

$$\psi_{mv} = \frac{1}{\sin \theta_m} \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\theta_m \mp \theta_v}{2} + \operatorname{tg} \frac{\theta_m \mp \theta_v}{2} \right\};$$

$$z_i = \alpha_0 (\cos \theta_m + (-1)^i \cos \theta_v); \quad i = 1, 2; \quad k^* = \frac{2b^2}{R} \frac{M_2^0}{N_2^0}.$$

Знак «минус» берется, когда  $|m - v|$  нечетно, а «плюс» — когда оно четно.

Для определения коэффициентов интенсивности усилий  $N_2 (K_1)$  и моментов  $M_2 (K_3)$  получаем формулы

$$K_1 = N_2^0 \frac{\sqrt{l}}{2} \sum_{j=1}^{n/2} (A_{2j-1}^{(1)} + a_{12} A_{2j-1}^{(2)}); \quad K_3 = N_2^0 \frac{\sqrt{l}}{2} R c \sum_{j=1}^{n/2} (a_{12} A_{2j-1}^{(1)} + a_{22} A_{2j-1}^{(2)}).$$

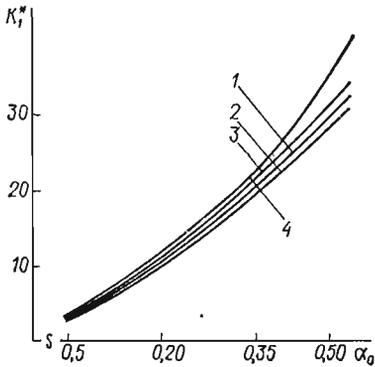


Рис. 1

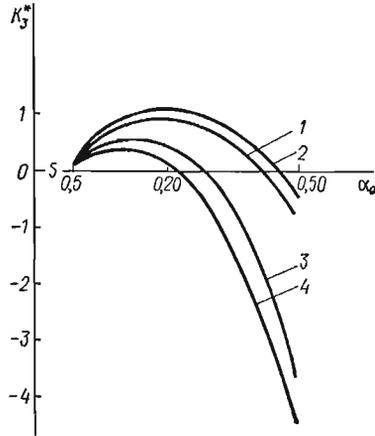


Рис. 2

На ЭВМ «Минск-32» был проведен численный анализ задачи при  $R = 150$  мм;  $h = 1,5$  мм;  $\nu = 0,3$ ;  $k = 1; 5; 9; 11$ .

На рис. 1, 2 показано изменение коэффициентов интенсивности  $K_j^* = K_j/N_2^0$  ( $j = 1, 3$ ) в зависимости от длины трещин и их количества. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям  $k = 1; 5; 9; 11$ . Как видно из графиков, при фиксированной длине трещин изменение коэффициентов интенсивности с увеличением числа трещин носит немонотонный характер.

1. Власов В. З. Избранные труды.— М.: Изд-во АН СССР, 1962.— Т. 1. 528 с.
2. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости.— М.: Наука, 1973.— 304 с.
3. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек.— Л.: Судпромгиз, 1962.— 430 с.
4. Осадчук В. А., Ярмошук И. С. Упругое равновесие замкнутой цилиндрической оболочки с системой периодически расположенных параллельных трещин.— В кн.: Физико-механические поля в деформируемых средах. Киев: Наук. думка, 1978, с. 51—58.

Институт прикладных проблем механики  
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
30.06.78

УДК 533.6.013.42

Я. С. Подстригач, А. П. Поддубняк, В. В. Пороховский

#### АНАЛИЗ ПЕРЕИЗЛУЧЕННОГО СИГНАЛА ОТ УПРУГОЙ СФЕРЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НАПРАВЛЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Задача рассеяния сферической волны на упругой сфере в воде изучена в работе [8]. При этом полагалось, что источник генерирования звука излучает энергию в телесный угол  $4\pi$ . Предположим, что в акустической среде

действует преобразователь, энергия излучения которого в дальнем поле сосредоточена в ограниченном телесном угле  $\Psi_0 < 4\pi$ . Давление в стационарной волне примем в виде [3, 4] (множитель  $e^{-i\omega t}$  в дальнейшем опущен)

$$\bar{p}_l(l, \psi, \omega) = p_* l_0 l^{-1} e^{i\omega l} R(\psi), \quad (1)$$

где

$$R(\psi) = H(\sin \psi_0 - \sin \psi) \quad (2)$$

— идеальная характеристика направленности [6];  $H(x)$  — функция Хевисайда;  $l, \psi, \omega$  — сферическая система координат с началом отсчета в центре излучателя;  $p_* = p_0 \cos^2(\psi_0/2)$ ;  $p_0$  — постоянная, имеющая размерность давления;  $\psi_0$  — плоский угол характеристики направленности;  $l_0$  — расстояние от центра излучателя к центру сферы;  $\omega$  и  $t$  — безразмерные частота излучения и время. Линейные величины задачи отнесены к радиусу сферы  $a$ .

Рассмотрим случай, когда акустическая ось излучателя проходит через центр сферы, являющийся началом сферической системы координат  $r, \theta, \varphi$ . Тогда рассматриваемая система обладает осевой симметрией. Пусть, далее, краевые лучи набегающего звукового пучка пересекают сферу по окружности  $r = 1, \theta = \theta_0$ , где  $\theta_0 = \gamma_0 - \psi_0$ ;  $\gamma_0$  — угол отражения этих лучей, и  $\theta < \pi/2$  при любых значениях  $l_0$  [3, 4].

Требуется определить давление  $\bar{p}_e(r, \theta, \omega)$  в переизлученной на сфере волне, удовлетворяющее волновому уравнению в акустической среде и условию излучения на бесконечности. Совместное решение этого уравнения и уравнений движения упругой сферы дают следующий результат:

$$\begin{aligned} \bar{p}_e(r, \theta, \omega) = p_* l_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left( n + \frac{1}{2} \right) h_n^{(1)}(\omega r) P_n(\cos \theta) \{ f_{1n}(\omega) a_n(\omega) + \\ + b_n(\omega) \} + f_{2n}(\omega) c_n(\omega). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $h_n^{(1)}(x)$  — сферическая функция Ханкеля;  $P_n(x)$  — полином Лежандра;  $f_{1n}, a_n, b_n, c_n$  — функции, приведенные в работе [3].

В частном случае дальнего по отношению к сфере поля, т. е. при  $r \gg 1, l_0 \gg l$ ,

$$\bar{p}_e(r, \theta, \omega) \approx \frac{p_*}{2r} e^{i\omega(l_0+r)} F^0(r, \theta, \omega); \quad (4)$$

$$\begin{aligned} F^0(r, \theta, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \{ -f_{1n}(\omega) [(n+1)d_{n+1} + nd_n] + \\ + (2n+1)f_{2n}(\omega)d_n(\omega) \}, \quad d_n = \int_{\mu_0}^1 e^{-i\omega x} P_n(x) dx, \quad \mu_0 = \cos \theta_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Коэффициент  $d_n$  можно вычислить по формуле (5) либо исходя из точного выражения

$$d_n = \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m (2m+1) j_m(\omega) a_{nm}, \quad (6)$$

где  $j_m(\omega)$  — сферическая функция Бесселя и

$$a_{nm} = \int_{\mu_0}^1 P_n(x) P_m(x) dx, \quad (7)$$

причем [5]

$$a_{nn} = \frac{1}{2n+1} \left\{ 1 - \mu_0 P_n^2(\mu_0) - 2 \sum_{i=1}^{n-1} P_i(\mu_0) [\mu_0 P_i(\mu_0) - P_{i+1}(\mu_0)]; \right. \quad (7')$$

$$\left. a_{nm} = \frac{1 - \mu_0^2}{m(m-1) - n(n-1)} [P_n(\mu_0) P'_m(\mu_0) - P'_n(\mu_0) P_m(\mu_0)] \quad (n \neq m). \right.$$

Численные подсчеты полученных результатов выполнены с помощью ЭВМ «Минск-32» на языке ФОРТРАН-IV. При программировании сферических функций Бесселя использован способ, изложенный в работе [2].

Вычисление коэффициентов  $d_n$  осуществлялось по рекуррентной формуле

$$S_n = \omega(S_{n+1} + S_{n-1}) + i^n e^{-i\omega\mu_0} [P_{n-1}(\mu_0) - P_{n+1}(\mu_0)], \quad (8)$$

где  $S_n = i^n d_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

На рис. 1, 2 представлены зависимости модуля амплитуды давления переизлученного сигнала  $|F^0|$  от частоты  $\omega$  при фиксированных значениях угла  $\theta_0$  на акустической оси системы  $\theta = 0$  ( $\psi = 0$ ). Для сравнения нанесены кривые для трех случаев: сплошные кривые — для стальной сферы (плот-

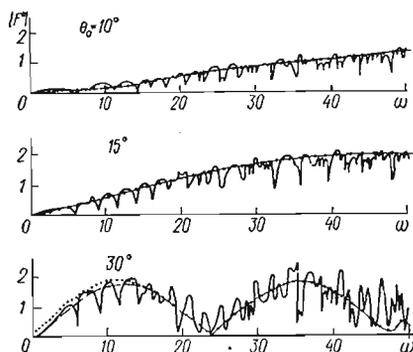


Рис. 1

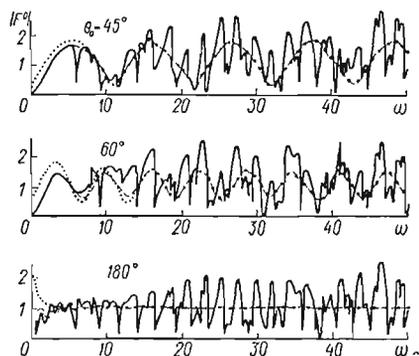


Рис. 2

ность  $\rho_1 = 7,70$  г/см<sup>3</sup>; скорости продольных и поперечных волн соответственно равны  $c_1 = 5960$  м/с,  $c_2 = 3240$  м/с), штриховые — для акустически жесткой сферы, пунктирные — для вакуумной полости. Объекты находятся в воде с параметрами  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>;  $c = 1410$  м/с.

Как и для случая сферической набегающей волны ( $\theta_0 = 180^\circ$ ) [8], графики для случая упругой сферы начинаются при низких частотах так, как и для жесткого тела, переходя далее в последовательность пиков и спадов. Однако в отличие от результатов работы [8], где закономерность этих колебаний не проглядывается, данные графики показывают, что кривые для жесткого тела являются срединными линиями для упругого тела. Более того, такими линиями при немалых частотах являются и кривые для акустически мягкого тела, так как отличие в кривых для двух предельных случаев наблюдается лишь при низких частотах  $\omega$  и больших углах  $\theta_0$ . Отличие имеется всегда в фазах давлений, которые здесь не иллюстрируются. Из графиков следует также, что кривые для предельных объектов сами колеблются с ростом частоты  $\omega$  — сначала медленно при малых углах  $\theta_0$  и далее все быстрее с увеличением угла  $\theta_0$ . При этом амплитуда колебаний при возрастании  $\theta_0$  уменьшается. Это, по-видимому, связано с вкладом ползущих волн, который существенен на широком диапазоне частот лишь при узконаправленном озвучивании предельных объектов.

То, что кривые для упругого тела осциллируют вокруг колеблющихся кривых для предельных случаев, подтверждает целесообразность способа выделения из эхо-сигнала вклада как от абсолютно жесткого тела, применяемого в задачах гидроакустики [1]. Отметим, однако, что более точное разложение спектра нестационарного эхо-сигнала следует сделать, выделив предварительно вклады от волн отражения и прохождения [5]. Амплитуда упругих осцилляций тем существеннее, чем шире набегающий пучок. Облучая все большую площадь поверхности упругой сферы, набегающая волна приводит к появлению различных типов поверхностных волн как в акустической среде, так и в упругом объекте, возбуждающихся при определенных критических углах  $\theta$  [2, 5]. Это подтверждает также систематическое

размещение пиков и углублений на графиках, которые, появившись при определенных углах  $\theta_0$ , остаются почти неизменными относительно частоты  $\omega$  при дальнейшем увеличении  $\theta_0$ . Таким образом, представляется возможность управлять с помощью пространственных характеристик набегающих волн механизмом возбуждения тех или иных вкладов поверхностных волн в полный эхо-сигнал.

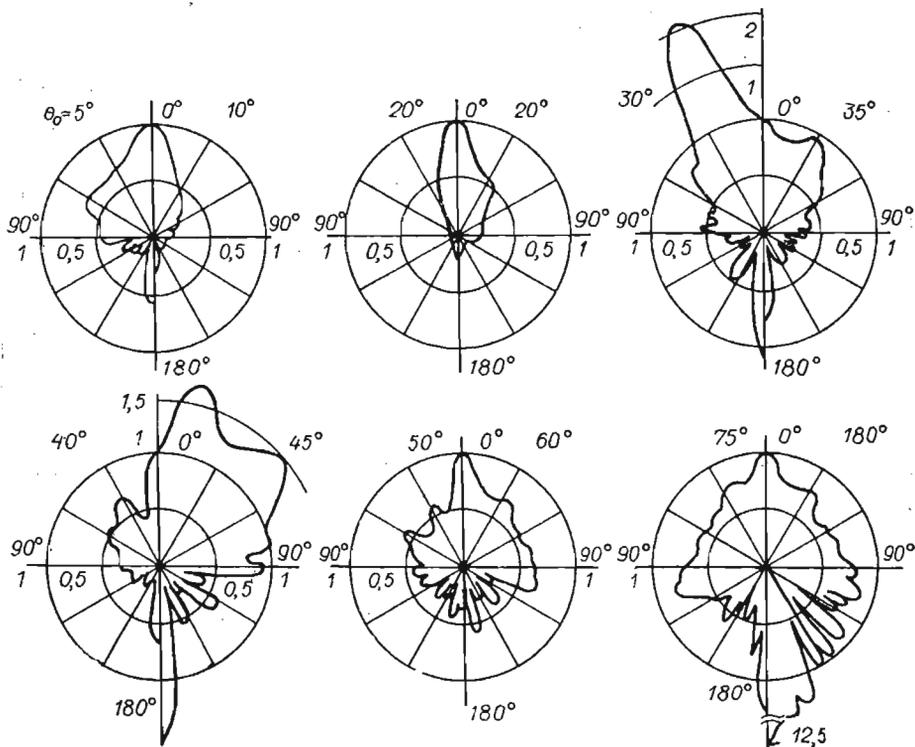


Рис. 3

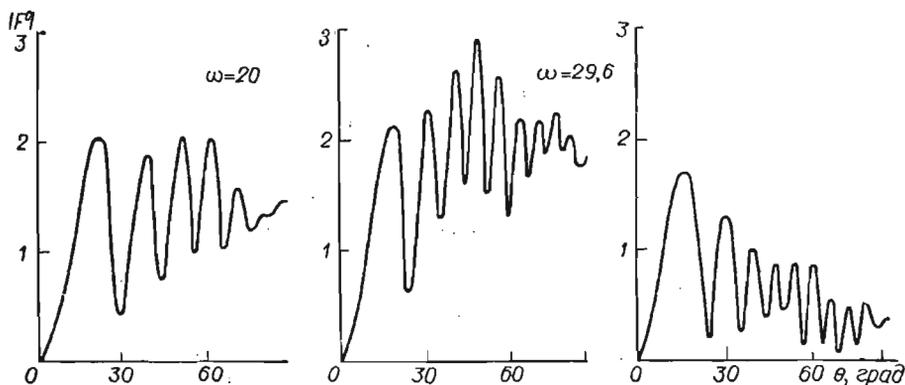


Рис. 4

На рис. 3 приведены характеристики направленности давления в переизлученном на стальной сфере сигнале при  $r = l_0 \gg 1$  для различных значений  $\theta_0$  при  $\omega = 20$ . Из графиков следует, что при узконаправленном облучении основная энергия отраженных и излученных сферой волн направлена в сторону источника звука и лишь при  $\theta_0 = 180^\circ$  основное излучение сосредоточено в противоположном направлении. При некоторых углах  $\theta_0$  значительная часть энергии излучается сферой под углом к акустической оси. Следует отметить, что характеристика направленности рассеянного сигнала

неустойчива к изменениям угла характеристики направленности набегающей волны и частоты.

Кривые на рис. 4 иллюстрируют зависимость значений величины  $|F^0|$  от угла  $\theta_0$  для трех различных частот при  $\theta = 0$ ,  $r = l_0 \gg 1$ . Как видно, модуль амплитуды давления  $p_e$  при малых участках облучения сферы мало зависит от незначительного изменения частоты  $\omega$ . Однако при увеличении углов  $\theta_0$  картина существенно меняется.

1. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Нестационарная гидроупругость оболочек.— Л.: Судостроение, 1974.— 208 с.
2. Нигул У. К., Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Кутсер М. Э. Эхо-сигналы от упругих объектов.— Таллин: Изд-во АН ЭССР, 1974.— Т. 1. 346 с.
3. Поддубняк А. П. Эхо-сигнал от упругой сферы при воздействии остронаправленного звукового импульса.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1979, вып. 8, с. 92—96.
4. Подстригач Я. С., Поддубняк А. П., Грилицкий Д. В. Дифракция остронаправленного звукового импульса на акустически мягкой сфере.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 3, с. 238—241.
5. Скучик Е. Основы акустики.— М.: Мир, 1976.— Т. 2. 432 с.
6. Ультразвуковые преобразователи / Под ред. Е. Кикучи.— М.: Мир, 1972.— 424 с.
7. Doolittle R. D., Überall H., Ugincius P. Sound scattering by elastic cylinders.— J. Acoust. Soc. Amer., 1968, 43, N 1, p. 1—14.
8. Hickling R. Analysis of echoes from a solid elastic sphere in water.— J. Acoust. Soc. Amer., 1962, 34, N 10, p. 1582—1592.

Институт прикладных проблем механики  
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
02.11.78

УДК 539.3 : 534.231

Д. В. Грилицкий, В. Я. Онищук

#### НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ ОТ ПОЛОЙ ПУСТОЙ УПРУГОЙ СФЕРЫ

Несмотря на большое количество публикаций, посвященных проблеме взаимодействия упругих объектов с акустическими волнами, к настоящему времени является малоизученным вопрос о характере излученного поля от сферического объекта в случае остронаправленного зондирующего импульса, в частности, когда к поверхности упругой сферы приложена сосредоточенная сила, изменяющаяся во времени по определенному закону.

Определим нестационарное звуковое поле от поллой пустой упругой сферы при действии на ее внешнюю поверхность сосредоточенной силы конечной длительности.

Рассмотрим полую пустую упругую сферу, погруженную в безграничную идеальную сжимаемую жидкость, на которую действует сосредоточенный силовой импульс  $p_l$  конечной длительности, приложенный к внешней поверхности сферы в точке с координатами  $(l, \theta_0, \varphi_0)$ , причем

$$p_l = p_0 f(\tau) \frac{\delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0)}{\sin \theta} [H(\tau) - H(\tau - \tau_0)]; \quad (1)$$

$$\tau = Ct/R_1; \quad \tau_0 = Ct_0/R_1.$$

Здесь и далее  $p_l$  — давление, вызванное сосредоточенным импульсом;  $p_0$  — постоянная, имеющая размерность давления;  $f(\tau)$  — функция, определяющая закон изменения давления в импульсе;  $H(\tau)$  — единичная функция Хевисайда;  $\delta(x)$  — функция Дирака;  $t$  — время, отсчитываемое с момента включения силового импульса;  $t_0$  — длительность импульса;  $R_1$  и  $R_2$  — внешний и внутренний радиусы сферы соответственно;  $R, \theta, \varphi$  — сферические координаты;  $\rho, C$  — плотность жидкости и скорость звука в окружающей сферу жидкости;  $E, \nu, \rho_1$  — модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала сферы;  $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{r\varphi}$  — компоненты тензора