

$B, C, D, \gamma, \delta, u, v, \nu$. По этим параметрам, используя результаты теорем 1 и 2, устанавливаем неравенство (11), которое в случае разложения оригинала по присоединенным полиномам Лежандра примет вид

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(\sigma\tau/4)}{\sqrt{\sigma} [1 - \exp(-\sigma\tau)]^{1/4}} N^{-\frac{3}{2}} \leq \varepsilon.$$

На рисунке с точностью до $\varepsilon = 0,01$ построен график зависимости $k_1^T(\tau) = -\frac{\lambda^* + 2\mu}{2\mu\beta_1 T_0 b \sqrt{l}} k_1(\tau)$ как функции безразмерного времени $\tau = ct/l^2 b^2$, когда пластинка теплоизолирована с боковых поверхностей ($\kappa = 0$) и температура T_0 задана на всей длине трещины ($f = 1$). Как видно из рисунка, коэффициент интенсивности напряжений достаточно быстро увеличивается в начальные моменты времени $0 < \tau \leq 1$, а затем очень медленно приближается к значению, соответствующему стационарному случаю (этот случай отмечен на рисунке штриховой линией).

ЛИТЕРАТУРА

1. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. М., «Выш. школа», 1975. 407 с.
2. Крылов В. И., Скобля Н. С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М., «Наука», 1974. 223 с.
3. Кит Г. С., Побережный О. В. Нестационарная задача термоупругости для пластинки с трещиной при наличии теплоотдачи с боковых поверхностей.— ФХММ, 1974, № 4, с. 73—78.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М., «Наука», 1970. 800 с.
5. Цирулис Т. Т., Белов М. А. Асимптотические методы исследования схемы Папулиса для приближенного обращения преобразования Лапласа.— Учен. зап. Латв. ун-та, 1973, № 292, с. 139—154.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
15.II 1977 г.

УДК 539.377

М. Г. Кривцун

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ КРИВОЛИНЕЙНЫХ РАЗРЕЗОВ

Рассмотрим упругую изотропную плоскость с периодической системой трещин, расположенных вдоль неограниченного числа гладких дуг L_k , комплексные координаты точек которых выражаются через точки $\tau^{(0)}$ дуги L_0 соотношением

$$\tau^{(k)} = kd + \tau^{(0)}, \quad (1)$$

где d — действительная постоянная (период задачи). Определим напряженное состояние такой плоскости, когда она при стационарной температуре $T(x, y)$ нагружена внешними усилиями. Предполагаем, что берега трещин в процессе деформации не контактируют.

Задача теплопроводности. Пусть на контуре $L = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} L_k$ задано одно из условий [3]

$$T^\pm(\tau) = f^\pm(\tau), \quad (2)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)^\pm = \mp q^\pm(\tau), \quad (3)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)^\pm - h(\tau)(T^+ - T^-) = q_a(\tau). \quad (4)$$

Здесь n — нормаль к левому берегу разреза; λ — коэффициент теплопроводности тела; $h(\tau)$ — теплопроницаемость трещин; индексы «+» и «-» указывают на предельные значения соответствующих величин слева и справа от линии L .

Следуя работе [3], представим температурное поле в плоскости с разрезами так:

$$T(x, y) = 2\operatorname{Re} F(z), \quad F(z) = F_0(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\gamma(\tau) + i\Gamma(\tau)}{\tau - z} d\tau + C, \quad (5)$$

где $F_0(z)$ — комплексный потенциал температурного поля в сплошной плоскости; $\gamma(\tau)$ и $\Gamma(\tau)$ — действительные функции комплексной переменной, представляющие собой соответственно плотности логарифмического потенциала двойного слоя и видоизмененного потенциала простого слоя.

Рассмотрим случай, когда на берегах трещин задана температура. Удовлетворяя граничному условию (2), находим, что $\gamma(\tau) = f_1(\tau)$, а функция $\Gamma(\tau)$ определяется из интегрального уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_L \Gamma(\tau) \operatorname{Re} \left\{ \frac{d\tau}{\tau - \tau_0} \right\} = f_2(\tau_0) - C - \frac{1}{\pi} \int_L f_1(\tau) \operatorname{Im} \left\{ \frac{d\tau}{\tau - \tau_0} \right\}, \quad \tau_0 \in L, \quad (6)$$

где

$$f_1(\tau) = \frac{1}{2} [f^+(\tau) - f^-(\tau)]; \quad f_2(\tau) = \frac{1}{2} [f^+(\tau) + f^-(\tau)] - 2\operatorname{Re} F_0(\tau).$$

Предположим, что функции $f_i(\tau)$ удовлетворяют условию периодичности

$$f_i(kd + \tau) = f_i(\tau). \quad (7)$$

Тогда этому условию будет удовлетворять также функция $\Gamma(\tau)$. Зафиксируем в уравнении (6) $\tau_0 \in L_0$ и запишем интеграл по L в виде суммы интегралов по L_k . После замены переменной интегрирования (1) и суммирования ядер уравнение для определения $\Gamma(\tau)$ примет вид

$$\frac{1}{d} \int_{L_0} \Gamma(\tau) \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau - \tau_0)}{d} d\tau \right\} = f_2(\tau_0) - C - \frac{1}{d} \int_{L_0} f_1(\tau) \times \\ \times \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau - \tau_0)}{d} d\tau \right\}. \quad (8)$$

Постоянная C , выражающая значение температурного поля на бесконечности, может быть определена из условия существования [1] ограниченного на концах разреза решения уравнения (8).

Продифференцируем уравнение (8) по τ_0 , умножим полученное выражение на $-ie^{i\alpha_0}$ и проинтегрируем левую часть уравнения по частям с использованием условия

$$\Gamma(\tau_1) = \Gamma(\tau_2) = 0, \quad (9)$$

где τ_1, τ_2 — комплексные координаты начала и конца дуги L_0 ; α — угол между осью Ox и нормалью к левому берегу разреза; $\alpha_0 = \alpha(\tau_0)$. В результате для определения $\Gamma'(\tau)$ получим уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_0} \Gamma'(\tau) \operatorname{Re} M(\tau, \tau_0) d\tau = f_*(\tau_0), \quad \tau_0 \in L_0, \quad (10)$$

где

$$M(\tau, \tau_0) = \frac{\pi}{di} e^{i\alpha_0} \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau - \tau_0)}{d}; \\ f_*(\tau_0) = -ie^{i\alpha_0} f_2'(\tau_0) - \frac{1}{\pi} \int_{L_0} f_1(\tau) \operatorname{Im} \left\{ \frac{\pi^2}{id^2} e^{i\alpha_0} \operatorname{csc}^2 \frac{\pi(\tau - \tau_0)}{d} d\tau \right\}.$$

Аналогично можно получить интегральные уравнения для граничных условий (3) и (4).

Для трещин, на берегах которых задан тепловой поток, с учетом условия

$$\gamma(\tau_1) = \gamma(\tau_2) = 0 \quad (11)$$

находим $\Gamma'(\tau) = -ie^{-i\alpha} q_2(\tau)$, а функция $\gamma'(\tau)$ определяется из уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_0} \gamma'(\tau) \operatorname{Re} M(\tau, \tau_0) d\tau = -q_*(\tau_0), \quad \tau_0 \in L_0, \quad (12)$$

где

$$q_1(\tau) = \frac{1}{2\lambda} [q^+(\tau) - q^-(\tau)] + 2\operatorname{Re} \{e^{i\alpha} F_0'(\tau)\} \quad \text{и} \quad q_2(\tau) = \frac{1}{2\lambda} [q^+(\tau) + q^-(\tau)]$$

удовлетворяют условию (7) $q_*(\tau_0) = q_1(\tau_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{L_0} q_2(\tau) \operatorname{Im} M(\tau, \tau_0) e^{-i\alpha} d\tau$.

Так как по определению функции $\Gamma(\tau) \int_{L_0} \Gamma'(\tau) d\tau = 0$, то функция $q_2(\tau)$, очевидно, должна удовлетворять условию $\int_{L_0} e^{-i\alpha} q_2(\tau) d\tau = 0$, которое означает, что суммарный поток тепла через берега разреза должен равняться нулю.

В случае граничного условия (4) $\Gamma(\tau) = 0$, а функция $\gamma(\tau)$, удовлетворяющая условию (11), определяется из интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\lambda}{\pi} \int_{L_0} \gamma'(\tau) \operatorname{Re} M(\tau, \tau_0) d\tau - 2h(\tau_0) \gamma(\tau_0) = q_a(\tau_0) - \lambda 2 \operatorname{Re} \{e^{i\alpha_0} F_0'(\tau_0)\}. \quad (13)$$

Таким образом, задача теплопроводности сведена к решению сингулярных интегральных уравнений вида (10), (12) и (13). Из условий (9) и (11) заключаем, что решения этих уравнений следует искать в классе функций, неограниченных на концах разреза [1]. Для некоторых случаев прямолинейных разрезов решения уравнений (10), (12) можно получить в замкнутом виде [5, 8]. О численном решении этих уравнений будет сказано позже.

Задача термоупругости. Граничное условие задачи запишем так [6]:

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - e^{-2i\alpha} [\tau \overline{\Phi'(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)}] = \rho(\tau), \quad \tau \in L, \quad (14)$$

где $\rho(\tau) = \sigma_{nn}^p - i\sigma_{nt}^p$ — заданные на берегах трещин внешние напряжения; t — касательная к L . Комплексные потенциалы Колосова — Мусхелишвили ищем в виде [4]

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{g'(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{\overline{g'(\tau)} d\bar{\tau}}{\tau - z} - \frac{\overline{\tau g'(\tau)} d\tau}{(\tau - z)^2} \right], \quad (15)$$

где $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ — потенциалы, соответствующие внешней нагрузке и температурному полю $t_0(x, y) = 2 \operatorname{Re} F_0(z)$ в сплошной плоскости, а $g'(\tau)$ — неизвестная функция, выражающаяся через смещения берегов трещины и температурное поле (5) так:

$$g'(\tau) = \frac{2G}{\kappa + 1} \frac{\partial}{\partial \tau} [v^+ - v^- - i(u^+ - u^-)] + iH[\gamma(\tau) + i\Gamma(\tau)]. \quad (16)$$

Подставляя соотношения (15) в граничное условие (14), для определения $g'(\tau)$ получаем интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_L \left[g'(\tau) \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{i\alpha_0}}{\tau - \tau_0} \right\} d\tau + i \overline{g'(\tau)} \frac{\tau - \tau_0}{\tau - \tau_0} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\alpha_0}}{\tau - \tau_0} \right\} d\bar{\tau} \right] = \rho_*(\tau_0), \quad \tau_0 \in L, \quad (17)$$

где $p_*(\tau) = -ie^{i\alpha_0} [p(\tau) - p_0(\tau)]$, $p_0(\tau) = \sigma_{nn}^0 - i\sigma_{nt}^0$ — напряжения на линии трещины в сплошной плоскости, обусловленные функциями $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$.

Если функция $p_*(\tau)$ удовлетворяет условию (7), то уравнение (17) можно записать так:

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_0} [g'(\tau) \operatorname{Re} M(\tau, \tau_0) d\tau + \overline{g'(\tau)} N(\tau, \tau_0) d\bar{\tau}] = p_*(\tau_0), \quad \tau_0 \in L_0, \quad (18)$$

где

$$N(\tau, \tau_0) = e^{i\alpha_0} \left[-\cos \alpha_0 \overline{M(\tau, \tau_0)} + \operatorname{Im}(\tau - \tau_0) \left(\frac{\pi^2}{d^2} e^{-2i\alpha_0} - \overline{M(\tau, \tau_0)^2} \right) \right].$$

Из соотношения (16) с учетом непрерывности смещений в вершинах трещин следует, что уравнение (18) должно удовлетворять условию

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_0} g'(\tau) d\tau = \frac{H}{\pi} \int_{L_0} [\tau \Gamma'(\tau) + i\gamma(\tau)] d\tau = \Gamma_0. \quad (19)$$

Если $\gamma(\tau_1) = \gamma(\tau_2) = 0$, то формулу для Γ_0 можно записать еще так:

$$\Gamma_0 = \frac{H}{\pi} \int_{L_0} [\Gamma'(\tau) - i\gamma'(\tau)] \tau d\tau.$$

Сказанное выше относительно решения уравнений (10), (12) в полной мере относится и к уравнению (18).

Решение интегральных уравнений. Если для произвольных точек τ, τ_0 дуги L_0 выполняется условие $\max |\tau - \tau_0| < d$, то решение уравнений (10), (12), (13) и (18) можно получить методом малого параметра [5, 8]. Ниже приведена схема построения решения этих уравнений в виде ряда по ортогональным полиномам.

Пусть уравнение дуги L_0 описывается соотношением

$$\tau = \tau(s), \quad \tau_1 = \tau(-1), \quad \tau_2 = \tau(1), \quad s \in [-1, 1], \quad (20)$$

где s — безразмерный действительный параметр. С помощью замены переменной интегрирования (20) с учетом того, что $e^{i\alpha} = i \frac{\tau'(s)}{|\tau'(s)|}$, уравнение (18) запишем в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left\{ g'(s) \left[\frac{1}{s-s_0} + K_1(s, s_0) \right] + \overline{g'(s)} K_2(s, s_0) \right\} ds = \psi(s_0), \quad s_0 \in [-1, 1], \quad (21)$$

где

$$K_1(s, s_0) = \operatorname{Re} \{ \tau'(s_0) Q(s, s_0) \} - \frac{1}{s-s_0}; \quad K_1(s, s) = A_1(s); \quad Q(s, s_0) = \\ = \frac{\pi}{d} \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau - \tau_0)}{d};$$

$$K_2(s, s_0) = i \left\{ \operatorname{Im} \tau'(s_0) \overline{Q(s, s_0)} - \tau'(s_0) \operatorname{Im}(\tau - \tau_0) \left[\frac{\pi^2}{d^2} + \overline{Q(s, s_0)^2} \right] \right\};$$

$$K_2(s, s) = iA_2(s) \frac{\tau'(s)}{\tau'(s)};$$

$$A_1(s) + iA_2(s) = -\frac{\tau''(s)}{2\tau'(s)}; \quad \psi(s) = \tau'(s) [p(s) - p_0(s)]; \quad \tau_0 = \tau(s_0).$$

Решение уравнения (21) ищем в виде

$$g'(\tau) = \frac{\mu_*(s)}{\sqrt{1-s^2}}, \quad \mu_*(s) = \Gamma_0 + \frac{2}{N} \sum_{\nu=1}^N \mu_\nu \sum_{m=1}^{N-1} T_m(s_\nu) T_m(s), \quad (22)$$

где $T_m(s)$ — полиномы Чебышева первого рода. При выборе $g'(s)$ в форме (22) условие (19) выполняется автоматически, а неизвестные постоянные $\mu_\nu = \mu_\nu^1 + i\mu_\nu^2$ определяются из системы алгебраических уравнений, которую нетрудно получить аналогично работе [2]:

$$\sum_{\nu=1}^N (\alpha_{\nu m}^+ \mu_\nu^1 + \beta_{\nu m}^2 \mu_\nu^2) = \psi_{*m}^1, \quad (23)$$

$$\sum_{\nu=1}^N (\beta_{\nu m}^2 \mu_\nu^1 + \alpha_{\nu m}^- \mu_\nu^2) = \psi_{*m}^2, \quad m = \overline{1, N},$$

где

$$\alpha_{\nu m}^\pm = \alpha_{\nu m} \pm \beta_{\nu m}^1; \quad \alpha_{\nu m} = \frac{1}{N} \left[\frac{\operatorname{ctg} \frac{\theta_m + (-1)^{m-\nu} \theta_\nu}{2}}{\sin \theta_m} + K_{1\nu m} - K_{1m}^* \right];$$

$$K_{j\nu m} = K_j(s_\nu, s_m); \quad K_{jm}^* = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N K_{j\nu m}; \quad s_\nu = \cos \theta_\nu;$$

$$\beta_{\nu m}^1 + i\beta_{\nu m}^2 = \frac{1}{N} [K_{2\nu m} - K_{2m}^*]; \quad \theta_\nu = \frac{2\nu-1}{2N} \pi;$$

$$\psi_{*m}^1 + i\psi_{*m}^2 = \psi_m - \Gamma_0 K_{1m}^* - \bar{\Gamma}_0 K_{2m}^*; \quad \psi_m = \psi(s_m).$$

Уравнения (10), (12) являются частным случаем уравнения (18) ($\Gamma_0 = 0$, $K_2(s, s_0) = 0$). Поэтому схема построения их решения аналогична приведенной выше, причем в этом случае она значительно упрощается, так как правые части данных уравнений — действительные функции и число уравнений системы (23) уменьшается вдвое. Что касается решения уравнения (13), то заменой переменных (20) оно преобразуется к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \gamma'(s) \left[\frac{1}{s-s_0} + K_1(s, s_0) \right] ds - h_*(s_0) \gamma(s_0) = q_a^*(s_0), \quad s_0 \in [-1, 1], \quad (24)$$

где

$$h_*(s_0) = \frac{2}{\lambda} |\tau'(s_0)| h(s_0), \quad q_a^*(s_0) = \frac{|\tau'(s_0)|}{\lambda} q_a(s_0) + 2 \operatorname{Im} \{F'_0(s_0)\}.$$

Решение уравнения (24) с учетом условия (11) запишется так:

$$\gamma'(s) = \frac{\gamma_*(s)}{\sqrt{1-s^2}}, \quad \gamma_*(s) = \frac{2}{N} \sum_{\nu=1}^N \gamma_\nu^* \sum_{m=1}^{N-1} T_m(s_\nu) T_m(s).$$

Интегрируя это соотношение по s , находим

$$\gamma(s) = -\frac{2}{N} \sum_{\nu=1}^N \gamma_\nu^* \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m} T_m(s_\nu) \sin m\theta, \quad s = \cos \theta.$$

Тогда постоянные $\gamma_\nu^* = \gamma_*(s_\nu)$ определим из системы уравнений

$$\sum_{\nu=1}^N \gamma_\nu^* [\alpha_{\nu m} + h_*(s_m) \delta_{\nu m}] = q_a^*(s_m), \quad m = \overline{1, N},$$

где

$$\delta_{\nu m} = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} \cos k\theta_\nu \sin k\theta_m.$$

Если решение уравнения (18) известно, то коэффициенты интенсивности напряжений определим по формуле [4]

$$K_I^\pm - iK_S^\pm = \frac{\sqrt{\pi} |\tau'(\pm 1)|}{\tau'(\pm 1)} \left[\Gamma_0 + \frac{2}{N} \sum_{\nu=1}^N \mu_\nu \sum_{m=1}^{N-1} (\pm 1)^m \cos m\theta_\nu \right].$$

Располагая коэффициентами интенсивности напряжений, предельные значения силовой или температурной нагрузки определим из соотношения [7]

$$K_1 - 3DK_2 = (1 + D^2)^{1/2} K_{IC}, \quad D = \frac{K_1 - \sqrt{K_1^2 + 8K_2^2}}{4K_2}.$$

Приведенный выше метод решения интегральных уравнений может быть с успехом использован для ряда других задач теории термоупругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1958. 544 с.
2. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М., «Наука», 1973. 304 с.
3. Кит Г. С. Метод дисторсии в теории термоупругости тел с трещинами.— ФХММ, 1975, 11, № 3, с. 9—20.
4. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Интегральні рівняння задачі термопружності для площини з криволінійним отвором і тріщинами.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 11, с. 998—1001.
5. Кит Г. С., Соколовский М. П. Плоская задача теплопроводности и термоупругости для тела с периодической системой прямолинейных разрезов.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1976, вып. 4, с. 44—51.
6. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966. 708 с.
7. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. К., «Наук. думка», 1968. 246 с.
8. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. К., «Наук. думка», 1976. 444 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
24.XII 1976 г.

УДК 539.2

Ю. З. Повстенко

УПРУГОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СИСТЕМЫ ТОЧЕЧНЫХ ДЕФЕКТОВ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ В ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим цепочку точечных дефектов, расположенную в точке r_0 тела, содержащего круговое отверстие радиуса a . Сила, действующая на единицу длины такого дефекта, вызванная упругим взаимодействием собственного поля напряжений последнего с поверхностью отверстия, была определена в статье [4]. Она выражается формулой (с исправленным знаком)

$$F_r = - \frac{8Q\Delta S a^2 r_0}{(r_0^2 - a^2)^3}, \quad (1)$$

где $Q = 2\mu\epsilon r_0^2$ — мера интенсивности нарушения, вызванного дефектом в рассматриваемой его модели в виде цилиндрической полости первоначального радиуса r_0 , расширяющегося в радиальном направлении на величину $\rho_{0\epsilon}$ [4, 7]; при этом площадь сечения цилиндрической полости изменяется на величину $\Delta S = 2\pi\rho_{0\epsilon}^2$. Из выражения (1) следует, что точечный дефект будет стремиться приблизиться к отверстию.

В неограниченной среде упругое взаимодействие точечных дефектов в рамках выбранной модели отсутствует. Однако если тело ограничено поверхностью, то между точечными дефектами возникает взаимодействие через так называемые мнимые поля [5]. Оказывается, что при учете этого взаимодействия сила, действующая на точечный дефект, будет зависеть от относительной концентрации дефектов n , которую определим следующим образом: разобьем плоскость сеткой на отдельные квадраты и в вершинах поместим точечные дефекты; относительной концентрацией дефектов назовем количество дефектов, приходящееся на отрезок, равный радиусу отверстия.