УДК 539.377

Ю. М. Коляно, Р. М. Кушнир

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В НАГРЕВАЕМЫХ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА ПЛАСТИНКАХ С ДВУСТОРОННИМИ ПОКРЫТИЯМИ

Рассмотрим свободную от внешней нагрузки неограниченную полосу-пластинку толщиной 2δ с двусторонним покрытием толщиной $2h$, в которой поверхности $x_0 = \pm L$ теплоизолированы, а через боковые поверхности $z_0 = \pm\delta$ осуществляется теплообмен с внешней средой нулевой температуры по закону Ньютона. Пластинка нагревается системой мгновенных равноотстоящих сосредоточенных источников тепла, расположенных вдоль оси y [3]. Предположим, что температура пластинки в начальный момент времени равна нулю.

Физико-механические характеристики пластинки с двусторонним покрытием представим в виде

$$p(z) = p_0 + (p_1 - p_0)\,[S_+(z + 1 - 2\varepsilon) - S_-(z - 1 + 2\varepsilon)], \tag{1}$$

где p_0 и p_1 — физико-механические характеристики покрытия и основного материала; $\varepsilon = \frac{h}{\delta}$; $z = \frac{z_0}{\delta}$;

$$S_-(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta \geqslant 0; \\ 0, & \eta < 0; \end{cases} \qquad S_+(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta > 0; \\ 0, & \eta \leqslant 0. \end{cases}$$

Для определения нестационарного температурного поля в рассматриваемой системе воспользуемся уравнением теплопроводности для неоднородных пластинок [2], которое в данном случае запишется так:

$$\Delta T - \mathrm{Bi}^* T = \frac{\partial T}{\partial\,\mathrm{Fo}^*} - Q^*\delta(x)\,\delta(\mathrm{Fo}^*)\frac{1}{2c}\left(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\cos\lambda_m y\right). \tag{2}$$

Краевые условия примем в виде

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{|x|=l} = 0; \quad T = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ при } |y| \to \infty, \quad T|_{\mathrm{Fo}^*=0} = 0. \tag{3}$$

Здесь x, y — координаты точки срединной поверхности пластинки, отнесенные к ее полутолщине δ; $2c$ — расстояние между соседними источниками тепла; $\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака; α, $\lambda_t^{(i)}$, c_i, ρ_i — соответственно коэффициенты теплоотдачи с поверхностей $z = \pm 1$, теплопроводности, теплоемкости и плотность покрытия ($i = 0$) и основного материала ($i = 1$);

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{c};\quad l = \frac{L}{\delta};\quad K_\lambda = \frac{\lambda_t^{(0)}}{\lambda_t^{(1)}};\quad K_c = \frac{c_v^{(0)}}{c_v^{(1)}};\quad c_v^{(i)} = c_i\rho_i;\quad a_1 = \frac{\lambda_t^{(1)}}{c_v^{(1)}};$$

$$\mathrm{Bi}^* = \frac{\mathrm{Bi}}{1 + 2\varepsilon(K_\lambda - 1)};\quad \mathrm{Fo}^* = \frac{\mathrm{Fo}\,[1 + 2\varepsilon(K_\lambda - 1)]}{1 + 2\varepsilon(K_c - 1)};\quad Q^* = \frac{Q}{1 + 2\varepsilon(K_c - 1)};$$

$$\mathrm{Bi} = \frac{\alpha\delta}{\lambda_t^{(1)}};\quad \mathrm{Fo} = \frac{a_1\tau}{\delta^2};\quad Q = \frac{q a_1}{2\lambda_t^{(1)}\delta^3};\quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Для определения температурных напряжений воспользуемся формулами для неоднородных пластинок [2], которые в данном случае записываются в в виде

$$\sigma_{xx} = J_1\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + J_2\frac{\partial u}{\partial x} - J_3;\quad \sigma_{xy} = \frac{1}{2}J_2\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right);$$
$$\sigma_{yy} = J_1\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + J_2\frac{\partial v}{\partial y} - J_3, \tag{4}$$

где отнесенные к полутолщине пластинки δ перемещения срединной поверхности пластинки $u(x, y, \mathrm{Fo})$, $v(x, y, \mathrm{Fo})$ удовлетворяют уравнениям

$$2(J_1+J_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+J_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(2J_1+J_2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=2\frac{\partial J_3}{\partial x};$$
$$2(J_1+J_2)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+J_2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(2J_1+J_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2\frac{\partial J_3}{\partial y}; \quad (5)$$

λ_i, μ_i — коэффициенты Ламе; $\alpha_t^{(i)}$ — температурный коэффициент линейного расширения покрытия ($i=0$) и основного материала ($i=1$);

$$J_1=\gamma_1+2\varepsilon(\gamma_0-\gamma_1);\quad J_2=2[\mu_1+2\varepsilon(\mu_0-\mu_1)];\quad J_3=[\gamma_1^*+2\varepsilon(\gamma_0^*-\gamma_1^*)]\,T;$$
$$\gamma_i=\frac{2\lambda_i\mu_i}{\lambda_i+2\mu_i};\quad \gamma_i^*=\frac{2\mu_i\beta_i}{\lambda_i+2\mu_i};\quad \beta_i=\alpha_t^{(i)}(3\lambda_i+2\mu_i).$$

Вводя функцию Φ таким образом, что

$$u=\frac{1}{J_2}\frac{\partial\Phi}{\partial x};\quad v=\frac{1}{J_2}\frac{\partial\Phi}{\partial y},$$

после интегрирования по x первого уравнения (5) (или по y — второго) для определения функции Φ имеем уравнение

$$\Delta\Phi=K_\sigma T, \quad (6)$$

где

$$K_\sigma=\alpha_t^{(1)}E_1[1+2\varepsilon(K_\mu^+-1)]K_\nu;\quad K_\mu^\pm=\frac{K_E(1\pm\nu_1)}{1\pm\nu_0};$$
$$K_\nu=\frac{1+2\varepsilon(K_1-1)}{1+2\varepsilon(K_2-1)};\quad K_1=K_\alpha K_\mu^-;\quad K_2=\frac{K_E(1-\nu_1^2)}{1-\nu_0^2};$$

$K_E=\dfrac{E_0}{E_1}$; $K_\alpha=\dfrac{\alpha_t^{(0)}}{\alpha_t^{(1)}}$; E_i — модуль упругости; ν_i — коэффициент Пуассона ($i=0,1$).

Представим компоненты температурных напряжений через функцию Эйри U и функцию Φ в виде

$$\sigma_{xx}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2};\quad \sigma_{yy}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2};\quad \sigma_{xy}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}, \quad (7)$$

где $F=U-\Phi$.

Поступая аналогично работе [3] для однородных пластинок, находим, что функция U удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\Delta\Delta U=0, \quad (8)$$

если справедливо уравнение (6).

Уравнения (2), (6) по виду совпадают с соответствующими уравнениями для однородной пластинки [3]. Таким образом, аналогично работе [1] для армированных пластинок квазистатическая задача термоупругости для пластинки с двусторонним покрытием приведена к соответствующей задаче для однородной пластинки. Поэтому, заменяя в известных решениях [3] задач термоупругости для однородных пластинок, нагреваемых системой мгновенных равноотстоящих сосредоточенных источников тепла, коэффициенты Bi, Fo, Q, $\alpha_t E$ соответственно на Bi^*, Fo^*, Q^*, K_σ, получаем решения соответствующих задач для полосы-пластинки и неограниченной пластинки ($l\to\infty$) с двусторонними покрытиями:

$$T=\frac{Q^*e^{-\mathrm{Mi}}}{2lc}\vartheta_3\left(\frac{x}{2l},\ \frac{\mathrm{Fo}^*}{l^2}\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\lambda_m^2\mathrm{Fo}^*}\cos\lambda_m y\right);$$

$$\sigma_{xx}=-\frac{K_\sigma Q^*e^{-\mathrm{Mi}}}{2c}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\lambda_m y\left\{\frac{M(\lambda_m)\lambda_m}{l}[\varphi(\lambda_m,\ \mathrm{Fo}^*)(\mathrm{ch}\,x\lambda_m\,\mathrm{sh}\,l\lambda_m+\right.$$

$$+ l\lambda_m \operatorname{ch} l\lambda_m \operatorname{ch} x\lambda_m - x\lambda_m \operatorname{sh} l\lambda_m \operatorname{sh} x\lambda_m) -$$

$$-\left(l + \frac{e^{-l\lambda_m}}{\lambda_m} \operatorname{sh} l\lambda_m\right) \operatorname{ch} x\lambda_m + x \operatorname{sh} x\lambda_m\Big] + \lambda_m \left[e^{-|x|\lambda_m} - \lambda_m \psi(x, \lambda_m, \mathrm{Fo}^*)\right]\Big\}\Big\};$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_\sigma Q^* e^{-\mathrm{Mi}}}{2c} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \lambda_m y \left\{\frac{M(\lambda_m)}{l} [\varphi(\lambda_m, \mathrm{Fo}^*) \lambda_m^2 (l \operatorname{sh} x\lambda_m \operatorname{ch} l\lambda_m -\right.$$

$$- x \operatorname{ch} x\lambda_m \operatorname{sh} l\lambda_m) + \operatorname{sh} x\lambda_m (e^{-l\lambda_m} \operatorname{ch} l\lambda_m - l\lambda_m) +$$

$$\left.+ x\lambda_m \operatorname{ch} x\lambda_m] - \lambda_m \left[e^{-|x|\lambda_m} \operatorname{sgn}_+ x + \frac{d\psi(x, \lambda_m, \mathrm{Fo}^*)}{dx}\right]\right\}; \qquad (9)$$

$$\sigma_{yy} = -\sigma_{xx} + \frac{K_\sigma Q^* e^{-\mathrm{Mi}}}{2c} \left\langle \sum_{m=1}^{\infty} \cos \lambda_m y \left\{\frac{2M(\lambda_m)}{l} [\operatorname{ch} x\lambda_m - \varphi(\lambda_m, \mathrm{Fo}^*) \times\right.\right.$$

$$\left.\times \lambda_m \operatorname{ch} x\lambda_m \operatorname{sh} l\lambda_m] - \frac{1}{l} e^{-\lambda_m^2 \mathrm{Fo}^*} \vartheta_3\left(\frac{x}{2l}, \frac{\mathrm{Fo}^*}{l^2}\right)\right\} +$$

$$\left.+ \frac{1}{2l}\left[1 - \vartheta_3\left(\frac{x}{2l}, \frac{\mathrm{Fo}^*}{l^2}\right)\right]\right\rangle;$$

$$T = \frac{Q^* e^{-\mathrm{Mi} - \frac{x^2}{4\mathrm{Fo}^*}}}{2\sqrt{\pi \mathrm{Fo}^*}\, c} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda_m^2 \mathrm{Fo}^*} \cos \lambda_m y\right);$$

$$\sigma_{xx} = \frac{K_\sigma Q^* e^{-\mathrm{Mi}}}{2c} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \cos \lambda_m y \left[-\operatorname{ch}|x|\lambda_m + \frac{1}{2} e^{-|x|\lambda_m} \times\right.$$

$$\left.\times \operatorname{erf}\left(\lambda_m \sqrt{\mathrm{Fo}^*} - \frac{|x|}{2\sqrt{\mathrm{Fo}^*}}\right) + \frac{1}{2} e^{|x|\lambda_m} \operatorname{erf}\left(\lambda_m \sqrt{\mathrm{Fo}^*} + \frac{|x|}{2\sqrt{\mathrm{Fo}^*}}\right)\right];$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_\sigma Q^* e^{-\mathrm{Mi}}}{2c} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \sin \lambda_m y \left[\operatorname{sh}|x|\lambda_m + \frac{1}{2} e^{-|x|\lambda_m} \times\right.$$

$$\left.\times \operatorname{erf}\left(\lambda_m \sqrt{\mathrm{Fo}^*} - \frac{|x|}{2\sqrt{\mathrm{Fo}^*}}\right) - \frac{1}{2} e^{|x|\lambda_m} \operatorname{erf}\left(\lambda_m \sqrt{\mathrm{Fo}^*} + \frac{|x|}{2\sqrt{\mathrm{Fo}^*}}\right)\right] \operatorname{sgn}_+ x; \qquad (10)$$

$$\sigma_{yy} = -\sigma_{xx} - \frac{K_\sigma Q^* e^{-\mathrm{Mi} - \frac{x^2}{4\mathrm{Fo}^*}}}{2\sqrt{\pi \mathrm{Fo}^*}\, c} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda_m^2 \mathrm{Fo}^*} \cos \lambda_m y\right).$$

Здесь $\vartheta_3(u, v)$ — тэта-функция; $\mathrm{Mi} = \mathrm{Bi}^* \mathrm{Fo}^*$;

$$\varphi(\eta, \mathrm{Fo}) = \frac{1}{l}\left[\frac{1 - e^{-\eta^2 \mathrm{Fo}}}{\eta^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 - e^{-\left(\eta^2 + \frac{n^2\pi^2}{l^2}\right)\mathrm{Fo}}}{\eta^2 + \frac{n^2\pi^2}{l^2}}\right];$$

$$\psi(x, \eta, \mathrm{Fo}) = \frac{1}{l}\left[\frac{1 - e^{-\eta^2 \mathrm{Fo}}}{\eta^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{l} x \frac{1 - e^{-\left(\eta^2 + \frac{n^2\pi^2}{l^2}\right)\mathrm{Fo}}}{\eta^2 + \frac{n^2\pi^2}{l^2}}\right];$$

$$M(\eta) = \frac{2l\eta}{\operatorname{sh} 2l\eta + 2l\eta}; \quad \operatorname{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-t^2} dt; \quad \operatorname{sgn}_+ x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

По формулам (10) проведены расчеты безразмерных температурных напряжений $\sigma_i = \frac{\sigma_{ii}}{\alpha_t^{(1)} E_1 Q}$ $(i = x, y)$; $\tau_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\alpha_t^{(1)} E_1 Q}$ для стальной бесконечной пластинки с двусторонним молибденовым покрытием. В этом случае $K_\lambda = 2,3$; $K_c = 0,765$; $K_E = 1,43$; $K_\alpha = 0,46$; $\nu_0 = \nu_1 = 0,3$. Графики распределения напряжений σ_x и σ_y в зависимости от x, Fo и Bi при $y = 0$, $\varepsilon = 0{,}1$, $c = 10$ приведены на рис. 1.

Напряжения $\sigma_x|_{y=0}$ сжимающие и с ростом x уменьшаются. Напряжения $\sigma_y|_{y=0}$ изменяют знак, переходя из области сжатия в область растяжения. Максимального значения напряжения достигают при $x = 0$. Из графиков видно, что с ростом критериев Bi и Fo напряжения уменьшаются.

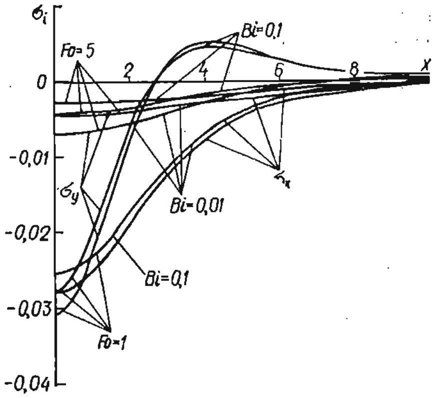

Рис. 1

Исследуем теперь влияние двустороннего покрытия на распределение температурных напряжений. Приводим графики изменения напряжений σ_x, σ_y (рис. 2), τ_{xy} (рис. 3), возникающих в однородной пластинке ($\varepsilon = 0$) и в пластинке с двусторонним покрытием ($\varepsilon = 0{,}1$; $0{,}25$), в зависимости от y при $x = 0$ (σ_x, σ_y) и $x = 2$ (τ_{xy}). При этом $\mathrm{Bi} = 0{,}01$,

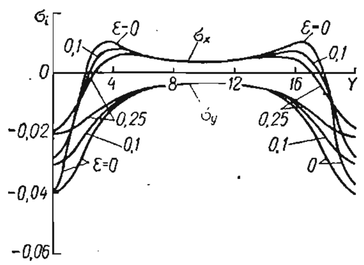

Рис. 2

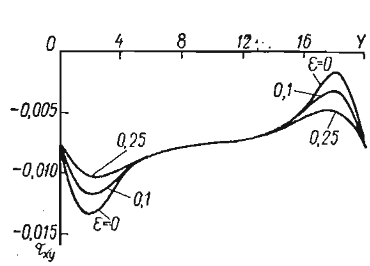

Рис. 3

$\mathrm{Fo} = 1$, $c = 10$. Как видно из графиков, максимальные значения напряжений в стальной пластинке с двусторонним покрытием при принятых значениях критериев Bi и Fo с увеличением толщины покрытия уменьшаются.

1. *Коляно Ю. М., Кулик О. М., Гульчевський Л. С.* Термопружність армованих пластинок.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1977, № 7, с. 608—612.
2. *Коляно Ю. М., Попович В. С.* Уравнения термоупругости неоднородных и кусочно-однородных пластин.— В кн.: Математические методы в термомеханике.— Киев : Наук. думка, 1978, с. 50—63.
3. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках.— Киев : Наук. думка, 1972.— 308 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
13.09.78

УДК [535 : 538] : 519.33

Н. В. Салтанов

ВАРИАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКИ В ЭЙЛЕРОВОМ И ЭЙЛЕР-ЛАГРАНЖЕВОМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ

Хорошо известно, что вариационные формулировки моделей и задач физики, механики, прикладной математики и т. д. обладают определенными преимуществами. В частности, в последнее время значительный прогресс в построении моделей механики сплошной среды достигнут в работах Л. И. Седова [15 и др.]. В термомеханике эффективные вариационные принципы сформулированы Я. С. Подстригачем, Э. И. Григолюком и их сотрудниками [1, 5, 9, 17]. В исследованиях В. С. Ткалича [15, 16] выполнена значительная