) = \sum_{l=1}^{p} \int\limits_0^t \int\limits_0^s a_{kl}(\tau, \sigma)\, dx_l(\tau, \sigma) \quad (k = \overline{1, p};\ p \geqslant 2), \tag{1}$$

где $\| a_{ij}(t, s) \|_{i,j=1}^p$ — матрица ортогонального преобразования,

$$\det \| a_{ij}(t, s) \|_{i,j=1}^p = 1 \tag{2}$$

и

$$\sum_{k=1}^{p} a_{kl}(t, s)\, a_{kj}(t, s) = \delta_{lj} \quad (i, j = \overline{1, p}). \tag{3}$$

Будем предполагать, что $a_{kl}(t, s)$ — функции ограниченной вариации в следующем смысле. Пусть функция $a(t, s)$ задана на квадрате Q. Квадрат Q делится на части с помощью точек

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1, \quad 0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$$

и составляется сумма

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a(t_i, s_j) - a(t_{i-1}, s_j) - a(t_i, s_{j-1}) + a(t_{i-1}, s_{j-1})|.$$

Если при всевозможной разбивке квадрата Q множество значений сумм S_{mn} есть ограниченное множество, то функция $a(t, s)$ называется функцией ограниченной вариации. В дальнейшем будем дополнительно предполагать, что $a(t, s)$ есть также функция ограниченной вариации по каждой из переменных.

Если $x(t, s)$ — непрерывна на Q, а $a(t, s)$ — ограниченной вариации на Q, то интеграл Стилтьеса $\int\limits_Q x(t, s)\, da(t, s)$ определяется как предел сумм

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x(t_i^*, s_j^*)\, [a(t_i, s_j) - a(t_{i-1}, s_j) - a(t_i, s_{j-1}) + a(t_{i-1}, s_{j-1})],$$

где $t_{i-1} < t_i^* < t_i$, $s_{j-1} < s_j^* < s_j$ при беспредельном измельчении промежутков деления. Интеграл $\int\limits_Q a(t, s)\, dx(t, s)$ определяется с помощью формулы интегрирования по частям.

Теорема 1. Если $\exists \int\limits_{C_2^p} F(y_1, \ldots, y_p)\, d_W y_1 \ldots d_W y_p$, то преобразование (1) сохраняет меру и справедлива формула

$$\int\limits_{C_2^p} F(y_1, \ldots, y_p)\, d_W y_1 \ldots d_W y_p = \int\limits_{C_2^p} F\left[\sum_{l=1}^{p} \int\limits_0^{(\cdot)} \int\limits_0^{(\cdot)} a_{1l}(\tau, \sigma)\, dx_l(\tau, \sigma), \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, \sum_{l=1}^{p} \int\limits_0^{(\cdot)} \int\limits_0^{(\cdot)} a_{pl}(\tau, \sigma)\, dx_l(\tau, \sigma)\right] d_W x_1 \ldots d_W x_p. \tag{4}$$

Приведем схему доказательства. Квадрат Q, как и ранее, разбиваем на mn прямоугольников. Функции $y_k(t, s)$ заменяем полигональными функциями $\hat{y}_k^{mn}(t, s)$ $(k = \overline{1, p})$, совпадающими с функциями $y_k(t, s)$ на сторонах элементарных прямоугольников. Функционал $F(y_1, \ldots, y_p)$ превращается на функциях $\hat{y}_k^{mn}(t, s)$ в функцию mnp переменных, и [3]

$$\int\limits_{C_2^p} F(y_1, \ldots, y_p)\, d_W y_1 \ldots d_W y_p = \lim_{\substack{\max\limits_i |t_i - t_{i-1}| \to 0, \\ \max\limits_j |s_j - s_{j-1}| \to 0}} K_{mn}^p \int\limits_{R_{mnp}} F_{mn}(y_1^{11}, \ldots, y_1^{mn}, \ldots$$

$$\ldots, y_p^{11}, \ldots, y_p^{mn}) \exp\left[-\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \frac{(y_k^{ij} - y_k^{i-1,j} - y_k^{i,j-1} + y_k^{i-1,j-1})^2}{(t_i - t_{i-1})(s_j - s_{j-1})}\right] \times$$

$$\times\, dy_1^{11} \ldots dy_p^{mn}. \tag{5}$$

Здесь R_{mnp} означает mnp-мерное евклидово пространство, а

$$K_{mn} = \left[\pi_{mn} \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (t_i - t_{i-1})(s_j - s_{j-1})\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Как отмечено в работе [4], при вычислении континуального интеграла от непрерывного функционала можно полигональные функции заменить ступенчатыми. Величина интеграла при этом не изменится. Пусть при $(t, s) \in [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$

$$y_k(t, s) = y_k(t_i, s_j) = y_k^{ij}.$$

Аналогично заменяются ступенчатыми функции

$$a_{kl}(t_i, s_j) = a_{kl}^{ij} = \text{const} \quad (i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n};\ k, l = \overline{1, p}).$$

Кроме того, полагаем, что

$$x_l(t_i, s_j) = x_l^{ij} \quad (i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n};\ l = \overline{1, p}).$$

Из соотношения (1) следует, что

$$y_k(t_i, s_j) = \sum_{l=1}^{p} \int\limits_0^{t_i} \int\limits_0^{s_j} a_{kl}(\tau, \sigma)\, dx_l(\tau, \sigma).$$

Далее проделываем элементарные преобразования:

$$y_k(t_i, s_j) = \sum_{l=1}^{p} \sum_{\alpha=1}^{i} \sum_{\beta=1}^{j} \int\limits_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} \int\limits_{s_{\beta-1}}^{s_\beta} a_{kl}(\tau, \sigma)\, dx_l(\tau, \sigma),$$

$$y_k^{ij} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{\alpha=1}^{i} \sum_{\beta=1}^{j} a_{kl}^{\alpha\beta} (x_l^{\alpha\beta} - x_l^{\alpha-1,\beta} - x_l^{\alpha,\beta-1} + x_l^{\alpha-1,\beta-1}). \tag{6}$$

Интеграл в правой части формулы (5) подвергается преобразованию (6).

Якобиан преобразования в силу условия (2) равен единице. Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\frac{(y_k^{ij}-y_k^{i-1,j}-y_k^{i,j-1}+y_k^{i-1,j-1})^2}{(t_i-t_{i-1})(s_j-s_{j-1})}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\frac{\left[\sum_{l=1}^{p}a_{kl}^{ij}(x_l^{ij}-x_l^{i-1,j}-x_l^{i,j-1}+x_l^{i-1,j-1})\right]^2}{(t_i-t_{i-1})(s_j-s_{j-1})}.$$

На основании условия (3) последнее выражение равно

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\frac{(x_k^{ij}-x_k^{i-1,j}-x_k^{i,j-1}+x_k^{i-1,j-1})^2}{(t_i-t_{i-1})(s_j-s_{j-1})}.$$

Таким образом,

$$K_{mn}^p\int\limits_{R_{mnp}}F_{mn}(y_1^{11},\ \ldots,\ y_1^{mn},\ \ldots,\ y_p^{11},\ \ldots,\ y_p^{mn})\times$$

$$\times\exp\left[-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\frac{(y_k^{ij}-y_k^{i-1,j}-y_k^{i,j-1}+y_k^{i-1,j-1})^2}{(t_i-t_{i-1})(s_j-s_{j-1})}\right]dy_1^{11}\ldots dy_p^{mn}=$$

$$=K_{mn}^p\int\limits_{R_{mnp}}F_{mn}\left[\sum_{l=1}^{p}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{s_1}a_{1l}(\tau,\ \sigma)\,dx_l(\tau,\ \sigma),\ \ldots\right.$$

$$\ldots,\ \sum_{l=1}^{p}\int\limits_0^{t_m}\int\limits_0^{s_n}a_{1l}(\tau,\ \sigma)\,dx_l(\tau,\ \sigma),\ \ldots,\ \sum_{l=1}^{p}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{s_1}a_{pl}(\tau,\ \sigma)\,dx_l(\tau,\ \sigma),\ \ldots$$

$$\left.\ldots,\ \sum_{l=1}^{n}\int\limits_0^{t_m}\int\limits_0^{s_n}a_{pl}(\tau,\ \sigma)\,dx_l(\tau,\ \sigma)\right]\times$$

$$\times\exp\left[-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\frac{(x_k^{ij}-x_k^{i-1,j}-x_k^{i,j-1}+x_k^{i-1,j-1})^2}{(t_i-t_{i-1})(s_j-s_{j-1})}\right]dx_1^{11}\ldots dx_p^{mn}.$$

Отсюда после перехода к пределу получаем формулу (4). Формула (4) верна и тогда, когда функции $a_{kl}(t,\ s)\in L_2(Q)$. Она применима для вычисления континуальных интегралов. Так, континуальный интеграл

$$\int\limits_{C_2^2}\exp\left[2\lambda^2\int\limits_0^1\int\limits_0^1 x(t,\ s)\,y(t,\ s)\,dtds\right]d_Wxd_Wy$$

при специальном выборе функций $a_{kl}(t,\ s)$ сводится на основании формулы (4) к произведению однократных интегралов, вычисление которых осуществляется по формулам работы [5].

Соотношение (1) можно рассматривать как систему уравнений относительно неизвестных функций $x_k(t,\ s)$ $(k=\overline{1,\ p})$, считая функции $a_{kl}(t,\ s)$ и $y_k(t,\ s)$ $(k,\ l=\overline{1,\ p})$ заданными. Перепишем ее в операторной форме

$$y=Ax.$$

Теорема 2. Пусть функции $a_{kl}(t,\ s)\in L_2(Q)$ удовлетворяют условиям (2), (3), $\frac{\partial^2 y_k(t,\ s)}{\partial t\partial s}\in L_2(Q)$ и $\exists A^{-1}$. Тогда

$$x_k(t,\ s)=\exp\left\{-\sum_{k=1}^{p}\int\limits_Q\left[\frac{\partial^2 y_k(t,\ s)}{\partial t\partial s}\right]^2dtds\right\}\int\limits_{C_2^p}u_k(t,\ s)\times$$

$$\times\exp\left\{2\sum_{k=1}^{p}\int\limits_Q\frac{\partial^2 y_k(t,\ s)}{\partial t\partial s}\,d_{t,s}\left[\sum_{l=1}^{p}\int\limits_0^t\int\limits_0^s a_{kl}(\tau,\ \sigma)\,du_l(\tau,\ \sigma)\right]\right\}d_Wu_1\ldots d_Wu_p.$$

Доказательство. Пусть

$$x_k(t, s) = g_k(y_1, \ldots, y_p; t, s) \equiv g_k(y_1, \ldots, y_p)$$

— искомое решение системы (1). Так как A — линейный оператор, то

$$g_k(y_1 + u_1, \ldots, y_p + u_p) = g_k(y_1, \ldots, y_p) + g_k(u_1, \ldots, u_p).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{C_2^p} g_k(y_1 + u_1, \ldots, y_p + u_p)\, d_W u_1 \ldots d_W u_p = g_k(y_1, \ldots, y_p).$$

Если $F(x_1, \ldots, x_p)$ — определенный на C_2^p непрерывный функционал, мажорируемый интегрируемым функционалом, а $x_k^0(t, s)$ $(k = \overline{1, p})$ — заданные функции из C_2^p с производными $\frac{\partial^2 x_k^0(t, s)}{\partial t \partial s} \in L_2(Q)$, то при преобразовании

$$x_k(t, s) \to y_k(t, s) = x_k(t, s) + x_k^0(t, s) \quad (k = \overline{1, p})$$

имеет место формула [3]

$$\int\limits_{C_2^p} F(y_1, \ldots, y_p)\, d_W y_1 \ldots d_W y_p = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{p} \int\limits_Q \left[\frac{\partial^2 x_k^0(t, s)}{\partial t \partial s}\right]^2 dt ds\right\} \times$$

$$\times \int\limits_{C_2^p} F(x_1 + x_1^0, \ldots, x_p + x_p^0) \exp\left\{-2 \sum_{k=1}^{p} \int\limits_Q \frac{\partial^2 x_k^0(t, s)}{\partial t \partial s} dx_k(t, s)\right\} \times$$

$$\times\, d_W x_1 \ldots d_W x_p.$$

Положим в данной формуле $x_k^0(t, s) = -y_k(t, s)$ и $F(x_1, \ldots, x_p) = g_k(x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p)$. Тогда

$$\int\limits_{C_2^p} g_k(y_1 + u_1, \ldots, y_p + u_p)\, d_W u_1 \ldots d_W u_p = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{p} \int\limits_Q \left[\frac{\partial^2 y_k(t, s)}{\partial t \partial s}\right]^2 dt ds\right\} \times$$

$$\times \int\limits_{C_2^p} g_k(u_1, \ldots, u_p) \exp\left[2 \sum_{k=1}^{p} \int\limits_Q \frac{\partial^2 y_k(t, s)}{\partial t \partial s} du_k(t, s)\right] d_W u_1 \ldots d_W u_p.$$

Левая часть упрощается и

$$g_k(y_1, \ldots, y_p) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{p} \int\limits_Q \left[\frac{\partial^2 y_k(t, s)}{\partial t \partial s}\right]^2 dt ds\right\} \times$$

$$\times \int\limits_{C_2^p} g_k(u_1, \ldots, u_p) \exp\left[2 \sum_{k=1}^{n} \int\limits_Q \frac{\partial^2 y_k(t, s)}{\partial t \partial s} du_k(t, s)\right] d_W u_1 \ldots d_W u_p. \quad (7)$$

Подставим в формуле (4) вместо функционала F подынтегральное выражение в правой части формулы (7) и получим

$$\int\limits_{C_2^p} g_k(u_1, \ldots, u_p) \exp\left[2 \sum_{k=1}^{n} \int\limits_Q \frac{\partial^2 y_k(t, s)}{\partial t \partial s} du_k(t, s)\right] d_W u_1 \ldots d_W u_p =$$

$$= \int\limits_{C_2^p} g_k\left[\sum_{l=1}^{p} \int\limits_0^t \int\limits_0^s a_{1l}(\tau, \sigma)\, du_l(\tau, \sigma), \ldots, \sum_{l=1}^{p} \int\limits_0^t \int\limits_0^s a_{pl}(\tau, \sigma)\, du_l(\tau, \sigma)\right] \times$$

$$\times \exp\left\{2 \sum_{k=1}^{p} \int\limits_Q \frac{\partial^2 y_k(t, s)}{\partial t \partial s} d_{t,s}\left[\sum_{l=1}^{p} \int\limits_0^t \int\limits_0^s a_{kl}(\tau, \sigma)\, du_l(\tau, \sigma)\right]\right\} d_W u_1 \ldots d_W u_p.$$

Теперь формула (7) перепишется следующим образом:

$$x_k(t,\ s) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{p}\iint_Q \left[\frac{\partial^2 y_k(t,\ s)}{\partial t\partial s}\right]^2 dtds\right\}\int_{C_2^p} u_k(t,\ s)\times$$

$$\times\exp\left\{2\sum_{k=1}^{p}\int_Q \frac{\partial^2 y_k(t,\ s)}{\partial t\partial s}\,d_{t,s}\left[\sum_{l=1}^{p}\int_0^t\int_0^s a_{kl}(\tau,\ \sigma)\,du_l(\tau,\ \sigma)\right]\right\} d_W u_1\ \ldots\ d_W u_p.$$

Аналогичные результаты справедливы в пространстве $C^p = \underbrace{C\times\ldots\times C}_{p}$, где C — пространство непрерывных функций $x = x(t)$, удовлетворяющих условию $x(0) = 0$. Интеграл по данному пространству по мере Винера — так называемый кратный интеграл Винера [6] — обозначается символом $\int\limits_{C^p} F(x_1,\ \ldots,\ x_p)\,d_W x_1 \ldots d_W x_p$.

В пространстве C^p рассмотрим преобразование

$$x_k(t) \to y_k(t) = \sum_{l=1}^{p}\int_0^t a_{kl}(\tau)\,dx_l(\tau)\quad (k = \overline{1,\ p};\ p \geqslant 2), \tag{1'}$$

$$\det\|a_{kl}(t)\|_{k,l=1}^{p} = 1, \tag{2'}$$

$$\sum_{k=1}^{p} a_{ki}(t)\,a_{kj}(t) = \delta_{ij}\quad (i,\ j = \overline{1,\ p}), \tag{3'}$$

где функции $a_{kl}(t)$ являются функциями ограниченной вариации.

Теорема 1′. Если $\exists\int\limits_{C^p} F(y_1,\ \ldots,\ y_p)\,d_W y_1 \ldots d_W y_p$, то преобразование (1′) сохраняет меру и справедлива формула

$$\int_{C^p} F(y_1,\ \ldots,\ y_p)\,d_W y_1\ \ldots\ d_W y_p = \int_{C^p} F\left[\sum_{l=1}^{p}\int_0^{(\cdot)} a_{1l}(\tau)\,dx_l(\tau),\ \ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\ \sum_{l=1}^{p}\int_0^{(\cdot)} a_{pl}(\tau)\,dx_l(\tau)\right] d_W x_1\ \ldots\ d_W x_p. \tag{4'}$$

Если $p = 2$ и

$$\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta(t) & -\sin\theta(t)\\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t)\end{pmatrix},$$

то результат, выражаемый теоремой 1′, содержится в статье [7]. Другой вариант теоремы об ортогональном преобразовании в пространстве C^p имеется в работе [8].

Соотношение (1′) можно рассматривать как систему уравнений относительно функций $x_k(t)$:

$$y = Ax.$$

Теорема 2′. Пусть функции $a_{kl}(t) \in L_2\,[0,\ 1]$ удовлетворяют условиям (2′), (3′), $y_k'(t) \in L_2\,[0,\ 1]$ и $\exists A^{-1}$. Тогда

$$x_k(t) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{p}\int_0^1 [y_k'(t)]^2\,dt\right\}\int_{C^p} u_k(t)\times$$

$$\times\exp\left\{2\sum_{k=1}^{p}\int_0^1 y_k'(t)\,d_t\left[\sum_{l=1}^{p}\int_0^t a_{kl}(\tau)\,du_l(\tau)\right]\right\} d_W u_1\ \ldots\ d_W u_p.$$

Результаты, аналогичные теоремам 1, 2, тривиально обобщаются на случай пространства непрерывных функций многих переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Далецкий Ю. Л.* Интегрирование в функциональных пространствах.— В кн.: Итоги науки. Математический анализ. М., 1967, с. 83—124.
2. *Ковальчик И. М.* Интеграл Винера.— Успехи мат. наук, 1963, 18, № 1, с. 97—134.
3. *Ковальчик І. М.* Кратнийконтинуальний інтеграл та характеристична задача для деякої системи диференціальних рівнянь.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1971, № 4, с. 303—306.
4. *Далецкий Ю. Л.* Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями.— Успехи мат. наук, 1962, 17, № 5, с. 3—115.
5. *Ковальчик І. М.* Континуальний інтеграл у просторі C_2 від виразів, що містять квадратичний функціонал.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1974, № 2, с. 110—113.
6. *Ковальчик И. М.* Некоторые преобразования кратных интегралов Винера.— Укр. мат. журн., 1960, 12, № 1, с. 25—31.
7. *Bearman J. E.* Rotations in the product of two Wiener spaces.— Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, N 1, p. 129—137.
8. *Cameron R. H., Storvick D. A.* Two related integrals over spaces of continuous functions.— Pacif. J. Math., 1974, 55, N 1, p. 19—37.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 11.V 1976 г.

УДК 513.88

В. Э. Лянце, О. Г. Сторож

ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЯВЛЯЕТСЯ ТЕНЗОРНЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ

Предлагается следующий подход к понятию тензорного умножения. Через X, Y, Z, Z_1, Z_2, ... обозначаем линейные пространства над полем комплексных чисел C, через b, b_1, b_2, ... — билинейные отображения, заданные на $X \times Y$ и принимающие значения соответственно в Z, Z_1, Z_2, ... Рассмотрим равенство вида

$$\sum_{\alpha=1}^{n} b(x_\alpha, y_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{p} b(\tilde{x}_\beta, \tilde{y}_\beta), \quad x_\alpha, \tilde{x}_\beta \in X, \quad y_\alpha, \tilde{y}_\beta \in Y. \tag{1}$$

Условимся называть билинейное отображение b_1 старшим билинейного отображения b_2, если из того, что соотношение (1) выполняется для некоторых x_α, $\tilde{x}_\beta$, y_α, $\tilde{y}_\beta$ при $b = b_1$ вытекает, что оно выполняется для этих же x_α, $\tilde{x}_\beta$, y_α, $\tilde{y}_\beta$ при $b = b_2$. Билинейное отображение назовем тензорным отображением, если оно старше любого билинейного отображения. Таким образом, если $\{x, y\} \to x \otimes y$ — тензорное отображение, то из равенства

$$\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \otimes y_\alpha = \sum_{\beta=1}^{p} \tilde{x}_\beta \otimes \tilde{y}_\beta, \quad x_\alpha, \tilde{x}_\beta \in X, \ y_\alpha, \tilde{y}_\beta \in Y \tag{2}$$

вытекает, что (1) выполняется для любого билинейного отображения b.

Легко видеть, что для того чтобы билинейное отображение $\{x, y\} \to \to x \otimes y$ было тензорным, достаточно (и необходимо), чтобы для любого билинейного функционала b: $X \times Y \to C$ из (2) вытекало (1). Из этого определения очевидным способом вытекает следующее утверждение, которое обычно полагается в основу понятия тензорного умножения [1, 2].

Пусть на $X \times Y$ задано тензорное отображение $\otimes$ и пусть b: $X \times Y \to \to Z$ — некоторое билинейное отображение. Положим

$$l\left(\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \otimes y_\alpha\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{\alpha=1}^{n} b(x_\alpha, y_\alpha), \quad x_\alpha \in X, \quad y_\alpha \in Y. \tag{3}$$

Формула (3) определяет однозначное отображение l: $X \otimes Y \to Z$, где $X \otimes \otimes Y$ обозначает линейную оболочку в Z множества $\{x \otimes y, x \in X, y \in Y\}$.