

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбель И. Я., Кейлис-Борок В. И., Яновская Т. Б.* Методика совместной интерпретации годографов и амплитудных кривых при изучении верхней мантии.— Машин. интерпретация сейсм. волн. Вычисл. сейсмология, 1966, вып. 2, с. 3—45.
2. *Тихонов А. Н.* Об устойчивости обратных задач.— Докл. АН СССР, 1943, 39, № 5, с. 195—198.
3. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации.— Докл. АН СССР, 1963, 151, № 3, с. 501—504.
4. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач.— Докл. АН СССР, 1963, 153, № 1, с. 49—52.
5. *Тихонов А. Н., Гласко В. Б.* О применении метода регуляризации в задачах геофизической интерпретации.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1975, № 1, с. 38—47.
6. *Яновская Т. Б.* Вычисление скоростных разрезов верхней мантии по годографу сейсмических волн, как обратная математическая задача.— Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1963, № 8, с. 1171—1177.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

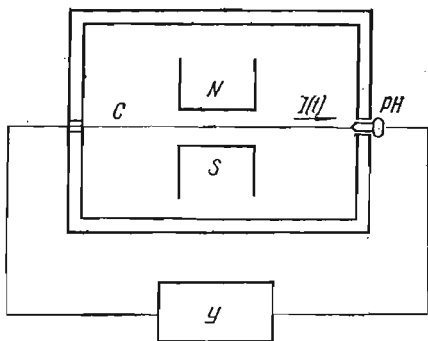
Поступила в редколлегию
20.X 1976 г.

УДК 517.94:519.21

Н. А. Михацкий, В. П. Рубаник

СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СТРУННОМ ГЕНЕРАТОРЕ

Реальные технические системы, в том числе системы управления и колебательные системы, почти всегда подвержены воздействию случайных возмущений. Эти случайные возмущения могут быть обусловлены случайными возмущениями параметров системы, внутренними шумами в системе



(тепловой, дробовой и фликкерные шумы в радиоэлектронных устройствах и др.), внешними случайными возмущениями. Наличие случайных возмущений колебательной системы приводит к флуктуациям амплитуды, фазы и частоты колебательной системы.

Исследованию флуктуаций в простейших линейных и нелинейных колебательных системах посвящено много работ [2, 7 и др.]. В данной работе сделана попытка исследования случайных колебаний в более сложной колебательной системе, содержащей звено с распределенными параметрами и звено с запаздыванием.

Рассмотрим флуктуации автоколебаний в струнном генераторе с учетом запаздывания в усилителе и резонансов между собственными частотами. Схема генератора изображена на рисунке (С — струна; РН — регулятор натяжения струны; N, S — полюсы магнита; Y — усилитель).

В работе [6] рассмотрены многочастотные детерминированные колебания в указанном генераторе. Здесь рассмотрим одно- и многочастотные случайные колебания, которые приближенно описываются уравнениями

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} - \frac{2\epsilon h_0}{\rho} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \frac{e}{\rho} F(x) I(t) + \frac{\sqrt{e}}{\rho} \Phi(x) \dot{W}(t), \quad (1)$$

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\lambda \frac{dI(t)}{dt} + kI(t) = \frac{dY(t - \Delta)}{dt}, \quad (2)$$

$$Y(t) = h_1 E(t) - h_2 E^3(t), \quad E(t) = \int_0^t F(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} dx$$

с краевыми условиями

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad (3)$$

где ε — малый параметр; $\rho > 0$; $I(t)$ — ток усилителя; $F(x)$ характеризует магнитную индукцию от полюсов магнита; $W(t)$ — процесс броуновского движения интенсивности \mathfrak{G} ; $\Phi(x)$ — распределение случайных возмущений вдоль струны; $E(t)$ — напряжение на струне, индуцируемое магнитом; $h_1, h_2, \lambda, k > 0, \Delta \geq 0$.

Для упрощения предположим, что магниты расположены симметрично относительно середины струны и случайные возмущения тоже расположены симметрично. Тогда $F(l-x) = F(x)$, $\Phi(l-x) = \Phi(x)$.

Сначала, пренебрегая внутренними резонансами между собственными частотами колебаний струны, рассмотрим флуктуации одночастотных автоколебаний на основной гармонике колебаний струны $\omega_1 = \frac{\pi c}{l}$.

Одночастотные колебания будем искать приближенно в виде

$$u_1(t, x) = a_1(t) \cos[\omega_1 t + \alpha_1(t)] \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (4)$$

$$I(t) = F_1 N(a_1(t), \alpha_1(t), \omega_1 t, \Delta).$$

Подставляя в уравнения (1), (2) выражение $u_1(t, x)$, для определения a_1 и α_1 получаем систему уравнений

$$\frac{da_1}{dt} = \varepsilon P_1(a_1, a_{1\Delta}, \alpha_1, \alpha_{1\Delta}, \omega_1 t) + \sqrt{\varepsilon} P_2(\alpha_1, \omega_1 t) \dot{W}(t),$$

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \varepsilon Q_1(a_1, a_{1\Delta}, \alpha_1, \alpha_{1\Delta}, \omega_1 t) + \sqrt{\varepsilon} Q_2(a_{1\Delta}, \alpha_1, \omega_1 t) \dot{W}(t), \quad (5)$$

$$a_{1\Delta} = a_1(t - \Delta), \quad \alpha_{1\Delta} = \alpha_1(t - \Delta).$$

К системе (5) применим метод усреднения. Согласно [8], усреднение системы (5) проводим в два приема. Сначала усредняем нефлуктуационные члены, затем для полученной системы составляем уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова (ФПК). Проводим в этом уравнении повторное усреднение. Получаем полностью усредненное уравнение ФПК

$$\frac{\partial p(t, a_1, \alpha_1)}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{\partial}{\partial a_1} \left\{ \left\{ h_0 a_1 + \frac{F_1^2 \omega_1 a_1 (3h_2 F_1^2 a_1 - 4h_1)}{8[(k - \omega_1^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_1^2]} [(k - \omega_1^2) \sin(\Delta \omega_1) + 2\lambda \omega_1 \cos(\Delta \omega_1)] \right\} p(t, a_1, \alpha_1) \right\} + \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left\{ \frac{F_1^2 \omega_1 (3h_2 F_1^2 \omega_1^2 a_1^2 - 4h_1)}{8[(k - \omega_1^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_1^2]} [(k - \omega_1^2) \times \right.$$

$$\left. \times \cos(\Delta \omega_1) - 2\lambda \omega_1 \sin(\Delta \omega_1)] p(t, a_1, \alpha_1) \right\} + \frac{\varepsilon \Phi_1^2 \mathfrak{G}^2}{4\rho^2 \omega_1^2} \frac{\partial^2 p(t, a_1, \alpha_1)}{\partial a_1^2} +$$

$$+ \frac{\varepsilon \Phi_1^2 \mathfrak{G}^2}{4\rho^2 \omega_1^2 a_1^2} \frac{\partial^2 p(t, a_1, \alpha_1)}{\partial \alpha_1^2}, \quad (6)$$

где

$$F_1 = \int_0^l F(x) \sin \frac{\pi x}{l} dx; \quad \Phi_1 = \int_0^l \Phi(x) \sin \frac{\pi x}{l} dx.$$

Полученному уравнению ФПК соответствует система стохастических дифференциальных уравнений

$$\frac{da_1}{dt} = -\frac{\varepsilon h_0 a_1}{\rho} - \frac{\varepsilon F_1^2 \omega_1 a_1 (3h_2 F_1^2 \omega_1^2 a_1^2 - 4h_1)}{8\rho [(k - \omega_1^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_1^2]} [(k - \omega_1^2) \sin(\Delta \omega_1) + 2\lambda \omega_1 \cos(\Delta \omega_1)] + \sqrt{\varepsilon} \dot{W}_1(t), \quad (7)$$

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\varepsilon F_1^2 \omega_1 (3h_2 F_1^2 \omega_1^2 a_1^2 - 4h_1)}{8\rho [(k - \omega_1^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_1^2]} [(k - \omega_1^2) \cos(\Delta \omega_1) - 2\lambda \omega_1 \sin(\Delta \omega_1)] + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{a_1} \dot{W}_2(t),$$

где W_1, W_2 — независимые винеровские процессы одинаковой интенсивности

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2 = \frac{\Phi_1 \mathfrak{G}}{2\rho\omega_1}.$$

Видно, что первое из уравнений (7) не зависит от второго и его можно исследовать независимо. Положив в этом уравнении $\frac{da}{dt} = 0$, $W_1 = 0$, получим уравнение для определения амплитуд стационарных детерминированных колебаний, из которого получаем

$$a_{ст} = \frac{2}{F_1\omega_1} \sqrt{\frac{1}{3h_2} \left\{ h_1 - \frac{2h_0 [4\lambda^2\omega_1^2 + (k - \omega_1^2)^2]}{F_1^2\omega_1 [(k - \omega_1^2) \sin(\Delta\omega_1) + 2\lambda\omega_1 \cos(\Delta\omega_1)]} \right\}}. \quad (8)$$

Для возбуждения незатухающих колебаний должно выполняться условие

$$h_1 F_1^2 \omega_1 [(k - \omega_1^2) \sin(\Delta\omega_1) + 2\lambda\omega_1 \cos(\Delta\omega_1)] > 2h_0 [4\lambda^2\omega_1^2 + (k - \omega_1^2)^2]. \quad (9)$$

Уравнение ФПК, соответствующее одному амплитудному уравнению, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t, a)}{\partial t} = & \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \left\{ h_0 a + \frac{F_1^2 \omega_1 (3h_2 F_1^2 \omega_1 a_1^2 - 4h_1)}{8 [(k - \omega_1^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_1^2]} [(k - \omega_1^2) \sin(\Delta\omega_1) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\lambda\omega_1 \cos(\Delta\omega_1)] \right\} p(t, a) \right\} + \frac{\varepsilon \Phi_1^2 \mathfrak{G}^2}{4\rho^2 \omega_1^2} \frac{\partial^2 p(t, a)}{\partial a^2}. \quad (10) \end{aligned}$$

Положив $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, получим уравнение для определения стационарного распределения амплитуд, из которого получаем

$$\begin{aligned} p_{ст}(a_1) = C \exp \left\{ - \frac{2\rho\omega_1^2 a_1^2}{\Phi_1^2 \mathfrak{G}} \left[h_0 + \frac{F_1 \omega_1 (3h_2 F_1^2 \omega_1^2 a_1^2 - 4h_1)}{16 [(k - \omega_1^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_1^2]} [(k - \omega_1^2) \sin(\Delta\omega_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\lambda \cos(\Delta\omega_1)] \right] \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

Постоянная C определится из условия

$$\int_0^{\infty} p_{ст}(a) da = 1 \quad (p_{ст}(-a) \equiv 0).$$

На основании (11) можно определить наиболее вероятное значение амплитуды, $M(a)$, $D(a)$. Наиболее вероятное значение a совпадает с $a_{ст}$ (см. (8)).

Для $M(a)$ получаем выражение

$$M(a) = \frac{C \sqrt{\pi}}{\sqrt{A}} \exp \left\{ \frac{B^2}{4A} \right\},$$

где

$$A = \frac{3\rho h_2 F_1^4 \omega_1^5 [(k - \omega_1^2) \sin(\Delta\omega_1) + 2\lambda\omega_1 \cos(\Delta\omega_1)]}{8\Phi_1^2 \mathfrak{G} [(k - \omega_1^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_1^2]}; \quad (12)$$

$$B = \frac{2\rho\omega_1^2}{\Phi_1^2 \mathfrak{G}} \left\{ h_0 - \frac{h_1 F_1^2 \omega_1 [(k - \omega_1^2) \sin(\Delta\omega_1) + 2\lambda\omega_1 \cos(\Delta\omega_1)]}{2 [(k - \omega_1^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_1^2]} \right\}.$$

Выражение для $D(a)$ получается весьма громоздким, и мы его не выписываем. Сравнивая (11) и (12), получаем, что при малых $\Delta > 0$ $M(a) > a_{ст}$. Кроме того, при малых $\Delta > 0$ с ростом Δ значения $a_{ст}$ и $M(a)$ уменьшаются.

Рассмотрим теперь многочастотные колебания струнного генератора с учетом резонансов между собственными частотами струны:

$$\omega_s = s\omega_1.$$

Если взять случай симметричного расположения магнитов, то четные гармоники оказываются независимыми от нечетных. Поэтому можно рассмотреть отдельно четные и нечетные гармоники. Нами рассмотрен случай взаимодействия нечетных гармоник. При слабых связях высшими гармониками можно пренебречь и ограничиться первой и третьей гармониками. Как и в случае одночастотных колебаний, проводим усреднение в два приема. Тогда для амплитуд и фаз получаем усредненные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} = & -\frac{eh_0a_1}{\rho} - \frac{\varepsilon F_1^2 \omega_1 a_1}{8\rho [(k - \omega_1^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_1^2]} \{[(k - \omega_1^2) \sin(\Delta\omega_1) + \\ & + 2\lambda\omega_1 \cos(\Delta\omega_1)] [3h_2\omega_1^2 (F_1^2 a_1^2 + 18F_3^2 a_3^2) - 4h_1] - 27h_2 F_3^2 \omega_1^2 a_3^2 [(k - \omega_1^2) \sin(\alpha_3 - \\ & - 3\alpha_1 - \Delta\omega_1) - 2\lambda\omega_1 \cos(\alpha_3 - 3\alpha_1 - \Delta\omega_1)]\} + \frac{V \varepsilon \Phi_1}{2\rho\omega_1} W_1(t), \\ \frac{da_3}{dt} = & -\frac{eh_0a_3}{\rho} - \frac{3\varepsilon F_3^2 \omega_1 a_3}{8\rho [(k - 9\omega_1^2)^2 + 26\lambda^2 \omega_1^2]} [(k - 9\omega_1^2) \sin(3\Delta\omega_1) + \\ & + 6\lambda\omega_1 \cos(3\Delta\omega_1)] [3h_2\omega_1^2 (2F_1^2 a_1^2 + 9F_3^2 a_3^2) - 4h_1] + \frac{\varepsilon h_2 F_3 F_1^3 \omega_1^3 a_1^3}{8\rho [(k - \omega_1^2)^2 + 36\lambda^2 \omega_1^2]} [(k - \\ & - 9\omega_1^2) \sin(\alpha_3 - 3\alpha_1 + 3\Delta\omega_1) - 6\lambda\omega_1 \cos(\alpha_3 - 3\alpha_1 + 3\Delta\omega_1)] + \frac{V \varepsilon \Phi_3}{6\rho\omega_1} W_2(t), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} = & -\frac{\varepsilon F_1^2 \omega_1}{8\rho [(k - \omega_1^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_1^2]} \{[(k - \omega_1^2) \cos(\Delta\omega_1) - 2\lambda\omega_1 \sin(\Delta\omega_1)] \times \\ & \times [3h_2\omega_1^2 (F_1^2 a_1^2 + 18F_3^2 a_3^2) - 4h_1] + 27h_2 F_3^2 \omega_1^2 a_3^2 [(k - \omega_1^2) \cos(\alpha_3 - 3\alpha_1 - \Delta\omega_1) + \\ & + 2\lambda\omega_1 \sin(\alpha_3 - 3\alpha_1 - \Delta\omega_1)]\} + \frac{V \varepsilon \Phi_1}{2\rho\omega_1 a_1} \dot{W}_3(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_3}{dt} = & -\frac{3\varepsilon F_1 F_3 \omega_1}{8\rho [(k - 9\omega_1^2)^2 + 36\lambda^2 \omega_1^2]} [(k - 9\omega_1^2) \cos(3\Delta\omega_1) - 6\lambda\omega_1 \sin(3\Delta\omega_1)] \times \\ & \times [3h_2\omega_1^2 (2F_1^2 a_1^2 + 9F_3^2 a_3^2) - 4h_1] + \frac{\varepsilon h_2 F_1^3 F_3 \omega_1^3 a_1^3}{8\rho [(k - 9\omega_1^2)^2 + 36\lambda^2 \omega_1^2]} [(k - 9\omega_1^2) \cos(\alpha_3 - \\ & - 3\alpha_1 + 3\Delta\omega_1) + 6\lambda\omega_1 \sin(\alpha_3 - 3\alpha_1 + 3\Delta\omega_1)] + \frac{V \varepsilon \Phi_3}{6\rho\omega_1 a_3} \dot{W}_4(t), \end{aligned}$$

где W_1, W_2, W_3, W_4 — независимые нормированные винеровские процессы. Видно, что в этом случае гармоники взаимно влияют друг на друга и амплитудные уравнения тесно связаны с фазовыми, так что их необходимо рассматривать лишь совместно.

Уравнение ФПК, соответствующее системе (13), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} = & \varepsilon \frac{\partial}{\partial a_1} \left[\left\{ \frac{h_0 a_1}{\rho} + \frac{F_1^2 \omega_1 a_1}{8\rho [(k - \omega_1^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_1^2]} \{[(k - \omega_1^2) \sin(\Delta\omega_1) + \right. \right. \\ & + 2\lambda\omega_1 \cos(\Delta\omega_1)] [3h_2\omega_1^2 (F_1^2 a_1^2 + 18F_3^2 a_3^2) - 4h_1] - 27h_2 F_3^2 \omega_1^2 a_3^2 [(k - \omega_1^2) \sin(\alpha_3 - \\ & - 3\alpha_1 - \Delta\omega_1) - 2\lambda\omega_1 \cos(\alpha_3 - 3\alpha_1 - \Delta\omega_1)]\} \left. \right\} p \right] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial a_3} \left[\left\{ \frac{h_0 a_3}{\rho} + \right. \right. \\ & + \frac{3F_3^2 \omega_1 a_3}{8\rho [(k - 9\omega_1^2)^2 + 36\lambda^2 \omega_1^2]} [(k - 9\omega_1^2) \sin(3\Delta\omega_1) + 6\lambda\omega_1 \cos(3\Delta\omega_1)] [3h_2\omega_1^2 \times \\ & \times (2F_1^2 a_1^2 + 9F_3^2 a_3^2) - 4h_1] - \frac{h_2 F_1^3 F_3 \omega_1^3 a_1^3}{8\rho [(k - 9\omega_1^2)^2 + 36\lambda^2 \omega_1^2]} [(k - 9\omega_1^2) \sin(\alpha_3 - 3\alpha_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3\Delta\omega_1 - 6\lambda\omega_1 \cos(\alpha_3 - 3\alpha_1 + 3\Delta\omega_1)] \rho \Big] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{F_1^2 \omega_1}{8\rho [(k - \omega_1^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_1^2]} \times \right. \\
& \quad \times \{[(k - \omega_1^2) \cos(\Delta\omega_1) - 2\lambda\omega_1 \sin(\Delta\omega_1)] [3h_2\omega_1^2 (F_1^2 a_1^2 + 18F_3^2 a_3^2) - 4h_1] + \\
& \quad + 27h_2 F_3^2 a_3^2 \omega_1 [(k - \omega_1^2) \cos(\alpha_3 - 3\alpha_1 - \Delta\omega_1) + 2\lambda\omega_1 \sin(\alpha_3 - 3\alpha_1 - \Delta\omega_1)]\} \rho \Big] + \\
& + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left[\left\{ \frac{3F_3^2 \omega_1}{8\rho [(k - 9\omega_1^2)^2 + 36\lambda^2 \omega_1^2]} [(k - 9\omega_1^2) \cos(3\Delta\omega_1) - 6\lambda\omega_1 \sin(3\Delta\omega_1)] \times \right. \right. \\
& \quad \times [3h_2\omega_1^2 (2F_1^2 a_1^2 + 9F_3^2 a_3^2) - 4h_2] - \frac{h_2 F_1^3 F_3 \omega_1^3 a_1^3}{8\rho [(k - 9\omega_1^2)^2 + 36\lambda^2 \omega_1^2]} [(k - \\
& \quad - 9\omega_1^2) \cos(\alpha_3 - 3\alpha_1 + 3\Delta\omega_1) + 6\lambda\omega_1 \sin(\alpha_3 - 3\alpha_1 + 3\Delta\omega_1)] \Big\} \rho \Big] + \\
& + \frac{\varepsilon \Phi_1^2 \mathcal{G}^2}{4\rho^2 \omega_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial a_1^2} + \frac{\varepsilon \Phi_3^2 \mathcal{G}^2}{36\rho^2 \omega_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial a_3^2} + \frac{\varepsilon \Phi_1^2 \mathcal{G}^2}{4\rho^2 \omega_1^2 a_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\varepsilon \Phi_3^2 \mathcal{G}^2}{36\rho^2 \omega_1^2 a_3^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha_3^2}. \quad (14)
\end{aligned}$$

Здесь $p = p(t, a_1, a_3, \alpha_1, \alpha_3)$. Полученное уравнение является уравнением параболического типа.

Если положить $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, то получим эллиптическое уравнение для определения стационарной плотности распределения $p_{ст}(a_1, a_3, \alpha_1, \alpha_3)$. Полученные уравнения интегрируются довольно сложно, и мы не приводим результатов их интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. К., «Наук. думка», 1968. 354 с.
2. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М., «Наука», 1968. 660 с.
3. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. К., «Наук. думка», 1971. 440 с.
4. Рубаник В. П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М., «Наука», 1969. 287 с.
5. Рубаник В. П., Царьков Е. Ф. Исследование флуктуаций в ламповом генераторе с запаздывающей обратной связью. — Материалы V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Т. 4. К., 1970, с. 439—446.
6. Рубаник В. П. Об автоколебаниях струнного генератора. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 60—63.
7. Стратанович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., «Сов. радио», 1961. 558 с.
8. Хасьминский Р. З. О принципе усреднения для стохастических дифференциальных уравнений Ито. — Кибернетика, 1968, 4, № 3, с. 260—279.

Черновицкий университет

Поступила в редколлегию
19.X 1976 г.

УДК 531.12

Э. Н. Сокол

ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В КРИВОЛИНЕЙНОМ ТРУБОПРОВОДЕ С УЧЕТОМ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Исследуем движение материальной точки M по внутренней поверхности вертикально расположенного криволинейного трубопровода переменного радиуса при условии, что сопротивление движению пропорционально квадрату скорости точки.

Пусть m — масса точки M , v — ее скорость, v_0 — скорость точки при входе ее в криволинейный трубопровод, $F = kv^2$ — сила сопротивления дви-