и частоты $\omega_0 = 21,8$ (кривая 2), соответствующей впадине амплитуды стационарного поля.

На рис. 3 показан график нестационарного звукового поля $p = rp_e/p_0$ $(r \gg 1)$ в зависимости от безразмерного времени $\tau_1 = \tau - r$ для частоты $\omega_0 = 21,9$ при $\tau_0 = 2,0$ и $r_2 = 0,9$. Характерным для этого графика является то, что в точку наблюдения приходит только одна составляющая поля, вызванная излучением области сферы, находящейся под сосредоточенной силой. Другие составляющие, вызванные волнами Франца и волнами изгиба, имеют незначительную амплитуду, что полностью согласуется с рис. 1 (кривая 1). Аналогичные результаты при тех же параметрах получаются и при $\omega_0 = 21,8$

На рис. 4 представлен график нестационарного звукового поля при частоте $\omega_0 = 23,1$, соответствующей пику амплитуды стационарного поля (см. рис. 1, кривая 2) при следующих параметрах: $\tau_0 = 2,0$, $r_2 = 0,6$ Наличие вторичного компонента звукового поля вызвано, по-видимому, волнами, отраженными от внутренней поверхности сферического объекта.

1. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики.— М.: Изд-во иностр. лит., 1960.— Т. 2. 886 с.
2. *Нигул У. К., Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Кутсер М. Э.* Эхо-сигналы от упругих объектов.— Таллин: Изд-во АН ЭССР, 1974.— Т. 2. 345 с.
3. *Bauer F. L., Rutishauer H., Stiefel S.* New aspects in numerical quadrature.— Proc. Symp. Appl. Math., 1963, 15, p. 199—218.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 27.09.78

УДК 534.2 : 532

А. А. Лопатьев, А. П. Матковский

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕРМОУПРУГОГО РАССЕЯНИЯ НА КОЭФФИЦИЕНТ ОТРАЖЕНИЯ ПЛОСКИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН ОТ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЬ — ТВЕРДОЕ ТЕЛО

Отражение плоских гармонических волн на границе раздела жидкость — твердое тело рассматривалось до настоящего времени в основном без учета поглощения волн. Однако в реальных условиях распространяющиеся волны затухают, что вызывается различными факторами, одним из которых является превращение части механической энергии в тепловую. Оказывается, что при определенных условиях термоупругое рассеяние может значительно влиять на отраженную волну. В настоящей работе на основе взаимосвязанных уравнений термоупругости изучено отражение плоских гармонических термоупругих волн на границе раздела жидкость — твердое тело. Приведены условия, при которых термоупругое рассеяние оказывает существенное влияние на отраженную волну, а также обычные условия.

Рассмотрим отражение плоских гармонических волн от границы раздела двух полупространств — жидкости и твердого тела. В дальнейшем и в твердом теле и в жидкости будем учитывать явление термоупругого рассеяния механической энергии.

Движение термоупругого твердого тела описываем исходя из уравнений [5, 3]

$$\mu\Delta\vec{u}_1 + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u}_1 + \alpha_T(3\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,(T - T_0) = \rho_1\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2};$$

$$\Delta T - \frac{1}{\varkappa_1}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\gamma_1}{\varkappa_1}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\vec{u}_1 = 0.$$

Систему связанных уравнений гидротермоакустики, которая описывает движения в акустической жидкости, запишем в виде [4]

$$-\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}+\beta\operatorname{grad}(T-T_0)=0;$$

$$\Delta T-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\gamma}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{u}=0,$$

где $\vec{u}$ — вектор перемещений; λ, μ — коэффициенты Ламе; ρ — плотность; T — абсолютная температура; T_0 — начальная температура; α_T — линейный коэффициент температурного расширения твердого тела; β — объемный коэффициент температурного расширения жидкости; $\varkappa$ — температуропроводность; γ — коэффициент термоупругого рассеяния; c — скорость распространения волн изменения объема жидкости; t — время. Наличие индекса «1» указывает на принадлежность величин к твердому телу.

Для термоупругой акустической жидкости в случае безвихревых движений, представляя вектор перемещений $\vec{u}$ в виде

$$\vec{u}=\operatorname{grad}\Phi,$$

на потенциал перемещений Φ получаем уравнение

$$\left[\left(\Delta-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)-\frac{\beta\gamma}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\right]\Phi=0. \tag{1}$$

Изменение температуры можно выразить через потенциал Φ:

$$T-T_0=\frac{1}{\beta}\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi.$$

Для гармонических волн $\Phi=\varphi(x, y, z)\,e^{i\omega t}$, а уравнение (1) принимает вид

$$(\Delta+s_1^2)(\Delta+s_2^2)\varphi=0, \tag{2}$$

где

$$s_{1,2}=\frac{\omega^2}{2c^2}\left\{\left(1+\frac{1+\beta\gamma}{i\chi}\right)\pm\left[1-\frac{2(1-\beta\gamma)}{i\chi}+\left(\frac{1+\beta\gamma}{i\chi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\};$$

$$\chi=\frac{\omega}{\omega^*};\quad \omega^*=\frac{c^2}{\varkappa}; \tag{3}$$

$s_{1,2}$ — волновые числа квазиупругой и квазитепловой волн в жидкости.

Аналогичные рассуждения для твердого тела приводят [3] к волновым числам k_1, k_2 квазиупругой и квазитепловой волн, которые определяются по формулам, аналогичным формулам (2), (3).

Пусть из жидкости на границу раздела с твердым телом под углом θ падает квазиупругая волна, которая характеризуется волновым числом s_1. Зададим падающую волну потенциалом

$$\varphi_{\text{пад}}=e^{is_1(x\sin\theta-z\cos\theta)}.$$

Систему волн в жидкости и твердом теле ищем в виде

$$\varphi=V_1e^{is_1(x\sin\theta+z\cos\theta)};\quad \varphi_1=W_1e^{ik_1(x\sin\delta_1-z\cos\delta_1)};$$

$$\psi_1=P_1e^{i\varkappa_1(x\sin\gamma_1-z\cos\gamma_1)}.$$

Здесь φ_1, ψ_1 — потенциалы продольной и поперечной волн в твердом теле; V_1 — коэффициент отражения; W_1, P_1 — коэффициенты преломления; δ_1, γ_1 — углы между нормалями к фронтам квазиупругой и сдвиговой волн в твердом теле с осью z; $\varkappa_1=\pm\frac{\omega}{c_{\text{сдв}}}$; $c_{\text{сдв}}$ — скорость сдвиговых волн.

Если на границе раздела потребовать непрерывности изменения нормальных перемещений, нормальных и касательных напряжений, а неидеальность сред описывать только с помощью комплексных волновых чисел, как это делается в металлооптике [1], то получим систему уравнений относительно неизвестных V_1, W_1, P_1:

$$
\begin{gathered}
s_1 \cos\theta V_1 + k_1 \cos\delta_1 W_1 - \varkappa_1 \sin\gamma_1 P_1 = s_1 \cos\theta; \\
\frac{\rho}{\rho_1} V_1 - \cos 2\gamma_1 W_1 + \sin 2\gamma_1 P_1 = -\frac{\rho}{\rho_1}; \qquad (4) \\
k_1^2 \sin 2\delta_1 W_1 + \varkappa_1^2 \cos 2\gamma_1 P_1 = 0,
\end{gathered}
$$

в которой волновые числа s_1 и k_1 являются комплексными.

Система уравнений (4) в случае действительных волновых чисел s_1, k_1, $\varkappa_1$ подробно изучена в работе [2]. Это хорошо известный случай отражения плоских гармонических волн на границе раздела жидкость — твердое тело. Исследование зависимости модуля коэффициента отражения $|V_1|$ от угла падения θ показывает, что при углах падения, совпадающих с $\theta_a = \arcsin c/c_1$ и $\theta_b = \arcsin c/c_{сдв}$, модуль V_1 равен единице (на границе раздела вода — алюминий $\theta_a \approx 13°$, $\theta_b \approx 29°$). При углах падения, боль-

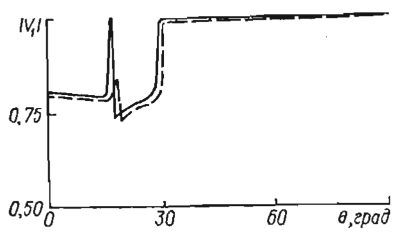

Рис. 1

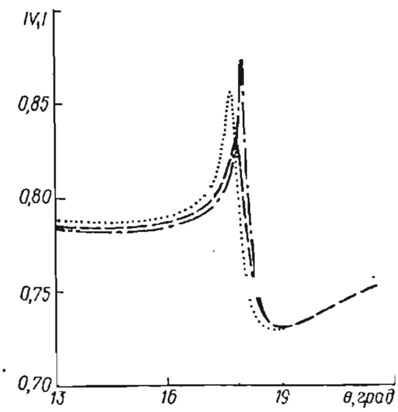

Рис. 2

ших 29°, $|V_1| = 1$, при всех других углах $|V_1| < 1$. Зависимость модуля коэффициента отражения от угла падения для этого случая представлена на рис. 1, 3 сплошной линией.

При распространении волн в термоупругих средах часть энергии расходуется на превращение механической энергии в тепловую, и модуль коэффициента отражения будет меньше единицы. Кроме того, термоупругие среды обладают характерной особенностью: существует частота ω^*, часто называемая характеристической частотой среды [3], при достижении которой наступает своего рода резонанс и термоупругие свойства среды (например, рассеивание) проявляются максимально. При наличии двух термоупругих сред — жидкости и твердого тела — существуют две характеристические частоты $\overset{*}{\omega}_k$ и $\overset{*}{\omega}_s$. В случае контакта жидкость — алюминий характеристическая частота алюминия $\overset{*}{\omega}_k = 4{,}66 \cdot 10^{11}$ Гц [3], а для жидкости $\overset{*}{\omega}_s = 1{,}73 \cdot 10^{15}$ Гц при $c = 1500$ м/с, $\varkappa = 0{,}13 \cdot 10^{-8}$ м²/с. В дальнейшем нас будет интересовать зависимость модуля коэффициента отражения от угла падения для различных частот. Известно [3, 4], что для больших и малых частот (относительно $\overset{*}{\omega}_k$, $\overset{*}{\omega}_s$) распространение волн будет происходить при условиях, весьма близких к изотермическим или адиабатическим. При этом скорость распространения волны будет соответственно изотермической или адиабатической, а затухание — пренебрежимо малым. В этих областях частот результаты работы [2] хорошо описывают реальную физическую ситуацию при условии, что для малых частот ($\omega \ll \overset{*}{\omega}_k$) за скорость распространения выбрана адиабатическая скорость, а при больших частотах ($\omega \gg \overset{*}{\omega}_s$) — изотермическая. В случае частот, близких к $\overset{*}{\omega}_k$, $\overset{*}{\omega}_s$, термоупругое рассеивание становится большим, и необходимо анализировать систему уравнений (4) с учетом формул (3).

Рассмотрим вначале частоты, близкие к $\overset{*}{\omega}_k$. В этом случае максимально проявляется неупругость твердого тела. На рис. 1 представлена зависимость модуля коэффициента отражения квазиупругой волны от угла падения при частоте $\omega = \overset{*}{\omega}_k$ (штриховая линия). Сплошная линия соответствует случаю $\gamma = \gamma_1 = 0$, т. е. контакту жидкость — упругое твердое тело. Из сравнения двух кривых видно, что наибольшее отличие наблюдается в районе $\theta = \theta_a$. На рис. 2 приведена область углов от 13 до 19° для частот, близких к $\overset{*}{\omega}_k$. Штриховая линия соответствует частоте $\omega = \overset{*}{\omega}_k$, штрихпунктирная — частоте $\omega = 4\overset{*}{\omega}_s$ и пунктирная — частоте $\omega = \overset{*}{\omega}_k/4$. При углах, близких к θ_b, наблюдается некоторое увеличение угла, при котором достигается значение $|V_1|$, близкое к единице.

Область частот, близкая к $\overset{*}{\omega}_s$, является той областью, где наблюдается наибольшее отличие в поле отраженных волн для случаев упругих и термо-

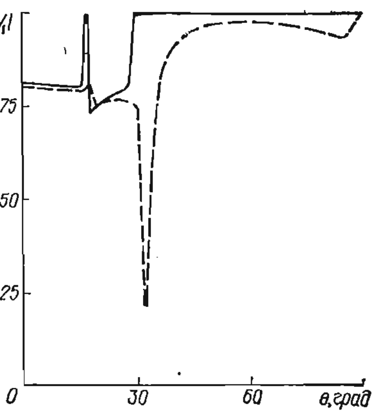

Рис. 3

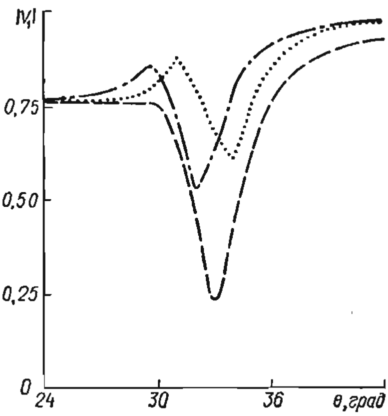

Рис. 4

упругих кусочно-неоднородных сред. Численные результаты для таких частот представлены на рис. 3, 4. Штриховая линия на рис. 3 соответствует частоте $\omega = \overset{*}{\omega}_s$, сплошная — случаю $\gamma = \gamma_1 = 0$. На рис. 4 приведены численные результаты в области углов, близких к θ_b, причем штрихпунктирная линия соответствует частоте $\omega = 4\overset{*}{\omega}_s$, пунктирная — частоте $\omega = \overset{*}{\omega}_s/4$, а штриховая — частоте $\omega = \overset{*}{\omega}_k$.

Таким образом, рассмотрение распространения плоских гармонических волн в кусочно-неоднородном пространстве с плоской границей раздела при учете термоупругого рассеяния позволяет сделать следующие выводы.

1. Влияние термоупругого рассеяния существенно в окрестности частот $\overset{*}{\omega}_k$ и $\overset{*}{\omega}_s$.

2. В случае малых частот ($\omega \ll \overset{*}{\omega}_k$) волновые числа можно считать действительными, а скорость распространения волны — адиабатической.

3. В случае больших частот ($\omega \gg \overset{*}{\omega}_s$) волновые числа также можно считать действительными, а скорость распространения волны — изотермической.

4. Наибольшее влияние на $|V_1|$ оказывает термоупругое рассеяние в жидкости при частоте, близкой к $\overset{*}{\omega}_s$, и оно очень существенно при углах, близких к $\arcsin c/c_{\text{сдв}}$.

5. Влияние термоупругого рассеяния в твердом теле максимально проявляется при частоте $\overset{*}{\omega}_k$, причем наибольшее различие с классическим случаем наблюдается в области углов, близких к $\arcsin c/c_1$.

1. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики.— М. : Наука, 1973.— 720 с.
2. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах.— М. : Наука, 1973.— 344 с.
3. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости.— Киев : Наук. думка, 1970.— 308 с.
4. *Лопатьев А. А., Матковский А. П.* Влияние термоупругого рассеяния на волновые процессы в кусочно-неоднородном пространстве с плоской границей раздела.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 2, с. 141—145.

5. *Подстригач Я. С.* О влиянии термоупругого рассеяния на напряженное состояние деформируемого тела.— Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1969, № 4, с. 73—78.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 19.07.78

УДК 539.3 : 532.72

Я. И. Бурак, Б. П. Галапац, Е. Я. Чапля

ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОЦЕССА ДЕФОРМАЦИИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ С УЧЕТОМ РАЗЛИЧНЫХ ПУТЕЙ ДИФФУЗИИ ПРИМЕСНЫХ ЧАСТИЦ

В известных из литературы макроскопических моделях деформируемых твердых растворов процесс диффузии примесных частиц обычно описывается введением усредненных по физически малому объему параметров и характеристик материала модели без конкретизации путей диффузии [6, 7, 9]. В то же время многочисленные экспериментальные исследования диффузии в поликристаллических телах показали, что примесные частицы могут одновременно перемещаться по границах и объему зерен, а также переходить из одного пути перемещения на другой, определяя ряд особенностей процесса диффузии [1, 3, 11]. При этом коэффициенты диффузии на границах зерен на несколько порядков больше, чем внутри их, а энергия активации приблизительно в два раза меньше. В работах [10, 12], исходя из уравнений модели твердых растворов [6, 7, 9], выполнены исследования по оценке влияния границы зерна на процесс диффузии. При этом граница и объем зерна наделялись различными физическими характеристиками.

Целесообразно дальнейшее развитие модельных представлений о процессе деформации электропроводных твердых растворов с учетом различных путей диффузии заряженных частиц примеси применительно к телам мелкозернистой структуры.

Рассмотрим неполяризованное электропроводное упругое тело, которое находится под воздействием внешних силовых нагрузок, температурного и электромагнитного полей. В начальном состоянии тело изотропно, однородно, макроскопически электронейтрально и состоит из ионной подсистемы, коллективизированных электронов проводимости, заряженных частиц примеси. Частицы примеси в пределах физически бесконечно малого объема могут находится в двух различных состояниях, обозначаемых в дальнейшем посредством a и b. В соответствии с этим наряду с процессами деформации, теплопроводности, диффузии и электропроводности будем учитывать также процесс активации, т. е. переход атомов примеси из состояния a в b и наоборот.

Для термодинамического описания упомянутых процессов необходимо выбрать параметры локального термодинамического состояния системы. Сопоставим, как обычно [2, 7, 8], процессам теплопроводности, деформации, электропроводности и диффузии параметры T — S; $\hat{\sigma}$ — $\hat{e}$; Φ — ω; M_k' — — C_k $(k = \overline{1, 4})$ соответственно, где T — абсолютная температура; S — удельная энтропия; $\hat{\sigma} = \{\sigma_{ij}\}$, $\hat{e} = \{e_{ij}\}$ — тензор напряжений и деформаций; Φ — термодинамический электрический потенциал (ТЭП); ω — удельный электрический заряд; $C_k = \frac{\rho_k}{\rho}$ — концентрация компонента k; ρ_k — плотность этого компонента; $\rho = \sum_{k=1}^{4} \rho_k$ — суммарная плотность; M_k' — химический потенциал компонента k. Примем в дальнейшем, что $k = 1$ — сопоставляются коллективизированные электроны, обозначаемые также индек-