УДК 539.377

В. М. Флячок, Р. Н. Швец

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ [1]

Использование пластин и оболочек из новых композитных материалов, обладающих высокой степенью анизотропии теплофизических и механических свойств, в качестве элементов конструкций, а также исследование различных динамических процессов, возникающих в оболочках, приводит к необходимости построения новых моделей их расчета [2, 5—7]. Для этой цели эффективно могут быть использованы вариационные методы теории упругости [1, 3, 4, 6—8].

В данной работе установлен вариационный принцип динамической задачи взаимосвязанной термоупругости анизотропных оболочек, на основе которого получены уравнения теплопроводности и уравнения теории оболочек, учитывающие силы инерции вращения и поперечные деформации.

Пусть анизотропная оболочка с постоянной толщиной $2h$, срединная поверхность G которой ограничена контуром g и отнесена к ортогональным криволинейным координатам α_j ($j = 1, 2$), находится в переменном температурном поле, обусловленном внешним нагревом или деформацией самой оболочки. Обозначим главные кривизны через k_j, коэффициенты Ламе через A_j и координату, отсчитываемую по нормали к срединной поверхности, через z.

Для получения основных уравнений и соотношений взаимосвязанной термоупругости рассматриваемых оболочек исходим из функционала трехмерной задачи [3, 8], который при линейном распределении перемещений U_r и температуры t по толщине оболочки

$$U_r(\alpha_j,\ z,\ \tau) = u_r(\alpha_j,\ \tau) + z\gamma_r(\alpha_j,\ \tau), \quad t = T_1 + \frac{z}{h} T_2, \tag{1}$$

где u_r — перемещения точек срединной поверхности; γ_j — углы поворота нормали; γ_3 — поперечная нормальная деформация, после интегрирования по z в пределах от $-h$ до h приведем к виду

$$\begin{aligned} I = \iint_G \Big\{ & F(\varepsilon,\ T_j) - N_{ij}[\varepsilon_{ij} - \nabla_{ij}(u)] - Q_i[\varepsilon_{i3} - \nabla_{i3}(u,\ \gamma_i)] - \\ & - M_{ij}[\varkappa_{ij} - \nabla_{ij}(\gamma)] - M_{i3}[\varkappa_{i3} - \nabla_{i3}(\gamma_3)] - N_{33}(\varepsilon_{33} - \gamma_3) - (q_r u_r + m_r\gamma_r) + \\ & + h\rho p^2\left(u_r u_r + \frac{h^2}{3}\gamma_r\gamma_r\right) + \sum_{i,j,k}^{2} \frac{2h}{2k-1}\Big[A_i^{-1}T_{k,i}H_i^{(k)} + \frac{T_0}{2\lambda_{ij}} pH_i^{(k)}H_j^{(k)} + \\ & + T_0^{-1}T_k W_k'\Big] + \frac{hT_0}{\lambda_{33}} p(H_3^{(1)})^2 + 2T_2H_3^{(1)} + H_3^+ t_c^+ - H_3^- t_c^- + \\ & + \frac{T_0}{2} p\left[\frac{(H_3^+)^2}{\alpha_z^+} + \frac{(H_3^-)^2}{\alpha_z^-}\right] - (H_3^+ - H_3^-)T_1 - (H_3^+ + H_3^-)T_2\Big\} d\sigma - \\ & - \int_{g_u} [N_j(u_j - \bar{u}_j) + Q(u_3 - \bar{u}_3) + M_j(\gamma_j - \bar{\gamma}_j) + M_3(\gamma_3 - \bar{\gamma}_3)]\, dg - \\ & - \int_{g_N} (\bar{N}_j u_j + \bar{Q}u_3 + \bar{M}_j\gamma_j + \bar{M}_3\gamma_3)\, dg + \sum_k^2 \frac{2h}{2k-1}\Big\{\int_{g_T} \bar{T}_k H_n^{(k)} dg - \int_g T_k H_n^{(k)} dg + \\ & + \int_{g_s} T_k^c H_n^{(k)} dg + \int_{g_s} \frac{T_0}{2\alpha_g} p[H_n^{(k)}]^2 dg\Big\}. \end{aligned} \tag{2}$$

---

[1] Работа доложена на XI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, состоявшейся 27 сентября — 1 октября 1977 г. в Харькове.

Здесь

$$\{T_i;\ T_i^c;\ H_r^{(i)};\ W_i'\} = \frac{2i-1}{2h^i}\int_{-h}^{h}\{t;\ t_g^c;\ S_r;\ w_i'\}\, z^{i-1}\, dz;$$

$$H_3^{\pm} = S_{3|z=\pm h};\ H_n^{(k)} = H_i^{(k)} n_i;\quad p = \frac{d}{d\tau};\quad d\sigma = A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2;$$

$$\nabla_{11}(u) = A_1^{-1} u_{1,2} + u_2 (A_1 A_2)^{-1} A_{1,2} + k_1 u_3;\quad u = \{u_1,\ u_2,\ u_3\};$$

$$\nabla_{12}(u) = A_1^{-1} u_{2,1} - u_1 (A_1 A_2)^{-1} A_{1,2}\quad (1 \rightleftarrows 2);\quad \gamma = \{\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3\};$$

$$\nabla_{13}(u,\ \gamma_1) = A_1^{-1} u_{3,1} - k_1 u_1 + \gamma_1;\quad \nabla_{13}(\gamma_3) = A_1^{-1}\gamma_{3,1}\quad (1 \rightleftarrows 2);$$

$\varepsilon = \{\varepsilon_{ij},\ \varepsilon_{i3},\ \varepsilon_{33},\ \varkappa_{ij},\ \varkappa_{i3}\}$ — компоненты деформации срединной поверхности оболочки; $N = \{N_{ij},\ Q_i,\ N_{33},\ M_{ij},\ M_{i3}\}$ — усилия и моменты; q_r, m_r — приведенные к срединной поверхности компоненты внешних нагрузок; $N_j = N_{ij} n_i$; $Q = Q_i n_i$, $M_j = M_{ij} n_i$, $M_3 = M_{i3} n_i$ — обобщенные усилия на границе оболочки; n_i — компоненты единичного вектора нормали к контуру; ρ — плотность материала; τ — время; t — приращение температуры; T_0 — абсолютная температура; S_r — компонент вектора потока энтропии; $w_i' = w_i$ — удельная мощность источников тепла; λ_{ij}, λ_{33} — коэффициенты теплопроводности; $t_c^{\pm}$ и t_g^c — значения температуры среды, омывающей поверхности $z = \pm h$ и контур g; $\alpha_z^{\pm}$ и α_g — коэффициенты теплоотдачи с этих поверхностей и контура; $F(\varepsilon,\ T_j)$ — свободная энергия, отнесенная к единице площади срединной поверхности оболочки; индексы i, j, k, l пробегают значения 1, 2, а индекс r — значения 1, 2, 3; используется суммирование по повторяющимся индексам; запятая в индексах означает дифференцирование по α_j; точкой сверху обозначено дифференцирование по времени.

Относительно функционала (2) справедлива следующая теорема.

Теорема. Вариационная задача $\delta I = 0$ имеет в качестве уравнений Эйлера все дифференциальные уравнения теории взаимосвязанной термоупругости анизотропных оболочек, а в качестве естественных (эйлеровых) граничных условий — механические и термические условия на краю оболочки.

Действительно, считая величины u, γ, ε, N, T_j, $H_r^{(j)}$, $H_3^{\pm}$ независимыми и вычисляя их вариации, которые считаем произвольными, получаем уравнения движения

$$\begin{gathered} L(N_{ij}) + A_1 A_2 k_1 Q_1 + A_1 A_2 q_1 = A_1 A_2 2h\rho \ddot{u}_1\quad (1 \rightleftarrows 2);\\ (A_1 A_2)^{-1}[(A_2 Q_1)_{,1} + (A_1 Q_2)_{,2}] - k_1 N_{11} - k_2 N_{22} + q_3 = 2h\rho\ddot{u}_3;\\ L(M_{ij}) - A_1 A_2 Q_1 + A_1 A_2 m_1 = A_1 A_2 \frac{2h^3}{3}\rho\ddot{\gamma}_1\quad (1 \rightleftarrows 2);\\ (A_1 A_2)^{-1}[(A_2 M_{13})_{,1} + (A_1 M_{23})_{,2}] - k_1 M_{11} - k_2 M_{22} - N_{33} + m_3 = \frac{2h^3}{3}\rho\ddot{\gamma}_3, \end{gathered}\tag{3}$$

где

$$L(N_{ij}) = (A_2 N_{11})_{,1} - A_{2,1} N_{22} + A_{1,2} N_{12} + (A_1 N_{21})_{,2};$$

геометрические соотношения

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11} = A_1^{-1} u_{1,1} + u_2 (A_1 A_2)^{-1} A_{1,2} + k_1 u_3;\quad \varepsilon_{13} = A_1^{-1} u_{3,1} - k_1 u_1 + \gamma_1;\\ \varepsilon_{12} = A_1^{-1} u_{2,1} - u_1 (A_1 A_2)^{-1} A_{1,2}\quad (1 \rightleftarrows 2);\quad \varepsilon_{33} = \gamma_3;\\ \varkappa_{11} = A_1^{-1}\gamma_{1,1} + \gamma_2 (A_1 A_2)^{-1} A_{1,2} + k_1 \gamma_3;\quad \varkappa_{13} = A_1^{-1}\gamma_{3,1};\\ \varkappa_{12} = A_1^{-1}\gamma_{2,1} - (A_1 A_2)^{-1}\gamma_1 A_{1,2}\quad (1 \rightleftarrows 2); \end{gathered}\tag{4}$$

физические соотношения

$$N_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}};\quad Q_i = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{i3}};\quad M_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varkappa_{ij}};\quad N_{33} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{33}};\quad M_{i3} = \frac{\partial F}{\partial \varkappa_{i3}}\tag{5}$$

и уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial F}{\partial T_k}-\frac{2h}{2k-1}(A_1A_2)^{-1}\sum_i^2(A_{3-i}H_i^{(2)})_{,i}+2(k-1)H_3^{(1)}+\frac{2h}{(2k-1)T_0}\dot{W}_k-$$
$$-[H_3^{+}+(-1)^kH_3^{-}]=0;\quad T_0\lambda_{ij}^{-1}H_j^{(k)}+A_i^{-1}T_{k,i}=0;\tag{6}$$
$$T_0h\lambda_{33}^{-1}H_3^{(1)}+T_2=0;\quad T_0H_3^{\pm}\pm\alpha_z^{\pm}(t_c^{\pm}-t^{\pm})=0.$$

Свободная энергия F, входящая в соотношения (5), (6), для тонкой оболочки из анизотропного материала, имеющего лишь одну плоскость упругой и тепловой симметрии, принимает вид

$$F(\varepsilon,\ T_j)=2h\left\{\frac{1}{2}\left[c_{ijkl}\left(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}+\frac{h^2}{3}\varkappa_{ij}\varkappa_{kl}\right)+c_{i3k3}\left(\varepsilon_{i3}\varepsilon_{k3}+\frac{h^2}{3}\varkappa_{i3}\varkappa_{k3}\right)+\right.\right.$$
$$\left.+2c_{ij33}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{33}+c_{3333}\varepsilon_{33}^2\right]-\left[(\beta_{ij}\varepsilon_{ij}+\beta_{33}\varepsilon_{33})T_1+\frac{h}{3}\beta_{ij}\varkappa_{ij}T_2\right]-$$
$$\left.-\frac{c_\varepsilon}{2T_0}\left(T_1^2+\frac{1}{3}T_2^2\right)\right\}.\tag{7}$$

Здесь $\beta_{ij}=c_{ijkl}\alpha_{kl}^t+c_{ij33}\alpha_{33}^t$; $\beta_{33}=c_{33kl}\alpha_{kl}^t+c_{3333}\alpha_{33}^t$; c_{ijkl}, c_{i3k3}, c_{ij33}, c_{333} — коэффициенты жесткости анизотропного тела; α_{ij}^t, α_{33}^t — коэффициенты теплового линейного расширения; c_ε — теплоемкость при постоянном объеме.

На основании соотношений (6), (7) уравнения теплопроводности можно записать в виде

$$\Delta T_1-c_\varepsilon\dot{T}_1-T_0(\beta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}+\beta_{33}\dot{\varepsilon}_{33})+W_1-\frac{\lambda_{33}}{h^2}(T_i-t_i)\mu_i=0;$$
$$\Delta T_2-c_\varepsilon\dot{T}_2-T_0h\beta_{ij}\dot{\varkappa}_{ij}+W_2-3\frac{\lambda_{33}}{h^2}[T_2-(T_i-t_i)\mu_{3-i}]=0,\tag{8}$$

где

$$\Delta T=(A_1A_2)^{-1}\sum_{i,j}^2\lambda_{ij}\left(\frac{A_{3-i}}{A_j}T_{,j}\right)_{,i};$$
$$\mu_i=\frac{h}{2\lambda_{33}}[\alpha_z^{+}+(-1)^{3-i}\alpha_z^{-}];\quad t_i=\frac{1}{2}[t_c^{+}+(-1)^{3-i}t_c^{-}].$$

Граничные условия — статические на g_N:

$$N_j=\overline{N}_j;\quad Q=\overline{Q};\quad M_j=\overline{M}_j;\quad M_3=\overline{M}_3;\tag{9}$$

геометрические на g_u ($g_u+g_N=g$):

$$u_r=\overline{u}_r;\quad \gamma_r=\overline{\gamma}_r;\tag{10}$$

температура на g_T:

$$T_j=\overline{T}_j;\tag{11}$$

конвективный теплообмен на g_s ($g_s+g_T=g$):

$$\sum_{i,j}^2\frac{\lambda_{ij}}{A_i}T_{k,j}n_i+\alpha_g(T_k-T_k^c)=0.\tag{12}$$

Теорема доказана.

Таким образом, среди всех возможных термомеханических состояний, которые удовлетворяют системе взаимосвязанных уравнений (3) — (6) и соответствующим граничным условиям (9) — (12), осуществляется то, при котором функционал (2) достигает стационарного значения $\delta I=0$.

Приведенные уравнения (3), (8), физические (5) и геометрические (4) соотношения вместе с граничными (9) — (12) и следующими начальными условиями: $u_r|_{\tau=0}=u_r^0$; $\dot{u}_r|_{\tau=0}=\overset{*}{u}_r$; $\gamma_r|_{\tau=0}=\gamma_r^0$; $\dot{\gamma}_r|_{\tau=0}=\overset{*}{\gamma}_r$; $T_j|_{\tau=0}=T_j^0$ — составляют полную формулировку краевой задачи теории динамической термоупругости анизотропных оболочек с учетом инерции вращения, поперечных (сдвиговых и нормальных) деформаций и термоупругого эффекта.

Сформулированная вариационная теорема соответствует наиболее общему вариационному принципу теории термоупругости анизотропных оболочек при термомеханическом взаимодействии. Из него как частные случаи следуют другие, менее общие принципы. В частности, обобщенный вариационный принцип виртуальных перемещений Лагранжа в этом случае имеет вид

$$\delta W_\varepsilon + \delta P + \delta D + 2h\rho \iint\limits_G \left(\ddot{u}_r \delta u_r + \frac{h^2}{3} \gamma_r \delta \ddot{\gamma}_r\right) d\sigma =$$

$$= \delta A - \iint\limits_G [T_1 (\delta H_3^+ - \delta H_3^-) + T_2 (\delta H_3^+ + \delta H_3^-)] \, d\sigma +$$

$$+ \frac{2h}{T_0} \iint\limits_G \sum_k^2 T_k \delta W_k' \frac{d\sigma}{2k-1} - 2h \int\limits_g \sum_k^2 T_k \delta H_n^{(k)} \frac{d\sigma}{2k-1}. \tag{13}$$

Вариационный принцип (13) можно использовать для получения основного энергетического уравнения термоупругих оболочек. Применяя в качестве u_r, γ_r и T_j действительные обобщенные перемещения и действительную температуру в оболочке, имеем $\delta u_r = \dot{u}_r d\tau$; $\delta \gamma_r = \dot{\gamma}_r d\tau$; $\delta T_j = \dot{T}_j d\tau$; $\delta W_\gamma' = \dot{W}_j' d\tau = W_j d\tau$; $\delta H_3^\pm = \dot{H}_3^\pm d\tau = \pm \frac{\alpha_z^\pm}{T_0} (t^\pm - t_c^\pm) \, d\tau$. Тогда соотношение (13) перепишется так:

$$\dot{W}_\varepsilon + \dot{K} + \dot{P} + \mathrm{X}_T = \frac{2\lambda_{33}}{hT_0} \iint\limits_G (t_i \mu_i T_1 + t_i \mu_{3-i} T_2) \, d\sigma + A (q_r, m_r, N, \dot{u}, \dot{\gamma}) +$$

$$+ \frac{2h}{T_0} \iint\limits_G \sum_k^2 W_k T_k \frac{d\sigma}{2k-1} + \frac{2h\alpha_g}{T_0} \int\limits_g \sum_k^2 T_k T_k^c \frac{d\sigma}{2k-1}. \tag{14}$$

Здесь введены обозначения

$$P = \frac{hc_\varepsilon}{T_0} \iint\limits_G \left(T_1^2 + \frac{1}{3} T_2^2\right) d\sigma; \quad K = h\rho \iint\limits_G \left(\dot{u}_r \dot{u}_r + \frac{h^2}{3} \dot{\gamma}_r \dot{\gamma}_r\right) d\sigma;$$

$$A = \iint\limits_G (q_r u_r + m_r \gamma_r) \, d\sigma + \int\limits_g (N_j u_j + Q u_3 + M_j \gamma_j + M_3 \gamma_3) \, dg;$$

$$\mathrm{X}_T = \dot{D} = \frac{2h}{T_0} \iint\limits_G \left\{ \sum_{i,j,k} \frac{A_{3-i}}{A_j} \frac{\lambda_{ij}}{2k-1} T_{k,j} T_{k,i} + \frac{\lambda_{33}}{h^2} [T_2^2 + \mu_1 (T_1^2 + T_2^2) + \right.$$

$$\left. + 2\mu_2 T_1 T_2] \, A_1 A_2 \right\} d\alpha_1 d\alpha_2 + \frac{2h\alpha_g}{T_0} \int\limits_g \left(T_1^2 + \frac{1}{3} T_2^2\right) dg;$$

W_ε — работа деформации.

Уравнение (14) выражает конечную форму закона сохранения энергии для термоупругих анизотропных оболочек. В его правой части находятся величины, создающие поле деформации и температуры.

Исходя из приведенной энергетической теоремы (14) можно доказать теорему единственности решения краевой задачи взаимосвязанной термоупругости анизотропных оболочек, которая сформулирована выше.

С целью изучения влияния поперечных деформаций и анизотропии теплофизических и механических свойств материала на напряженно-деформированное состояние рассмотрим ортотропную замкнутую цилиндрическую оболочку конечной длины с радиусом R, поверхность $z = h$ которой нагревается внешней средой с температурой t_c, согласно закону Ньютона. Края оболочки защемлены и вместе с поверхностью $z = -h$ поддерживаются при нулевой температуре.

Для решения сформулированной стационарной задачи имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений в обобщенных перемещениях:

$$c_{11}u_{1,11} + c_{12}u_{3,1} + c_{13}R\gamma_{3,1} = R\beta_{11}T_{1,1};$$
$$c_{12}u_{1,1} - c_{55}k'u_{3,11} + c_{22}u_3 - c_{55}k'R\gamma_{1,1} + c_{23}R\gamma_3 = R\beta_{22}T_1;$$
$$-c_{55}k'u_{3,1} + c_{11}\xi^2R\gamma_{1,11} - c_{55}k'R\gamma_1 + c_{12}\xi^2R\gamma_{3,1} = \beta_{11}\frac{h}{3}T_{2,1};$$
$$c_{13}u_{1,1} + c_{23}u_3 + c_{12}\xi^2R\gamma_{1,1} - c_{55}k'\xi^2R\gamma_{3,11} + c_{33}R\gamma_3 + c_{22}\xi^2R\gamma_3 = \frac{h}{3}\beta_{22}T_2 + R\beta_{33}T_1.$$

Здесь T_i — известные величины, найденные из стационарных уравнений теплопроводности (8); коэффициенты жесткости выражаются через технические постоянные (модули Юнга E_i, E_3, модули сдвига G_{i3} и коэффициенты Пуассона ν_{ii}, ν_{i3}) следующим образом:

$$c_{11} = E_1\eta(1 - \nu_{23}\nu_{32}); \quad c_{33} = E_3\eta(1 - \nu_{12}\nu_{21}); \quad c_{12} = E_1\eta(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32} \quad (1 \rightleftarrows 2);$$
$$\eta = (1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13})^{-1}\ \xi^2 = \frac{h^2}{3R^2};$$
$$k' = \frac{5}{6}.$$

Некоторые численные результаты для безразмерных прогибов $\omega = \frac{u_3}{\alpha_{11}^t R t_c}$ усилий $\overline{N}_{22} = \frac{N_{22}}{10t_c h E_1 \alpha_{11}^t}$ и моментов $\overline{M}_{22} = \frac{M_{22}}{t_c h^2 E_1 \alpha_{11}^t}$, вычисленных в центре оболочки с параметрами $E_1 = 40G_{13}$; $R = 50h$; $\nu_{12} = 0{,}15$; $\nu_{31} = 0{,}3$, приведены в таблице. Из анализа решения и расчетных данных следует, что на величины тепловых напряжений в анизотропной оболочке существенное влияние оказывают тепловое линейное расширение (α_{33}^t) по толщине, а также упругие поперечные деформации.

$\alpha_{33}^t/\alpha_{11}^t$	10		0	
E_1/E_3	3	5	3	5
ω	3,126	3,093	3,049	3,051
$\overline{N}_{22}$	—3,859	—2,562	—0,893	—0,836
$\overline{M}_{22}$	—1,475	—0,967	—1,139	—1,105

1. *Айнола Л. Я.* Вариационные принципы и теорема взаимности для динамических задач теории оболочек.— В кн: Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1966, с. 9—13.
2. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек.— М.: Наука, 1974.— 446 с.
3. *Балабух Л. И., Шаповалов А. А.* О вариационных уравнениях термоупругости.— Прикл. математика и механика, 1960, 24, вып. 4, с. 703—707.
4. *Болотин В. В.* Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла.— Прикл. математика и механика, 1960, 24, вып. 2, с. 361—363.
5. *Григолюк Э. И., Коган Ф. А.* Современное состояние теории многослойных оболочек.— Прикл. механика, 1972, 8, вып. 6, с. 3—17.
6. *Пелех Б. Л., Подстригач Я. С., Сиренко И. Г.* Некоторые общие вопросы теории термоупругости трансверсально изотропных оболочек.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1971, № 6, с. 81—88.
7. *Швец Р. Н., Флячок В. М.* Основные уравнения термоупругих ортотропных оболочек с учетом поперечных сдвиговых и нормальных деформаций.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 6, с. 539—543.
8. *Ben-Amoz M.* On a variational theorem in coupled thermoelasticity.— Trans. ASME. Ser. E, 1964, N 4, p. 243—245.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
16.11.78