радиального перемещения приведены на рис 1—5 для следующих значений параметров: $R/h = 100$, $k = 2$, $\alpha_0 = \beta_0 = 0{,}125$, $\xi = 100$; 1; 0,5; 0,25; 0,125 (кривые *1—5* соответственно). Отметим, что при $\xi = 100$ произведено

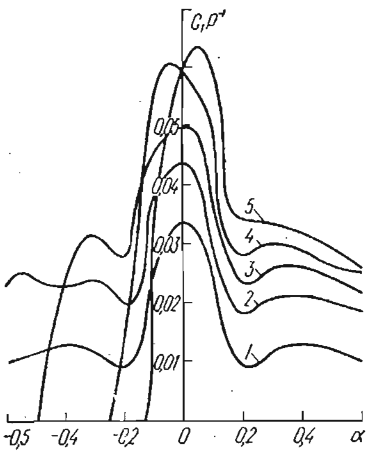

Рис. 4

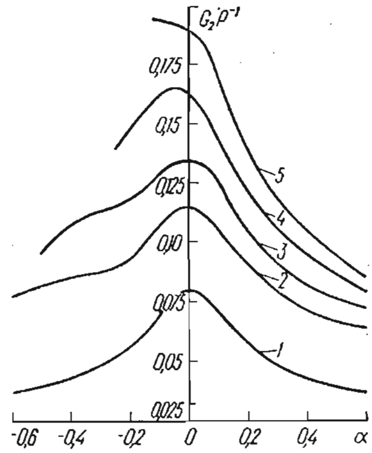

Рис. 5

сравнение с решением для бесконечно длинной оболочки, найденным на основе полных уравнений теории оболочек с разрешающим уравнением (1). Оно показало удовлетворительное совпадение результатов построенного здесь и точного решений. Влияние величины удаления нагрузки от свободного края достаточно отчетливо видно из представленных на рис. 1—5 кривых.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов В. З.* Общая теория оболочек. М., Гостехиздат, 1949. 784 с.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953. 544 с.
3. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963. 635 с.
4. *Нерубайло Б. В.* К расчету напряжений в цилиндрических оболочках, загруженных по линиям контура.— Прикл. механика, 1975, 11, № 2, с. 41—48.
5. *Чернышев Г. Н.* О контактных задачах в теории оболочек.— Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М., 1970, с. 898—903.

г. Москва

Поступила в редколлегию 15.IX 1976 г.

УДК 539.3;534.1

В. Г. Костенко

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ С АКУСТИЧЕСКИМИ СРЕДАМИ

Рассмотрим упругую изотропную оболочку V с гладкой границей $S = S_1 + S_2$, внешнюю к V неограниченную акустическую среду Ω_1 и акустический заполнитель Ω_2 оболочки V в процессе их взаимодействия, возникающего под действием внутренних источников колебаний и начального возмущенного состояния в момент $t = 0$.

Пусть $p_i(t, x)$ — избыточное давление, $v_j^{(i)}(t, x)$ — проекция смещения точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ акустической среды Ω_i, $v_j(t, x)$ — проекция смещения точки x оболочки V на ось ox_j декартовой прямоугольной системы координат. Пусть, кроме того, $\varphi_l(t, x)$ — потенциал смещений точек среды Ω_l, т.е. $\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_j} = v_j^{(l)}(t, x)$ $(i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3)$.

В акустической среде Ω_l при любом t имеют место зависимости [2]

$$\frac{\partial^2 v_j^{(i)}}{\partial t^2} = -c_i^2 \frac{\partial p_l}{\partial x_j}, \tag{1}$$

где $c_i^2 = \frac{1}{\rho_l c^2}$; ρ_i — плотность среды Ω_i; c — скорость звука в жидкости.

Обозначим $\frac{\partial\varphi_l}{\partial t} = \psi_i(t, x)$ и предположим, что внутренние источники колебаний и начальное возмущенное состояние отсутствуют. Тогда при моделировании колебаний упругой изотропной оболочки V по линейной теории упругости возникает математическая задача: найти решения уравнений

$$\frac{1}{\beta_i^2}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2} - \Delta\psi_i = 0 \text{ в } \Omega_i \quad (i = 1, 2), \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} - \mu\Delta\vec{v} - (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} = 0 \text{ в } V, \tag{3}$$

удовлетворяющих начальным условиям

$$\psi_i = \frac{\partial\psi_l}{\partial t} = 0, \quad \vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0; \tag{4}$$

условиям сопряжения (контакта) на S_l

$$\vec{\sigma}_n = \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial\psi_l}{\partial t}\vec{n}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \quad \vec{v} = \vec{v}^{(l)}; \tag{5}$$

условиям излучения на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right) = 0. \tag{6}$$

Кроме того, искомые функции должны быть ограниченными в области определения. Здесь β_l — константа, которая определяется сжимаемостью и плотностью среды Ω_i; λ, μ — константы Ляме; σ_{ks} — проекция напряжения на ось ox_s в точках элементарной площадки, перпендикулярной оси ox_k $(k, s = 1, 2, 3)$; r — расстояние от начала координат до точки x; $\vec{v}$, $\vec{v}^{(i)}$ — вектора смещений точек оболочки V и среды Ω_l.

Заметим, что (1) в среде Ω_l приводит к зависимостям

$$\frac{\partial^2 v_j^{(l)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^3\varphi_l}{\partial t^2\partial x_j} = \frac{\partial^2\psi_l}{\partial t\partial x_j} = -c_l^2\frac{\partial p_l}{\partial x_j},$$

откуда следует, что

$$p_i(t, x) = -\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial\psi_l}{\partial t} \quad (i = 1, 2). \tag{7}$$

Опишем сферу S_R достаточно большого радиуса R с центром в начале системы координат и пусть Ω_R — область с границей $S_R \cup S_1$. Тогда имеют место соотношения

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega_R}\left[\frac{1}{\beta_1^2}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right)^2 + \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_k}\right)^2\right]d\Omega_R =$$
$$= \iint_{S_R}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\frac{\partial\psi_1}{\partial r}dS_R - \iint_{S_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\frac{\partial\psi_1}{\partial n}dS_1, \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega_2}\left[\frac{1}{\beta_2^2}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right)^2 + \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_k}\right)^2\right]d\Omega_2 = \iint_{S_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\frac{\partial\psi_2}{\partial n}dS_2. \tag{9}$$

Основная теорема энергии в теории упругости для системы (3) принимает вид [3]

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V\left\{\frac{\rho}{2}\sum_{k=1}^{3}w_k^2+\mu\sum_{k,e=1}^{3}\varepsilon_{ke}^2+\frac{\lambda}{2}\left(\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kk}\right)^2\right\}dV=$$

$$=\iint\limits_{S_1}\sum_{k=1}^{3}P_kw_kdS_1-\iint\limits_{S_2}\sum_{k=1}^{3}P_kw_kdS_2, \qquad (10)$$

где $w_k=\frac{\partial v_k}{\partial t}$; ε_{ke} — тензор деформаций; $P_k=\sum_{e=1}^{3}\sigma_{ek}\cos(n, x_e)$ — проекция напряжения в точках границы $S=S_1\cup S_2$ оболочки V на ось ox_k; n — внешняя нормаль к S_1 и внутренняя к S_2 ($k, e=1, 2, 3$).

Умножив (8) на $\frac{1}{c_1^2}$, (9) на $\frac{1}{c_2^2}$ и сложив полученные результаты с (10), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}J_R(t)=\iint\limits_{S_1}\left(\sum_{k=1}^{3}P_kw_k-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\frac{\partial\psi_1}{\partial n}\right)dS_1+$$

$$+\iint\limits_{S_2}\left(\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\frac{\partial\psi_2}{\partial n}-\sum_{k=1}^{3}P_kw_k\right)dS_2+\frac{1}{c_1^2}\iint\limits_{S_R}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\frac{\partial\psi_1}{\partial r}dS_R. \qquad (11)$$

Здесь

$$J_R(t)=\iiint\limits_V\left[\frac{\rho}{2}\sum_{k=1}^{3}w_k^2+\mu\sum_{k,e=1}^{3}\varepsilon_{ke}^2+\frac{\lambda}{2}\left(\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kk}\right)^2\right]dV+$$

$$+\frac{1}{2c_1^2}\iiint\limits_{\Omega_R}\left[\frac{1}{\beta_1^2}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right)^2+\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_k}\right)^2\right]d\Omega_R+\frac{1}{2c_2^2}\iiint\limits_{\Omega_2}\left[\frac{1}{\beta_2^2}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_k}\right)^2\right]d\Omega_2. \qquad (12)$$

Учитывая выражение для P_k и условия сопряжения (5), получаем

$$\iint\limits_{S_1}\left(\sum_{k=1}^{3}P_kw_k-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\frac{\partial\psi_1}{\partial n}\right)dS_1=$$

$$=\iint\limits_{S_1}\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\sum_{k=1}^{3}\left(w_k-\frac{\partial\psi_1}{\partial x_k}\right)\cos(n, x_k)\,dS_1=0,$$

так как на S_1

$$w_k=\frac{\partial v_k}{\partial t}=\frac{\partial v_k^{(1)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial x_k}=\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_k\partial t}=\frac{\partial v_k^{(1)}}{\partial t}.$$

Аналогично

$$\iint\limits_{S_2}\left(\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\frac{\partial\psi_2}{\partial n}-\sum_{k=1}^{3}P_kw_k\right)dS_2=0.$$

Кроме того, из условий излучения (6) для достаточно больших r следует, что $\frac{\partial\psi_1}{\partial r}=\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+o\left(\frac{1}{r}\right)$. В результате выражение (11) упрощается к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}J_R(t)=\frac{1}{c_1^2}\iint\limits_{S_R}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right)^2dS_R+\frac{1}{c_1^2}\iint\limits_{S_R}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\,o\left(\frac{1}{R}\right)dS_R. \qquad (13)$$

Так как $\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = O\left(\frac{1}{R}\right)$ при достаточно больших R, то второй интеграл в (13) справа стремится к нулю при $R \to \infty$. Убедимся, что тогда и первый интеграл в (13) справа также стремится к нулю при $R \to \infty$. Действительно, в противном случае правая часть (13) сохраняла бы знак для произвольных t и достаточно больших R, а левая, как легко проверить [1], оказалась бы знакопеременной.

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t} J(t) = \lim_{R\to\infty} \frac{\partial}{\partial t} J_R(t) = 0, \tag{14}$$

где J (t) получаем из (12) заменой Ω_R на Ω_1.

Интегрируя (14) по t в пределах от 0 до t, получаем

$$J(t) - J(0) = 0. \tag{15}$$

Но начальные условия (4) и выражения для тензора деформаций $\varepsilon_{ke} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_e} + \frac{\partial v_e}{\partial x_k}\right)$ дают J (0) = 0. Поэтому (15) сводится к J $(t) = 0$, откуда следует, что $\psi_l(t,x) = \frac{\partial\psi_l}{\partial t} = p_l(t, x) \equiv 0$ в Ω_l, $\vec{v}(t, x) \equiv 0$ в V.

По известной схеме отсюда получаем единственность решения задачи о взаимодействии гладкой упругой оболочки с акустическими средами, возникающего под воздействием внутренних источников колебаний с непрерывно распределенными плотностями и непрерывного начального возмущения в момент $t = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. М., Физматгиз, 1963. 472 с.
2. *Нигул У. К., Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Кутсер М. Э.* Эхо-сигналы от упругих объектов. Таллин, Изд-во АН ЭССР, 1974. 345 с.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. М., «Мир», 1975. 872 с.

Львовский университет

Поступила в редколлегию
30.IV 1976 г.

УДК 533.6.013.42

Г. И. Калита

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ В ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННОЕ КОЛЕБАНИЯМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим задачу о движении идеальной жидкости, в которую погружена круговая цилиндрическая оболочка бесконечной длины при действии на оболочку некоторой заданной нагрузки. Колебания оболочки и движение жидкости будем считать установившимися.

Движение оболочки толщиной h в цилиндрической системе координат (r, θ) описывается уравнениями [1]

$$\begin{gathered}(k^2+1)\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} + k^2\frac{\partial^3 w}{\partial\theta^3} - \frac{\partial w}{\partial\theta} - \frac{\partial^2 v}{\partial\tau^2} = 0,\\ k^2\frac{\partial^3 v}{\partial\theta^3} - \frac{\partial v}{\partial\theta} + k^2\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4} + w + \frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2} - \frac{1-\nu^2}{E}R^2\bar{p} = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

где R — радиус кривизны срединной поверхности; $\bar{p}$ — полное давление, действующее на оболочку; w, v — перемещения оболочки в нормальном и тангенциальном направлениях; $k^2 = \frac{h^2}{12R^2}$; $\tau = \frac{c_1 t}{R}$ — безразмерное время; $c_1^2 = \frac{E}{\rho_0(1-\nu^2)}$; ρ_0 — плотность материала оболочки; E, ν — соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона для материала оболочки.