

2. Айнола Л. Я. К теореме взаимности для динамических задач теории упругости.— Прикл. математика и механика, 1967, вып. 2, с. 176—177.
3. Болотин В. В. О вариационных принципах теории упругой устойчивости.— В кн.: Проблемы механики твердого деформированного тела. Л., 1970, с. 83—88.
4. Григолюк Э. И., Попович В. Е. Теорема Кастилиано и метод единичной нагрузки для задачи термоупругости сплошных сред.— Докл. АН СССР, 1974, 219, № 2, с. 305—307.
5. Підстригач Я. С. Диференціальні рівняння задачі термодифузії в твердому деформованому ізотропному тілі.— Допов. АН УРСР, 1961, № 2, с. 169—172.
6. Підстригач Я. С., Павлина В. С. Загальні співвідношення термодинаміки твердих розчинів.— Укр. фіз. журн., 1961, 6, № 5, с. 655—663.
7. Подстригач Я. С., Швец Р. Н., Павлина В. С., Дасюк Я. И. О рассеянии механической энергии в деформируемом твердом теле при термодиффузионных процессах.— Пробл. прочности, 1973, № 1, с. 3—8.
8. Подстригач Я. С., Шевчук П. Р. Вариационная форма уравнений теории термодиффузионных процессов в деформируемом твердом теле.— Прикл. математика и механика, 1969, 33, № 4, с. 774—776.
9. Савин Г. Н., Подстригач Я. С. О влиянии диффузионных процессов на напряженное состояние деформируемых тел.— В кн.: Проблемы механики твердого деформированного тела. Л., 1970, с. 391—403.
10. Швец Р. Н., Дасюк Я. И. О вариационных теоремах термодиффузии деформируемых твердых тел.— Мат. физика, 1977, вып. 22, с. 102—108.
11. Gurtin M. E. Variational principles for linear elastodynamics.— Arch. Ration. Mech. and Anal., 1964, 20, N 3, p. 34—49.
12. Ieşan D. Principes variationnels dans la thermoélasticité couplée.— An. sti. Univ. Iaşi. Sec. I.B. 1966, 12, p. 439—456.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
7.II 1977 г.

УДК 539.3

Р. Н. Швец, С. В. Грицай

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЛИТАХ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ*

Применение операторного метода [6] в динамике изотропных плит можно найти в работах [1, 7]. В работе [5] этот метод был распространен на задачу о статическом равновесии трансверсально-изотропного слоя. Успешное применение операторный метод нашел в задачах теплопроводности [9] и в связанных задачах термоупругости [13]. Приведение пространственной задачи теории упругости к двумерной можно выполнить различными методами [2, 4, 6, 10]. В настоящей работе операторным методом трехмерная динамическая задача для бесконечного трансверсально-изотропного слоя сведена к двумерной проблеме. Применяемый метод в сочетании с методом усреднения дал возможность записать точные уравнения бесконечно высокого порядка относительно усредненных по толщине перемещений слоя, находящегося под антисимметричной нагрузкой, и получить приближенные уравнения изгибных движений плит, известных в литературе. Показано при этом, что анизотропия значительно влияет на величину фазовой скорости.

Основные уравнения. Рассмотрим трансверсально-изотропный слой постоянной толщины $2h$, который на поверхностях $z = \pm h$ загружен произвольными силами, т. е.

$$\begin{aligned} \text{при } z = h \quad \sigma_{zx} &= \sigma_1^+, \quad \sigma_{yz} = \sigma_2^+, \quad \sigma_{zz} = \sigma_3^+, \\ \text{при } z = -h \quad \sigma_{zx} &= \sigma_1^-, \quad \sigma_{yz} = \sigma_2^-, \quad \sigma_{zz} = \sigma_3^-. \end{aligned} \quad (1)$$

* Эти результаты были доложены на VII научной конференции по применению ЭВМ в механике деформируемого твердого тела в Ташкенте 30 сентября 1975 г.

Напряженно-деформированное состояние слоя описывается уравнениями движения, которые в операторных обозначениях имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma^2 + m\alpha^2 \right) u + m\alpha\beta v + n\alpha \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ m\alpha\beta u + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma^2 + m\beta^2 \right) v + n\beta \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ n\alpha \frac{\partial u}{\partial z} + n\beta \frac{\partial v}{\partial z} + \gamma_1^2 w + a \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} = \alpha, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \beta, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = q, \quad \gamma_0^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \gamma^2 = \frac{G}{G_z} \gamma_0^2 - \frac{q^2}{c_z^2}, \\ \gamma_1^2 = \gamma_0^2 - \frac{q^2}{c_z^2}, \quad c_z^2 = \frac{G_z}{\rho}, \quad a = \frac{(1-\nu)}{\nu_0} \frac{E_z}{G_z}, \quad m = \frac{E}{2\nu_0 G_z}, \\ n = 2\nu_2 m + 1, \quad \nu_0 = 1 - \nu - 2\nu_2^2 \frac{E}{E_z}, \end{aligned} \quad (3)$$

$u(x, y, z, \tau)$, $v(x, y, z, \tau)$, $w(x, y, z, \tau)$ — компоненты вектора перемещения; ρ — плотность; τ — время; E , E_z , G , G_z — упругие константы; ν , ν_2 — коэффициенты Пуассона. Модулями E_z и G_z учитывается анизотропия упругих свойств по толщине слоя.

Введенные обозначения при рассмотрении уравнения (2) и проведения линейных преобразований решений позволяют пользоваться методами линейной алгебры. Этот математический формализм в сочетании с методом усреднения будет использован нами для получения точных дифференциальных уравнений изгиба плит.

Решение системы в символах имеет вид

$$\begin{aligned} u &= A_1 \sin \gamma z + A_2 \cos \gamma z + R_1 \sin \kappa z + R_2 \cos \kappa z + B_1 \sin kz + B_2 \cos kz, \\ v &= -\frac{\alpha}{\beta} (A_1 \sin \gamma z + A_2 \cos \gamma z) + \frac{\beta}{\alpha} (R_1 \sin \kappa z + R_2 \cos \kappa z) + \\ &\quad + \frac{\beta}{\alpha} (B_1 \sin kz + B_2 \cos kz), \end{aligned} \quad (4)$$

$$w = \frac{\gamma_2^2}{n\alpha\kappa} (R_1 \cos \kappa z - R_2 \sin \kappa z) + \frac{\gamma_3^2}{n\alpha k} (B_1 \cos kz + B_2 \sin kz),$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_2^2 = \lambda^2 - \kappa^2; \quad \gamma_3^2 = \lambda^2 - k^2; \quad \lambda^2 = \gamma^2 + m\gamma_0^2; \\ \kappa^2, k^2 = \frac{1}{2a} [a\gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_0^2(am - n^2) \pm \\ \pm \sqrt{[a\gamma^2 - \gamma_1^2 + \gamma_0^2(am - n^2)]^2 - 4n^2\gamma_0^2\gamma_1^2}]. \end{aligned}$$

Из формул (4) видно, что слой под действием приложенных сил (1) претерпевает симметричную и антисимметричную деформации. В связи с этим целесообразно внешнюю нагрузку (1) разбить [6] на симметричную, вызывающую симметричную деформацию относительно срединной плоскости изотропии, и антисимметричную, обуславливающую антисимметричную деформацию.

В дальнейшем будем рассматривать антисимметричный случай, для симметричного случая рассуждения аналогичны. Тогда на поверхности $z = \pm h$ имеем граничные условия

$$\sigma_{zx} = P_1 = \frac{1}{2} (\sigma_1^+ + \sigma_1^-), \quad \sigma_{yz} = P_2 = \frac{1}{2} (\sigma_2^+ + \sigma_2^-),$$

$$\sigma_{zz} = P = \frac{1}{2} (\sigma_3^+ - \sigma_3^-).$$

Введем усредненные обобщенные перемещения в слое, обусловленные нагрузкой (5):

$$\begin{aligned} u_2(x, y, \tau) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \frac{\partial u}{\partial z} dz, & v_2(x, y, \tau) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \frac{\partial v}{\partial z} dz, \\ \omega_1(x, y, \tau) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \omega dz. \end{aligned} \quad (6)$$

Интегрируя (4) в соответствии с (6) и определяя постоянные через усредненные величины u_2 , v_2 и ω_1 , при антисимметричной деформации слоя получаем перемещения

$$u = \frac{h \sin \gamma z}{\sin \gamma h} \left(u_2 - \frac{\alpha \theta}{\gamma_0^2} \right) - \frac{\alpha h \kappa^2 \sin \kappa z}{S \sin \kappa h} (\lambda^2 \theta - k^2 \theta_1) + \frac{\alpha h k^2 \sin \kappa z}{S \sin \kappa h} (\lambda^2 \theta - \kappa^2 \theta_1), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\alpha}{\beta} \frac{h \sin \gamma z}{\sin \gamma z} \left(u_2 - \frac{\alpha \theta}{\gamma_0^2} \right) - \frac{\beta h \kappa^2 \sin \kappa z}{S \sin \kappa h} (\lambda^2 \theta - k^2 \theta_1) + \\ &+ \beta \frac{h k^2 \sin \kappa z}{S \sin \kappa h} (\lambda^2 \theta - \kappa^2 \theta_1), \end{aligned}$$

$$\omega = -\frac{h \kappa (\lambda^2 - \kappa^2) \cos \kappa z}{nS \sin \kappa h} (\lambda^2 \theta - k^2 \theta_1) + \frac{h k (\lambda^2 - k^2) \cos \kappa z}{nS \sin \kappa h} (\lambda^2 \theta - \kappa^2 \theta_1),$$

где

$$\theta = \alpha u_2 + \beta v_2; \quad \theta_1 = \theta + n \gamma_0^2 \omega_1; \quad S = \gamma_0^2 \lambda^2 (k^2 - \kappa^2). \quad (8)$$

Напряжения соответственно определяются по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\nu_0 \sigma_{xx}}{2G} &= \alpha h \nu_0 \frac{\sin \gamma z}{\sin \gamma h} \left(u_2 - \frac{\alpha \theta}{\gamma_0^2} \right) - \frac{h \kappa^2}{nS} \left[f_1^2 \frac{\sin \kappa z}{\sin \kappa h} (\lambda^2 \theta - k^2 \theta_1) + \right. \\ &\left. + \frac{k^2}{\kappa^2} \frac{\sin \kappa z}{\sin \kappa h} f_2^2 (\lambda^2 \theta - \kappa^2 \theta_1) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\nu_0 \sigma_{yy}}{2G} &= -\alpha h \nu_0 \frac{\sin \gamma z}{\sin \gamma h} \left(u_2 - \frac{\alpha \theta}{\gamma_0^2} \right) - \frac{h \kappa^2}{nS} \left[f_3^2 \frac{\sin \kappa z}{\sin \kappa h} (\lambda^2 \theta - k^2 \theta_1) + \right. \\ &\left. + \frac{k^2}{\kappa^2} \frac{\sin \kappa z}{\sin \kappa h} f_4^2 (\lambda^2 \theta - \kappa^2 \theta_1) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xy}}{G} &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta} \frac{h \sin \gamma z}{\sin \gamma h} \left(u_2 - \frac{\alpha \theta}{\gamma_0^2} \right) - \frac{2h \alpha \beta}{S} \left[\kappa^2 \frac{\sin \kappa z}{\sin \kappa h} (\lambda^2 \theta - k^2 \theta_1) + \right. \\ &\left. + k^2 \frac{\sin \kappa z}{\sin \kappa h} (\lambda^2 \theta - \kappa^2 \theta_1) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xz}}{G_z} &= \frac{h \gamma \cos \gamma z}{\sin \gamma h} \left(u_2 - \frac{\alpha \theta}{\gamma_0^2} \right) - \frac{\alpha h \kappa}{nS} \left[\gamma_5^2 \frac{\cos \kappa z}{\sin \kappa h} (\lambda^2 \theta - k^2 \theta_1) + \right. \\ &\left. + \frac{k}{\kappa} \frac{\cos \kappa z}{\sin \kappa h} \gamma_4^2 (\lambda^2 \theta - \kappa^2 \theta_1) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{yz}}{G_z} &= -\frac{\alpha \gamma h}{\beta} \frac{\cos \gamma z}{\sin \gamma h} \left(u_2 - \frac{\alpha \theta}{\gamma_0^2} \right) - \frac{\beta h \kappa}{nS} \left[\gamma_5^2 \frac{\cos \kappa z}{\sin \kappa h} (\lambda^2 \theta - k^2 \theta_1) + \right. \\ &\left. + \frac{k}{\kappa} \frac{\cos \kappa z}{\sin \kappa h} (\lambda^2 \theta - \kappa^2 \theta_1) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\nu_0 \sigma_{zz}}{h(1-\nu) E_z} &= \frac{\kappa^2}{nS} \frac{\sin \kappa z}{\sin \kappa h} (\gamma_2^2 - b \gamma_0^2) (\lambda^2 \theta - k^2 \theta_1) - \\ &- \frac{k^2}{nS} \frac{\sin \kappa z}{\sin \kappa h} (\gamma_3^2 - b \gamma_0^2) (\lambda^2 \theta - \kappa^2 \theta_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}\gamma_4^2 &= \lambda^2 + (n-1)k^2, & \gamma_5^2 &= \lambda^2 + (n-1)\kappa^2, \\ f_{1,2}^2 &= (1-\nu_1)n\alpha^2 + (\nu+\nu_1)n\beta^2 - \nu_z(1+\nu)(\lambda^2-\delta) \quad (\delta = \kappa^2, k^2), \\ f_{3,4}^2 &= (1-\nu_1)n\beta^2 + (\nu+\nu_1)n\alpha^2 - \nu_z(1+\nu)(\lambda^2-\delta), \\ b &= \frac{n\nu_z E}{(1-\nu)E_z}, & \nu_1 &= \nu_z^2 \frac{E}{E_z}.\end{aligned}\quad (11)$$

Функции u_2 , v_2 и w_1 неизвестны и подлежат определению. Для этого воспользуемся граничными условиями (5). Подставляя (10) в граничные условия для определения усредненных перемещений u_2 , v_2 и w_1 , находим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}L_{11}u_2 - L_{12}v_2 + L_{13}w_1 &= \frac{n\gamma_0^2}{hG_z} SP_1, \\ -L_{21}u_2 + L_{22}v_2 + L_{23}w_1 &= \frac{n\gamma_0^2}{hG_z} SP_2, \\ L_{31}u_2 + L_{32}v_2 - L_{33}w_1 &= \frac{n\nu_0}{1-\nu} SP,\end{aligned}\quad (12)$$

где дифференциальные операторы определяются формулами

$$\begin{aligned}L_{11} &= n\beta^2\gamma S \operatorname{ctg} \gamma h - \alpha^2\gamma_0^2 Q, & L_{13} &= \alpha L, \\ L_{12} &= L_{21} = n\alpha\beta\gamma S \operatorname{ctg} \gamma h + \alpha\beta\kappa\gamma_0^2 Q, & L_{23} &= \beta L, \\ L_{22} &= n\alpha^2\gamma S \operatorname{ctg} \gamma h - \beta^2\gamma_0^2 Q, & L_{31} &= -\frac{\alpha}{a} S, & L_{32} &= -\frac{\beta}{a} S, \\ L_{33} &= nk^2\alpha^2\gamma_0^2(k^2 - \kappa^2), & Q &= \kappa\gamma_2^2\gamma_5^2 \operatorname{ctg} \kappa h - k\gamma_3^2\gamma_4^2 \operatorname{ctg} \kappa h, \\ L &= k\gamma_5^2 \operatorname{ctg} \kappa h - \kappa\gamma_4^2 \operatorname{ctg} \kappa h, & S &= \lambda^2\gamma_0^2(k^2 - \kappa^2).\end{aligned}$$

Полученная система (12) взаимосвязанная и содержит дифференциальные операторы бесконечно высокого порядка. Уравнения (2) — (12) справедливы при любых значениях декартовых переменных x , y , z и τ . Систему (12) можно преобразовать к более простому и удобному для анализа виду [11]. Из третьего уравнения находим

$$\theta + \gamma_1^2 w_1 = -\frac{P}{hG_z}.\quad (13)$$

Умножая первое уравнение на α , второе на β и слагая их, получаем

$$\gamma_0^2 L_w w_1 + L_\theta \theta = -\frac{n\gamma_0^2}{G_z} (\alpha P_1 + \beta P_2),\quad (14)$$

где θ определяется выражением (8);

$$\begin{aligned}L_w &= hnk\kappa\gamma_0^4 [k\gamma_5^2 \operatorname{ctg} \kappa h - \kappa\gamma_4^2 \operatorname{ctg} \kappa h]; \\ L_\theta &= h\gamma_0^2 [k(\lambda^2 - \kappa^2)\gamma_4^2 \operatorname{ctg} \kappa h - \kappa(\lambda^2 - k^2)\gamma_5^2 \operatorname{ctg} \kappa h].\end{aligned}\quad (15)$$

Если первое уравнение системы (12) умножить на β , а второе на α и вычесть, то получим

$$h\gamma \operatorname{ctg} \gamma h (\beta u_2 - \alpha v_2) = \frac{1}{G_z} (\beta P_1 - \alpha P_2).\quad (16)$$

Как нетрудно видеть, последнее уравнение связано с деформацией сдвига, обусловленной приложенными к поверхностям касательными напряжениями P_1 и P_2 . Оно не зависит от двух предыдущих уравнений (13) и (14). Уравнение (13) определяет деформацию тела, связанную с объемным расширением. Используем это свойство для полного разделения искоемых

функций. Если ввести функцию W , соответствующую отсутствию поворота, и функцию φ , соответствующую отсутствию объемного расширения, согласно формулам

$$\begin{aligned} u_2 &= -\frac{\alpha}{n\gamma_0^2 S} L_\omega W + \beta\varphi - \frac{n\gamma_0^2}{G_z L_0} P_1, \\ v_2 &= -\frac{\beta}{n\gamma_0^2 S} L_\omega W - \alpha\varphi + \frac{n\gamma_0^2}{G_z L_0} P_2, \\ \omega_1 &= \frac{1}{n\gamma_0^2 S} L_\theta W, \end{aligned} \quad (17)$$

то приходим к двум независимым уравнениям

$$\begin{aligned} L_\theta \left(LW - \frac{n}{hG_z} \gamma_0^2 SP \right) &= \frac{n\gamma_0^2 S}{G_z} (\alpha P_1 + \beta P_2), \\ L_\theta (h\gamma \operatorname{ctg} \gamma h \gamma_0^2 \varphi) - \frac{1}{G_z} (\beta P_1 - \alpha P_2) &= -\frac{nh}{G_z} \gamma \operatorname{ctg} \gamma h \gamma_0^2 (\beta P_1 + \alpha P_2), \end{aligned} \quad (18)$$

которые при $P_1 = P_2 = 0$ принимают вид

$$LW = \frac{n}{hG_z} \gamma_0^2 SP, \quad h\gamma \operatorname{ctg} \gamma h \gamma_0^2 \varphi = 0, \quad (19)$$

где оператор

$$\begin{aligned} L &= L_\omega \gamma_0^2 - L_\theta \gamma_1^2 = \\ &= \gamma_0^4 [\gamma_5^2 (nk^2 \gamma_0^2 + \gamma_1^2 \gamma_3^2) kh \operatorname{ctg} kh - \gamma_4^2 (nx^2 \gamma_0^2 + \gamma_1^2 \gamma_2^2) kh \operatorname{ctg} kh]. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, трехмерная динамическая задача изгиба для трансверсально-изотропного слоя постоянной толщины сведена к двумерной проблеме. Полученная система дифференциальных уравнений в частных производных (19) по двум координатам x, y и времени τ представляет собой точные уравнения, но бесконечно высокого порядка. Поэтому при решении конкретных задач для удовлетворения граничных условий построение их решения в общем случае затруднительно, и возникает необходимость замены полученных выше уравнений бесконечно высокого порядка приближенными, имеющими конечный порядок.

Разлагая в ряды операторы, входящие в (17), и удерживая члены необходимого порядка, получаем соответствующие приближенные уравнения без каких-либо априорных предположений. Так, удерживая в рядах члены порядка не выше h^2 , получаем приближенные уравнения, соответствующие теории Тимошенко [8]:

$$\begin{aligned} \left(\gamma_0^2 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \left(\gamma_0^2 W - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} \right) + \frac{3}{h^2 c_1^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} &= \frac{3(1-\nu)}{2Gh} P, \\ \gamma_0^2 \varphi - \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

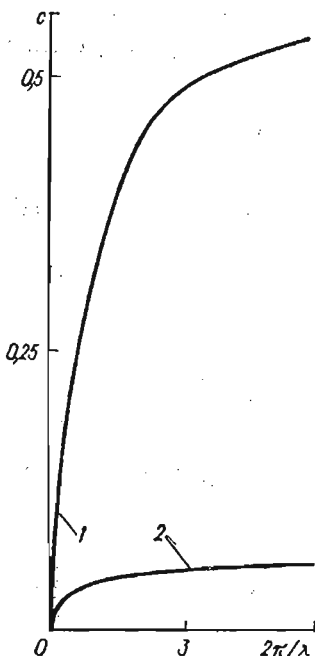
где

$$c_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}; \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho}; \quad \varepsilon^2 = \frac{2}{\varepsilon_0(1-\nu)}; \quad \varepsilon_0 = \frac{Eh^2}{3(1-\nu)G_z}.$$

В соответствии с принятыми приближениями из (7) и (10) находим соотношения

$$\begin{aligned} u &= zu_2, \quad v = zv_2, \quad \omega = \omega_1, \\ \sigma_{zz} &= \frac{P}{h} z, \quad \sigma_{xz} = G_z \beta \varphi, \quad \sigma_{yz} = -G_z \alpha \varphi, \end{aligned} \quad (22)$$

что находится в полном соответствии с кинематической моделью Тимошенко.



Усредняя по толщине плиты напряжения (9) и сохраняя в разложениях члены такого же порядка, как при получении уравнений (21), находим

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - (1 - \nu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right],$$

$$M_y = -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right],$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} (\gamma_0^2 \varphi - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}), \quad (23)$$

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta_1 W - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right),$$

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial}{\partial y} \Delta_1 W + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right),$$

где

$$\Delta_1 = \gamma_0^2 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}; \quad D = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1 - \nu^2}.$$

На основании уравнений (21) — (23) проведено теоретическое исследование низкочастотных изгибных волн в пластинках с одним [3] и многими отверстиями [12]. Поскольку частотный спектр, рассчитанный по этим уравнениям, находится в хорошем соответствии со спектром, полученным из уравнений (19) для частот в диапазоне от нуля до ω^* , где ω^* — наименьшая круговая частота простых форм сдвига плиты по толщине, то можно ожидать, что результаты исследований будут справедливы в этом диапазоне частот.

Рассмотрим распространение изгибных синусоидальных волн в трансверсально-изотропном ненагруженном слое

$$W = W_0 \exp i (sx - \omega \tau). \quad (24)$$

Подставляя (24) в (19), получаем точное трансцендентное дисперсное уравнение

$$L(s, \omega) = 0. \quad (25)$$

Исследование этого уравнения показало, что волновые характеристики в слое сильно зависят от анизотропных свойств материала на всем диапазоне частот. На рисунке показана зависимость приведенной фазовой скорости c от длины волны Λ в изотропном (кривая 1) и трансверсально-изотропном (кривая 2) слоях с такими характеристиками: $E = 40G_z$, $E = 10E_z$, $\nu = 0,3$, $\nu_z = 0,1$. Увеличение отношения E/G_z приводит к уменьшению величины скорости волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаджян В. Г., Галинш А. К., Саченков А. В. К методу начальных функций В. З. Власова. — Прикл. механика, 1975, 10, № 1, с. 15—21.
2. Власов В. З. Метод начальных функций в задачах теории упругости. — Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук, 1955, № 7, с. 49—69.
3. Грицай С. В., Швец Р. Н. Дифракция изгибной волны на круговом препятствии в трансверсально изотропной пластинке. — Тр. науч. конф. «Вычисл. математика в соврем. научно-техн. прогрессе». К., 1974, с. 187—196.
4. Кильчевский Н. А. Обобщение современной теории оболочек. — Прикл. математика и механика, 1939, 2, № 4, с. 427—438.
5. Лехницкий С. Г. Упругое равновесие трансверсально изотропного слоя и толстой плиты. — Прикл. математика и механика, 1962, 26, № 4, с. 687—696.
6. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955. 491 с.

7. Нигул У. К. О применении символического метода А. И. Лурье в трехмерной теории динамики упругих плит.— Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук, 1963, 12, № 2, с. 146—155.
8. Пелех Б. Л., Тетерс Г. А. О динамическом изгибе пластинок, слабо сопротивляющихся сдвигу.— Механика полимеров, 1968, № 4, с. 698—704.
9. Подстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. К., Вид-во АН УРСР, 1961. 212 с.
10. Селезов И. Т. Дослідження поперечних коливань пластин.— Прикл. механіка, 1960, 6, № 3, с. 319—327.
11. Швец Р. Н., Грицай С. В. Некоторые динамические задачи изгиба моноотропных плит с включениями.— VII Науч. конф. по применению ЭВМ в механике деформируемого твердого тела. 30 сент. 1975 г. Тез. докл. Часть 2. Ташхент, 1975, с. 72—73.
12. Швец Р. Н., Грицай С. В. Динамические напряжения в трансверсально-изотропной пластинке с кольцом равных круговых отверстий.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1976, вып. 3, с. 57—61.
13. Швец Р. Н. Применение операторного метода в динамических задачах термоупругости пластин постоянной толщины.— В кн.: Физико-механические поля в деформируемых средах. К., 1977, с. 18—25.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
20.III 1976 г.

УДК 539.377

С. Ф. Будз, Я. И. Бурак, Е. М. Ирза

ОПТИМИЗАЦИЯ ПО НАПРЯЖЕНИЯМ РЕЖИМОВ НАГРЕВА СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ВО ВРЕМЕНИ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛОТДАЧИ

Определим оптимальные по напряжениям режимы нагрева по толщине замкнутой сферической оболочки, на внутренней поверхности которой имеет место конвективный теплообмен при переменном во времени коэффициенте теплоотдачи. Функцией управления является температура внешней поверхности оболочки. Температура оболочки отсчитывается от начальной, равной температуре среды. Решение задачи для случая постоянного коэффициента теплоотдачи рассмотрено ранее*.

Примем следующие ограничения на температуру $t_1(u)$ внешней поверхности и температурные напряжения.

Функция $t_1(u)$ для $0 \leq u \leq u_k$ неотрицательна и ограничена значением t_0 , а для $u \geq u_k$ равна t_k , т. е.

$$0 \leq t_1(u) \leq t_0 \text{ для } 0 \leq u \leq u_k; \quad t_1(u) = t_k \text{ для } u \geq u_k. \quad (1)$$

Изменение во времени функции $t_1(u)$ ограничено системой функциональных условий вида

$$\int_0^{u_k} u^i t_1(u) du = A_i \quad (i = \overline{0, n}), \quad (2)$$

где A_i — некоторые постоянные; u_k — момент окончания нагрева.

Температурные напряжения $\sigma_s = \sigma_\beta \equiv \sigma(\gamma, u)$ на внешней $\sigma^+ = \sigma(h, u)$ и внутренней $\sigma^- = \sigma(-h, u)$ поверхностях изменяются в заданных пределах:

$$\sigma_1^+ \leq \sigma^+ \leq \sigma_2^+, \quad \sigma_1^- \leq \sigma^- \leq \sigma_2^-, \quad (3)$$

где $\sigma_1^+ \leq 0$, $\sigma_2^+ \geq 0$, $\sigma_1^- \leq 0$, $\sigma_2^- \geq 0$, $u = \tau/a^2 h^2$; τ — время; a^{-2} — коэффициент температуропроводности; $2h$ — толщина оболочки; σ_s , σ_β — меридиональные и кольцевые напряжения на внешней $\gamma=h$, σ^+ и внутренней

* Бурак Я. И., Будз С. Ф., Мирончук Ю. Г., Ирза Е. М. Оптимизация режимов нагрева сферической оболочки.— Науч. конф. «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе». Канев, 1974, с. 44—50.