стеме с плавающей запятой с t-двоичными разрядами для записи мантиссы чисел. Тогда для любой функции $f(x) \in W^{(r)}(M;\ a,\ b)$ справедливо неравенство

$$\varepsilon \leqslant \frac{(b-a)^{r+1} c_r M}{(n-k)^r} + c_k 2^{-t},$$

где

$$\varepsilon = \left| \int_a^b f(x)\,dx - fl\left(\sum_0^{n-k} p_i f(x_i)\right) \right|, \text{ а } c_r,\ c_k,\ t$$

известны.

Доказательство следует из неравенства

$$\varepsilon = \left| \int_a^b f(x)\,dx - fl\left(\sum_0^{n-k} p_i f(x_i)\right) + \sum_0^{n-k} p_i f(x_i) - \sum_0^{n-k} p_i f(x_i) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_0^{n-k} p_i f(x_i) \right| + \left| \sum_0^{n-k} p_i f(x_i) - fl\left(\sum_0^{n-k} p_i f(x_i)\right) \right|$$

и оценок из работ [4, 5].

Анализ результатов подсчета определенных интегралов нелинейным методом. С помощью программы [1], составленной применительно к ЭВМ «ЕС-10-22», предложенным нелинейным методом вычислены интегралы

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1-2x\cos\lambda + x^2}\,dx \quad (\lambda = 0,\ 1), \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x},$$

$$\frac{1}{e}\int_0^1 x^m e^x\,dx \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ 16),$$

которые подсчитаны и известными линейными методами. Примеры показывают, что кроме вычислительной устойчивости применение ветвящихся цепных дробей позволяет приблизительно в два раза уменьшить количество операций по сравнению с методами прямоугольников, трапеций и Симпсона при заданной точности подсчета интегралов.

1. *Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И.* Вычислительные методы высшей математики.— Минск : Вышэйш. школа, 1975.— Т. 2. 420 с.
2. *Микеладзе Ш. Е.* Численные методы математического анализа.— М. : Гостехиздат, 1953.— 528 с.
3. *Недашковський М. О., Скоробогатько В. Я.* Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом гіллястих ланцюгових дробів.— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь.— К. : Наук. думка, 1977, с. 84—92.
4. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы.— М. : Физматгиз, 1974.— 92 с.
5. *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений.— М. : Мир, 1970.— 564 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
04.05.78

УДК 534

В. С. Заячковский

ПОВЕДЕНИЕ ЧАСТОТ СВЯЗАННЫХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Известно, что если на консервативную механическую систему наложить связи, то ее собственные частоты не уменьшатся (теорема Релея). На возможность обобщения этого результата на случай гироскопической системы впер-

[1] Программа отправлена в Республиканский фонд алгоритмов и программ.

вые указал Даффин в работе [5], исходя из результатов своей работы [4] [1]. Способ исследования частот гироскопических систем, основывающийся на сведении исходной нелинейной по спектральному параметру задачи о собственных значениях к эквивалентной линейной и симметричной задаче, предложен А. И. Балинским в работе [1], где изучалось поведение частот гироскопических систем в зависимости от изменения их инерционных свойств и жесткости. В настоящей работе указанный способ применяется к решению задачи о поведении частот гироскопической системы при наложении связей.

Рассмотрим гироскопическую механическую систему, движение которой описывается дифференциальным уравнением

$$T\ddot{u} + G\dot{u} + Cu = 0, \tag{1}$$

где u — вектор некоторого n-мерного унитарного пространства со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, описывающий состояние системы; T и C — положительные, а G — косоэрмитов линейные операторы, действующие в E.

Как и в случае линейной консервативной механической системы, понятие частоты колебаний гироскопической системы возникает из представления общего решения уравнения (1) в виде суперпозиции его элементарных решений $u_k(t) = \exp(\lambda_k t)\, u_k$, где λ_k — собственное значение, а u_k $(\neq 0)$ — соответствующий ему собственный вектор операторного пучка $L(\lambda) = \lambda^2 T + \lambda G + C$, т. е. $L(\lambda_k)\, u_k = 0$. Поскольку все собственные значения операторного пучка $L(\lambda)$ чисто мнимые (см. следствие 1): $\lambda_k = i\omega_k$, то $u_k(t) = \cos \omega_k t + i \sin \omega_k t$. Решение $u_k(t)$ описывает так называемое нормальное колебание гироскопической системы с частотой ω_k.

Пусть движение гироскопической системы ограничено связями вида

$$(u, a_i) = 0 \qquad (i = \overline{1, n-m}, \quad n > m), \tag{2}$$

где a_i — линейно независимые векторы в E. Очевидно, что тогда вектор u содержится в подпространстве $E_1 \subset E$, $E_1 = \{v \in E : (v, a_i) = 0,\ i = \overline{1, n-m}\}$.

Установим уравнение движения связанной системы в E_1. Для этого сначала освободимся от связей, введя в уравнение движения (1) дополнительную силу — реакцию связей $r = r(t)$, действие которой эквивалентно действию связей:

$$T\ddot{u} + G\dot{u} + Cu = r. \tag{3}$$

Пусть P — оператор ортогонального проектирования на E_1, а T_1, G_1, C_1 — соответственно операторы PT/E_1, PG/E_1, PC/E_1 (T/E_1 — сужение оператора T на E_1). Предполагая, что связи (2) идеальны, т. е. таковы, что во время движения $r \perp E_1$, из уравнения (3) получаем $PT\ddot{u} + PG\dot{u} + PCu = 0$. Если учесть, что $u \in E_1$, то отсюда следует, что уравнение движения связанной системы в подпространстве E_1 будет иметь вид

$$T_1\ddot{u} + G_1\dot{u} + C_1 u = 0, \tag{4}$$

где $v = Pu \in E_1$.

Оператор T_1 положителен в E_1. Действительно, для произвольного $v \in E_1 \subset E$, $v \neq 0$, имеем $(T_1 v, v) = (PTv, v) = (Tv, Pv) = (Tv, v) > 0$, так как $P = P^*$, $Pv = v$ для всех $v \in E_1$ и $T > 0$. Аналогично можно проверить, что оператор C_1 положительно определен, а оператор G_1 — косоэрмитов.

Таким образом, связанная гироскопическая система является гироскопической, и, следовательно, для нее имеет смысл понятие частоты.

Перейдем к установлению зависимостей между частотами исходной (1) и связанной (4) систем. В пространстве $\tilde{E} = E \oplus E$ прямой суммы двух копий

---

[1] В работе [4] установлен специальный вариационный принцип характеристики собственных значений сильно демпфированных квадратичных матричных пучков (см. также [3]).

пространства E пучку $L(\lambda)$ поставим в соответствие операторы $\mathcal{L}$ и A, матричные представления которых такие:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -T^{-1}C & -T^{-1}G \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где I — тождественный оператор в E; T^{-1} — оператор, обратный T.

Следующее утверждение позволяет спектральную задачу для квадратичного пучка $L(\lambda)$ свести к спектральной задаче для регулярного (см. [2]) линейного операторного пучка $D(\omega) = \omega A + B$, где $B = iA\mathcal{L}$.

Лемма 1. Собственные значения пучков $L(\lambda)$ и $D(\omega)$ связаны соотношением $\lambda_k = i\omega_k$.

Доказательство. Известно, что собственные значения операторного пучка $L(\lambda)$ и так называемого сопровождающего оператора $\mathcal{L}$(см. [6]) совпадают. Следовательно, в силу обратимости оператора A совпадают собственные значения пучков $L(\lambda)$ и $P(\lambda) = A(\lambda I - \mathcal{L})$, где I — тождественный оператор в $\tilde{E}$. Остается в $P(\lambda)$ произвести замену $\lambda = i\omega$.

Собственные значения регулярного операторного пучка можно охарактеризовать, используя известный вариационный принцип (см., например, [2]):

$$\omega_k = \max_{L_k} \min_{\tilde{u} \in L_k} \frac{[B\tilde{u}, \tilde{u}]}{[A\tilde{u}, \tilde{u}]}, \tag{6}$$

где L_k $(k = \overline{1, 2n})$ — всевозможные подпространства $\tilde{E}$ коразмерности $k - 1$; $[\tilde{x}, \tilde{y}] = (x^{(1)}, y^{(1)}) + (x^{(2)}, y^{(2)})$ — скалярное произведение в $\tilde{E}$.

Следствие. Собственные значения операторного пучка $L(\lambda)$ чисто мнимы и равны $\lambda_k = i\omega_k$ $(k = \overline{1, 2n})$, где ω_k определяется соотношением (6).

Ответ на вопрос о перенесении связей (2) при линеаризации, описанной в лемме 1, дает следующее утверждение.

Лемма 2. Частоты связанной гироскопической системы равны собственным значениям операторного пучка $D(\omega)$, на который наложено $2(n - m)$ связей вида

$$(\tilde{u}, \tilde{a}_k) = 0 \qquad (k = \overline{1, 2(n - m)}),$$

где

$$\tilde{a}_k = \begin{pmatrix} a_k \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{a}_{n-m+k} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_k \end{pmatrix} \quad (k = \overline{1, n - m}).$$

Доказательство. Из уравнений движения (4) согласно следствию получаем, что связанная гироскопическая система имеет частоты ω'_k $(k = \overline{1, 2m})$, которые равны собственным значениям регулярного операторного пучка $D_1(\omega) = \omega A_1 + B_1$ и описываются вариационным соотношением

$$\omega'_k = \max_{M_k} \min_{\tilde{v} \in M_k} \frac{[B_1\tilde{v}, \tilde{v}]}{[A_1\tilde{v}, \tilde{v}]}, \tag{7}$$

где A_1 и B_1 — операторы, действующие в $\tilde{E}_1 = E_1 \oplus E_1$, матричные представления которых

$$A = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}; \quad B = i\begin{pmatrix} 0 & C_1 \\ -C_1 & -G_1 \end{pmatrix};$$

M_k — всевозможные подпространства E_1 коразмерности $k - 1$.

Так как для произвольного вектора $\tilde{v} \in \tilde{E}_1 \subset \tilde{E}$ $A_1\tilde{v} = \mathcal{P}A\tilde{v}$, $B_1\tilde{v} = \mathcal{P}B\tilde{v}$, где $\mathcal{P}$ — оператор ортогонального проектирования на $\tilde{E}_1$, матричное представление которого

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix},$$

то

$$\frac{[B_1\tilde{v}, \tilde{v}]}{[A_1\tilde{v}, \tilde{v}]} = \frac{[\mathcal{P}B\tilde{v}, \tilde{v}]}{[\mathcal{P}A\tilde{v}, \tilde{v}]} = \frac{[B\tilde{v}, \mathcal{P}\tilde{v}]}{[A\tilde{v}, \mathcal{P}\tilde{v}]} = \frac{[B\tilde{v}, \tilde{v}]}{[A\tilde{v}, \tilde{v}]}.$$

Поэтому вместо соотношения (7) имеем

$$\omega_k = \max_{M_k} \min_{\tilde{v} \in M_k} \frac{[B\tilde{v}, \tilde{v}[}{[A\tilde{v}, \tilde{v}]},$$

что и доказывает требуемое утверждение.

Из леммы 2 и теоремы 14 работы [2] следует основная теорема.

Теорема. Если на гироскопическую систему (1) наложены идеальные связи (2), то частоты связанной гироскопической системы разделяют старые в том смысле, что $\omega_k \leqslant \omega_k' \leqslant \omega_{k+2(n-m)}$ $(k = \overline{1, 2m})$.

1. *Балинский А. И.* Поведение частот гироскопических систем.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 20—21.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— 2-е изд.— М. : Наука, 1966.— 289 с.
3. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ.— М. : Наука, 1969.— 279 с.
4. *Duffin R. J.* A minimax theory for overdamped networks.— J. Rat. Mech. Anal., 1955, 4, N 2, p. 221—233.
5. *Duffin R. J.* The Rayleigh-Ritz method for dissipative or gyroscopic systems.— Quart. Appl. Math., 1960, 18, N 3, p. 215—221.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
16.11.78

УДК 539.377

Г. С. Кит, М. В. Хай

О ПРИМЕНЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ И ТЕПЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ К РЕШЕНИЮ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛА С ПЛОСКОЙ ТРЕЩИНОЙ

Пусть бесконечное упругое тело с плоской трещиной, область S которой ограничена контуром L, нагревается нестационарным температурным полем

$$T(x_1, x_2, x_3, t) = F(x_1, x_2, x_3, t) + \frac{\partial}{\partial x_3} F^*(x_1, x_2, x_3, t);$$
$$\left.\begin{matrix} F(x_1, x_2, x_3, t) \\ F^*(x_1, x_2, x_3, t) \end{matrix}\right\} = \int_0^t \frac{dt_0}{8a_t^3 (\sqrt{\pi(t-t_0)})^3} \iint_S \left\{\begin{matrix} \mu(\xi, \eta, t_0) \\ \gamma(\xi, \eta, t_0) \end{matrix}\right\} e^{-\frac{R^2}{4a_t^2(t-t_0)}} d\xi d\eta, \tag{1}$$

где t — время; x_j $(j = 1, 2, 3)$ — декартовы координаты произвольной точки тела в системе координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в области S и с координатной плоскостью x_1Ox_2, совпадающей с плоскостью расположения трещины. Противоположным поверхностям $S^{\pm}$ трещины соответствуют значения $x_3 = \pm 0$.

В формулах (1) $R = [(x_1-\xi)^2 + (x_2-\eta)^2 + x_3^2]^{1/2}$, $\mu(\xi, \eta, t_0)$ и $\gamma(\xi, \eta, t_0)$ — плотности тепловых потенциалов, которые в общем случае определяются из интегральных уравнений, получаемых после удовлетворения граничным условиям задачи теплопроводности на поверхностях трещины; a_t — коэффициент температуропроводности тела.