

$$\begin{aligned}
& + 3\Delta\omega_1 - 6\lambda\omega_1 \cos(\alpha_3 - 3\alpha_1 + 3\Delta\omega_1)] \rho \Big] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{F_1^2 \omega_1}{8\rho [(k - \omega_1^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_1^2]} \times \right. \\
& \quad \times \{[(k - \omega_1^2) \cos(\Delta\omega_1) - 2\lambda\omega_1 \sin(\Delta\omega_1)] [3h_2\omega_1^2 (F_1^2 a_1^2 + 18F_3^2 a_3^2) - 4h_1] + \\
& \quad + 27h_2 F_3^2 a_3^2 \omega_1 [(k - \omega_1^2) \cos(\alpha_3 - 3\alpha_1 - \Delta\omega_1) + 2\lambda\omega_1 \sin(\alpha_3 - 3\alpha_1 - \Delta\omega_1)]\} \rho \Big] + \\
& + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left[\left\{ \frac{3F_3^2 \omega_1}{8\rho [(k - 9\omega_1^2)^2 + 36\lambda^2 \omega_1^2]} [(k - 9\omega_1^2) \cos(3\Delta\omega_1) - 6\lambda\omega_1 \sin(3\Delta\omega_1)] \times \right. \right. \\
& \quad \times [3h_2\omega_1^2 (2F_1^2 a_1^2 + 9F_3^2 a_3^2) - 4h_2] - \frac{h_2 F_1^3 F_3 \omega_1^3 a_1^3}{8\rho [(k - 9\omega_1^2)^2 + 36\lambda^2 \omega_1^2]} [(k - \\
& \quad - 9\omega_1^2) \cos(\alpha_3 - 3\alpha_1 + 3\Delta\omega_1) + 6\lambda\omega_1 \sin(\alpha_3 - 3\alpha_1 + 3\Delta\omega_1)] \Big\} \rho \Big] + \\
& + \frac{\varepsilon \Phi_1^2 \Theta^2}{4\rho^2 \omega_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial a_1^2} + \frac{\varepsilon \Phi_3^2 \Theta^2}{36\rho^2 \omega_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial a_3^2} + \frac{\varepsilon \Phi_1^2 \Theta^2}{4\rho^2 \omega_1^2 a_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\varepsilon \Phi_3^2 \Theta^2}{36\rho^2 \omega_1^2 a_3^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha_3^2}. \quad (14)
\end{aligned}$$

Здесь $p = p(t, a_1, a_3, \alpha_1, \alpha_3)$. Полученное уравнение является уравнением параболического типа.

Если положить $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, то получим эллиптическое уравнение для определения стационарной плотности распределения $p_{ст}(a_1, a_3, \alpha_1, \alpha_3)$. Полученные уравнения интегрируются довольно сложно, и мы не приводим результатов их интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. К., «Наук. думка», 1968. 354 с.
2. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М., «Наука», 1968. 660 с.
3. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. К., «Наук. думка», 1971. 440 с.
4. Рубаник В. П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М., «Наука», 1969. 287 с.
5. Рубаник В. П., Царьков Е. Ф. Исследование флуктуаций в ламповом генераторе с запаздывающей обратной связью. — Материалы V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Т. 4. К., 1970, с. 439—446.
6. Рубаник В. П. Об автоколебаниях струнного генератора. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 60—63.
7. Стратанович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., «Сов. радио», 1961. 558 с.
8. Хасьминский Р. З. О принципе усреднения для стохастических дифференциальных уравнений Ито. — Кибернетика, 1968, 4, № 3, с. 260—279.

Черновицкий университет

Поступила в редколлегию
19.X 1976 г.

УДК 531.12

Э. Н. Сокол

ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В КРИВОЛИНЕЙНОМ ТРУБОПРОВОДЕ С УЧЕТОМ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Исследуем движение материальной точки M по внутренней поверхности вертикально расположенного криволинейного трубопровода переменного радиуса при условии, что сопротивление движению пропорционально квадрату скорости точки.

Пусть m — масса точки M , v — ее скорость, v_0 — скорость точки при входе ее в криволинейный трубопровод, $F = kv^2$ — сила сопротивления дви-

жению, r — радиус внутренней окружности поперечного сечения криволинейного трубопровода, $\rho = \rho(\beta)$ — переменный радиус кривизны линии, на которой находятся центры поперечных сечений криволинейного трубопровода, Q_β^F, Q_α^F — обобщенные силы сопротивления движению. В качестве обобщенных координат принимаем углы α и β (рис. 1). Уравнения Лагранжа второго рода для данной задачи имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} + \frac{\partial \Pi}{\partial \beta} = Q_\beta^F, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = Q_\alpha^F, \quad (2)$$

где T и Π — кинетическая и потенциальная энергии точки M :

$$T = \frac{1}{2} m[(\rho - r \cos \alpha)^2 \dot{\beta}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2], \quad (3)$$

$$\Pi = -mg(y(\beta) + r \cos \alpha \cos \beta). \quad (4)$$

Определим обобщенные силы сопротивления. Элементарная работа силы F на перемещениях точки, которые соответствуют приращениям обобщенных координат, вычисляется следующим образом:

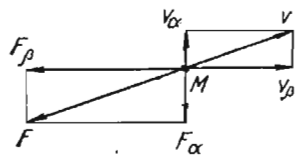


Рис. 2

$$-F_\beta (\rho - r \cos \alpha) \delta\beta = Q_\beta^F \delta\beta, \quad (5)$$

$$-F_\alpha r \delta\alpha = Q_\alpha^F \delta\alpha. \quad (6)$$

Из рис. 2 следует, что

$$F_\beta = F \cos(\bar{v}, \bar{v}_\beta), \quad F_\alpha = F \cos(\bar{v}, \bar{v}_\alpha).$$

Учитывая, что $F = kv^2$, получаем

$$Q_\beta^F = -kv^2 \frac{v_\beta}{v} (\rho - r \cos \alpha) = -kvv_\beta (\rho - r \cos \alpha), \quad (7)$$

$$Q_\alpha^F = -kv^2 \frac{v_\alpha}{v} r = kvv_\alpha r. \quad (8)$$

Если учесть, что

$$v = \sqrt{(\rho - r \cos \alpha)^2 \dot{\beta}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2},$$

то из (7) и (8) получим

$$Q_\beta^F = -k \sqrt{(\rho - r \cos \alpha)^2 \dot{\beta}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2} (\rho - r \cos \alpha) \dot{\beta},$$

$$Q_\alpha^F = -k \sqrt{(\rho - r \cos \alpha)^2 \dot{\beta}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2} r \dot{\alpha}.$$

Теперь уравнения Лагранжа принимают вид

$$\begin{aligned} \beta - \frac{1}{\rho - r \cos \alpha} \frac{d\rho}{d\beta} \dot{\beta}^2 + 2 \frac{\dot{\rho} + r \sin \alpha \dot{\alpha}}{\rho - r \cos \alpha} \dot{\beta} - \frac{gy'(\beta)}{(\rho - r \cos \alpha)^2} + \\ + \frac{gr \cos \alpha \sin \beta}{(\rho - r \cos \alpha)^2} = -\eta \sqrt{(\rho - r \cos \alpha)^2 \dot{\beta}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\ddot{\alpha} - \frac{\rho - r \cos \alpha}{r} \sin \alpha \dot{\beta}^2 + \frac{g}{r} \cos \beta \sin \alpha = -\eta \sqrt{(\rho - r \cos \alpha)^2 \dot{\beta}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2}. \quad (10)$$

Дифференциальными уравнениями (9), (10) описывается движение материальной точки M в криволинейном трубопроводе переменного радиуса.

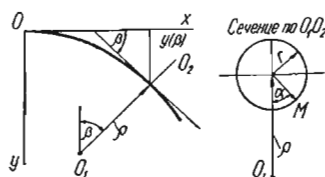


Рис. 1

Рассмотрим случай, когда $r \ll \rho$, $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \beta \approx 1$. При этом получаем

$$\ddot{\beta} + 2 \frac{\dot{\rho}}{\rho} \dot{\beta} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\beta} \beta^2 = -\eta \rho \beta^2, \quad (11)$$

$$\alpha + \left(a^2 - \frac{\rho}{r} \beta^2 \right) \alpha = -\eta \rho \beta \alpha, \quad (12)$$

где $\eta = \frac{k}{m}$, $a^2 = \frac{g}{r}$. Преобразуем полученные уравнения к виду, более удобному для интегрирования, положив $d\beta/dt = \omega$. Тогда

$$\frac{d\omega}{\omega} + \frac{d\rho}{\rho} = -\eta \rho d\beta. \quad (13)$$

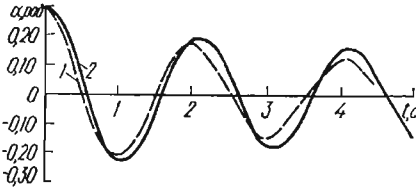


Рис. 3

Проинтегрируем (13) в соответствующих пределах, учитывая, что в момент входа точки M в криволинейный трубопровод (т. е. при $t = 0$) $\beta = 0$, $\rho = \rho_0$, $\omega = \omega_0$. Получаем

$$\ln \frac{\omega}{\omega_0} + \ln \frac{\rho}{\rho_0} = \ln e^{-\eta \int_0^\beta \rho d\beta}.$$

Отсюда, учитывая соотношение $v_0 = \omega_0 \rho_0$, имеем

$$\omega = \frac{d\beta}{dt} = \frac{v_0}{\rho} e^{-\eta \int_0^\beta \rho d\beta}. \quad (14)$$

Положив $\int_0^\beta \rho d\beta = z$, выражение (14) запишем в виде

$$e^{\eta z} dz = v_0 dt. \quad (15)$$

Интегрируя (15), получаем иной вид уравнения (14):

$$\dot{\beta} = \frac{v_0}{\rho (1 + \eta v_0 t)}. \quad (16)$$

С учетом (16) уравнение (12) принимает вид

$$x^2 \alpha'' + x \alpha' + \left(x^2 - \frac{1}{\eta^2 \rho r} \right) \alpha = 0, \quad (17)$$

где

$$x = \frac{a}{\eta v_0} (1 + \eta v_0 t).$$

Следовательно, движение материальной точки M при заданных условиях приближенно описывается дифференциальными уравнениями (16) и (17), первое из которых с разделяющимися переменными, а второе — однородное с переменными коэффициентами. Решая (16), получаем

$$\int_0^\beta \rho d\beta = \frac{1}{\eta} \ln (1 + \eta v_0 t). \quad (18)$$

Решим однородное уравнение (17), положив, что

$$\rho = R = \text{const}, \quad v^2 = \frac{1}{\eta^2 R r}.$$

Получим уравнение Бесселя

$$x^2 \alpha'' + x \alpha' + (x^2 - v^2) \alpha = 0,$$

решение которого

$$\alpha = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x).$$

По начальным условиям $t = 0$, $\alpha = \alpha_0$, $\alpha_0' = 0$ находим C_1 и C_2 :

$$C_1 = \frac{1}{2} \pi \alpha_0 \frac{a}{\eta \nu_0} Y_\nu' \left(\frac{a}{\eta \nu_0} \right), \quad C_2 = \frac{1}{2} \pi \alpha_0 \frac{a}{\eta \nu_0} J_\nu' \left(\frac{a}{\eta \nu_0} \right).$$

На рис. 3 представлены графики $\alpha = \alpha(t)$ для случая $\eta = 0,01$ 1/м (кривая 1) и $\eta = 0,005$ 1/м (кривая 2) при условии, что $R = 10^4$ м, $r = 1$ м, $\nu_0 = 100$ м/с, $\alpha_0 = 0,3$ рад.

Ивано-Франковский институт
нефти и газа

Поступила в редколлегию
15.X 1976 г.

УДК 539.377

Ю. М. Коляно, Е. Г. Иванык

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОГО ЦИЛИНДРА, ПОДВЕРГАЕМОГО ПЕРИОДИЧЕСКОМУ ТЕПЛОВОМУ ВОЗДЕЙСТВИЮ

Рассмотрим длинный составной цилиндр радиуса R_2 с неподвижными торцами, состоящий из цилиндра радиуса R_1 , сопряженного с толстостенной оболочкой из другого материала. Пусть температура свободной от внешней нагрузки поверхности $r = R_2$ изменяется во времени по периодическому закону, т. е. $t|_{r=R_2} = t_0 e^{i\omega\tau}$, $-\infty < \tau < +\infty$.

Представим физико-механические характеристики цилиндра в виде

$$\rho(r) = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) S_-(r - R_1), \quad (1)$$

где ρ_2 , ρ_1 — соответственно характеристики оболочки и заполнителя; $S_-(r - R_1) = \begin{cases} 1, & r \geq R_1 \\ 0, & r < R_1 \end{cases}$ — асимметричная единичная функция. Возникающее при этом периодическое температурное поле в составном цилиндре известно [1]. Обусловленные этим температурным полем напряжения определяются формулами [2]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu(r) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda(r) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) - \beta(r) t(r, \tau), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2\mu(r) \frac{u}{r} + \lambda(r) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) - \beta(r) t(r, \tau), \\ \sigma_{zz} &= \lambda(r) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) - \beta(r) t(r, \tau), \end{aligned} \quad (2)$$

где $u(r, \tau)$ — радиальное перемещение, удовлетворяющее уравнению

$$\begin{aligned} \mu(r) \Delta u + [\lambda(r) + \mu(r)] \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) - \mu(r) \frac{u}{r^2} + 2 \frac{\partial \mu(r)}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + \\ + \frac{\partial \lambda(r)}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} [\beta(r) t(r, \tau)] = \rho(r) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}; \end{aligned} \quad (3)$$

$\lambda(r)$, $\mu(r)$ — коэффициенты Ламе кусочно-однородного цилиндра; $\beta(r) = [3\lambda(r) + 2\mu(r)] \alpha_t(r)$; $\alpha_t(r)$ — температурный коэффициент линейного расширения; $\rho(r)$ — плотность.

Напряжение σ_{rr} и перемещение u должны удовлетворять граничным условиям

$$\sigma_{rr} = 0 \text{ при } r = R_2, \quad u = 0 \text{ при } r = 0. \quad (4)$$

Подставляя (1) в уравнение (3), приводим его к виду

$$\Delta u - \frac{u}{r^2} - f(r) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \varphi(r) \frac{\partial t}{\partial r} + \left(\varepsilon t - \varepsilon_1 \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\kappa}{R_1} u \right) \Big|_{r=R_1} \delta_-(r - R_1), \quad (5)$$