УДК 512.831

А. И. Балинский, В. С. Заячковский

СВОЙСТВО ОБОБЩЕННОЙ БИОРТОГОНАЛЬНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ВЗАИМОСОПРЯЖЕННЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

Установим соотношения обобщенной биортогональности систем собственных векторов взаимосопряженных полиномиальных операторных пучков, а также зависимость между их модальными матрицами и коэффициентами.

Пусть имеем операторный пучок

$$P(\lambda) = \lambda^m A_0 + \lambda^{m-1} A_1 + \cdots + A_m, \tag{1}$$

где A_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$ — линейные операторы, действующие в унитарном n-мерном пространстве E, причем оператор A_0 обратим; λ — комплексный параметр. Приведем некоторые определения (см., например, [2]).

Значение $\lambda = \lambda_0$ параметра называется собственным, если уравнение $P(\lambda_0)x = 0$ имеет в E нетривиальное решение. Это решение $x = x^{[0]}$ называется собственным вектором пучка, соответствующим собственному значению λ_0.

Множество всех собственных значений пучка (1) обозначим через $\sigma(P)$.

Если существует последовательность векторов $x^{[1]}, x^{[2]}, \ldots, x^{[k]}$, удовлетворяющая соответственно последовательности уравнений

$$P(\lambda_0)x^{[l]} + \frac{1}{1!}\frac{\partial P(\lambda_0)}{\partial\lambda}x^{[l-1]} + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{\partial^k P(\lambda_0)}{\partial\lambda^k}x^{[l-k]} = 0$$

$$(l = 1, 2, \ldots, k),$$

где $x^{[l]} = 0$, если $l < 0$, то вектор $x^{[l]}$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$ называется l-м присоединенным вектором к собственному вектору $x^{[0]}$, а совокупность $x^{[0]}, x^{[1]}, \ldots$ $\ldots, x^{[k]}$ называется цепочкой длины $k + 1$ собственного и присоединенных векторов операторного пучка $P(\lambda)$, соответствующей собственному значению λ_0.

Операторному пучку (1) поставим в соответствие операторы

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \ldots & \\ & 0 & I & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \ldots & I \\ -A_0^{-1}A_m & \ldots & & & -A_0^{-1}A_1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{S} = \begin{bmatrix} A_{m-1} & \ldots & A_1 A_0 \\ & \cdot & \cdot \\ A_1 & \cdot & \\ A_0 & \cdot & 0 \end{bmatrix},$$

действующие в унитарном пространстве $\tilde{E}$ прямой (ортогональной) суммы m копий исходного пространства E. Оператор $\tilde{A}$ называется сопровождающим оператором пучка $P(\lambda)$.

Следующие хорошо известные утверждения (см., например, [1, 4]) позволяют свести изучение спектральных свойств операторного пучка $P(\lambda)$ к изучению соответствующих свойств сопровождающего оператора $\tilde{A}$.

Лемма 1. Собственные значения операторного пучка $P(\lambda)$ и оператора $\tilde{A}$ совпадают.

Лемма 2. Пусть $x^{[0]}, x^{[1]}, \ldots, x^{[k]}$ — цепочка из собственного и присоединенных векторов операторного пучка $P(\lambda)$, соответствующая собственному значению λ_0. Тогда векторы $\tilde{x}^{[0]}, \tilde{x}^{[1]}, \ldots, \tilde{x}^{[k]}$, равные

$$\tilde{x}^{[s]} = \begin{bmatrix} x_{s,1} \\ x_{s,2} \\ \vdots \\ x_{s,m} \end{bmatrix} \qquad (s = 0, 1, \ldots, k),$$

$$\text{где } x_{s,p} = \sum_{l=0}^{s} \frac{1}{l!} \left. \frac{d^l \lambda^p}{d\lambda^l} \right|_{\lambda=\lambda_0} x_{s-l} \qquad (p = 1, \ldots, m),$$

образуют жорданову цепочку длины $k+1$ сопровождающего оператора $\tilde{A}$, соответствующую собственному значению λ_0.

Определение 1. Назовем операторный пучок $P(\lambda)$ вида (1) пучком простой структуры, если у него нет присоединенных векторов.

Это эквивалентно тому, что уравнение $P(\lambda_0)x + P'(\lambda_0)x^{[0]} = 0$ не имеет решения, если $\lambda_0, x^{[0]}$ — собственная пара пучка (1).

Из лемм 1 и 2 вытекает такая лемма.

Лемма 3. Операторный пучок $P(\lambda)$ с mn попарно различными собственными значениями является операторным пучком простой структуры, причем каждому собственному значению λ_i соответствует единственный (с точностью до постоянного множителя) собственный вектор x_i, т. е.

$$\dim N(P(\lambda_i)) = 1$$

($N(A)$ — ядро оператора A).

Вместе с операторным пучком $P(\lambda)$ рассмотрим сопряженный к нему операторный пучок

$$P^*(\mu) = \mu^m A_0^* + \mu^{m-1} A_1^* + \cdots + A_m^*,$$

где A_i^* — оператор, сопряженный к A_i; μ — комплексный параметр.

Операторному пучку $P^*(\mu)$, как и пучку $P(\lambda)$, в пространстве $\tilde{E}$ поставим в соответствие операторы

$$\tilde{A}_* = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \ldots & \\ & 0 & I & 0 \ldots & \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & & \ldots & I \\ -A_0^{*-1}A_m^* & & \cdots & & -A_0^{*-1}A_1 \end{bmatrix} \text{ и } \tilde{S}_* = \tilde{S}^* = \begin{bmatrix} A_{m-1}^* & \ldots & A_1^* A_0^* \\ \vdots & \cdot & \cdot \\ A_1^* & \cdot & \\ A_0^* & & 0 \end{bmatrix}.$$

Из структуры введенных операторов следует такая лемма.

Лемма 4. Операторы $\tilde{A}^*$ и $\tilde{A}_*$ подобны, а именно: $\tilde{A}_* = (\tilde{S}^*)^{-1} \tilde{A}^* \tilde{S}^*$.

Из лемм 1 и 4 вытекают такие следствия.

Следствие 1. $\sigma(P^*) = \overline{\sigma(P)}$.

Следствие 2. Собственные векторы $\tilde{z}$ и $\tilde{y}$ операторов $\tilde{A}^*$ и $\tilde{A}_*$ соответственно связаны соотношением $\tilde{z} = \tilde{S}^* \tilde{y}$.

Далее будем рассматривать операторные пучки вида (1) с попарно различными собственными значениями. Для взаимосопряженной пары таких пучков докажем свойство обобщенной биортогональности систем их собственных векторов.

Теорема 1. Пусть $P(\lambda)$ — пучок с mn различными собственными значениями. Если x_i и y_j — собственные векторы, соответствующие собственным значениям λ_i и $\mu_j = \bar{\lambda}_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, mn)$ операторных пучков $P(\lambda)$ и $P^*(\mu)$, то справедливы соотношения ортогональности

$$(P(\lambda_i, \lambda_j) x_i, y_j) = 0, \quad i \neq j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, mn), \tag{2}$$

где $P(\lambda_i, \lambda_j) = \dfrac{P(\lambda_i) - P(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}$, и нормированности

$$(P'(\lambda_i) x_i, y_i) = m_i \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, mn). \tag{3}$$

Доказательство. В случае $i \neq j$

$$(P(\lambda_i, \lambda_j) x_i, y_j) = \left(\frac{P(\lambda_i) - P(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} x_i, y_j\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} [(P(\lambda_i) x_i, y_j) - (x_i, P^*(\bar{\lambda}_j) y_j)] = 0,$$

что и доказывает соотношения (2), поскольку $P(\lambda_i) x_i = P^*(\bar{\lambda}_j) y_j = 0$.

Докажем соотношения (3). Пусть $(P'(\lambda_i) x_i, y_i) = 0$. Поскольку $\dim N(P(\lambda_i)) = 1$ (см. лемму 3), то вектор $P'(\lambda_i) x_i$ ортогонален подпространству $N(P^*(\bar{\lambda}_i))$ и, следовательно, $P'(\lambda_i) x_i \in R(P(\lambda_i))$ —области значений оператора. Таким образом, уравнение

$$P(\lambda_i) x + P'(\lambda_i) x_i = 0$$

разрешимо, что противоречит простой структуре пучка $P(\lambda)$. Теорема доказана.

При исследовании задач о вынужденных колебаниях неконсервативных механических систем целесообразно использовать следующие зависимости между модальными матрицами операторных пучков и их коэффициентами.

Выберем в пространстве E фиксированный базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ и далее матрицы операторов относительно этого базиса будем обозначать тем же символом, что и сами операторы.

Определение 2. Матрицу размером $n \times mn$ вида

$$X^{[k]} = [\lambda_1^k x_1, \lambda_2^k x_2, \ldots, \lambda_{mn}^k x_{mn}] \qquad (k = 0, 1, \ldots, m - 1),$$

j-й столбец которой состоит из координат вектора $\lambda_j^k x_j$, где λ_j, x_j — собственная пара пучка $P(\lambda)$, назовем k-й модальной матрицей операторного пучка.

Модальные матрицы сопряженного операторного пучка обозначим так:

$$Y^{[k]} = [\bar{\lambda}_1^k y_1, \bar{\lambda}_2^k y_2, \ldots, \bar{\lambda}_{mn}^k y_{mn}].$$

Теорема 2. Пусть собственные векторы пучков $P(\lambda)$ и $P^*(\mu)$ нормированы условием (3). Тогда для их модальных матриц справедливы соотношения

$$X^{[k]} \tilde{M}^{-1} (Y^{[l]})^* = \begin{cases} 0, & k + l < m - 1, \\ J_{k+l-(m-1)}, & k + l \geqslant m - 1 \end{cases} \quad (k, l = 0, 1, \ldots, m - 1), \tag{4}$$

где $\tilde{M} = \operatorname{diag}\{m_i\}$, а матрицы J_i определяются последовательно из рекуррентных соотношений

$$A_0 J_i + A_1 J_{i-1} + \cdots + A_m J_{i-m} = 0, \; J_0 = A_0^{-1}, \; J_i \equiv 0, \; i < 0.$$

Доказательство. Пусть $\{\tilde{x}_i\}$ и $\{\tilde{z}_j\}$ — собственные векторы операторов $\tilde{A}$ и $\tilde{A}^*$ соответственно, удовлетворяющие условиям

$$(\tilde{x}_i, \tilde{z}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ m_i, & i = j. \end{cases}$$

Отсюда согласно следствию 2 из леммы 4 получаем

$$(\tilde{S}\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ m_i, & i = j. \end{cases}$$

Учитывая структуру векторов $\tilde{x}_i$ и $\tilde{y}_i$ (см. лемму 2) и переходя к координатной форме, представляем эти соотношения в матричном виде

$$\tilde{Y}^*\tilde{S}\tilde{X} = \tilde{M}, \tag{5}$$

где $mn \times mn$-матрицы $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ определяются равенствами

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} X^{[0]} \\ X^{[1]} \\ \vdots \\ X^{[m-1]} \end{bmatrix}, \quad \tilde{Y} = \begin{bmatrix} Y^{[0]} \\ Y^{[1]} \\ \vdots \\ Y^{[m-1]} \end{bmatrix}.$$

Из соотношений (5), учитывая обратимость матриц $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ и $\tilde{M}$, получаем

$$\tilde{X}\tilde{M}^{-1}\tilde{Y}^* = \tilde{S}^{-1}$$

или, так как

$$\tilde{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & J_0 \\ & \cdot & J_1 \\ \cdot & \cdot & \vdots \\ J_0 & J_1 & \ldots\ J_{m-1} \end{bmatrix},$$

то

$$\begin{bmatrix} X^{[0]} \\ X^{[1]} \\ \vdots \\ X^{[m-1]} \end{bmatrix} \tilde{M}^{-1} [(Y^{[0]})^*, (Y^{[1]})^*, \ldots, (Y^{[m-1]})^*] = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & J_0 \\ & \cdot & J_1 \\ \cdot & \cdot & \vdots \\ J_0 & J_1 & \ldots\ J_{m-1} \end{bmatrix},$$

что и доказывает соотношения (4).

Отметим, что из теоремы 2 как частный случай следует полученная в работе [3] другим способом так называемая ортогональность обобщенно нормированных собственных векторов и собственных строк квадратичного матричного пучка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балинский А. И.* Некоторые способы исследования обобщенных задач на собственные значения : Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1972.— 113 с.
2. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.— М. : Наука, 1965.— 448 с.
3. *Fawzy I.* Orthogonality of generally normalized eigenvectors and eigenrows.— AIAA Journal, 1977, 15, N 2, p. 276—278.
4. *Langer H.* Über Lancaster's Zerlegung von Matrizen-Scharen.— Arch. Ration. Mech. and Anal., 1968, 29, N 1, p. 75—80.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
29.11.77

УДК 512.8

А. И. Балинский, Б. И. Копытко

ОБ УСЛОВИЯХ РАСПОЛОЖЕНИЯ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА ВНУТРИ ЕДИНИЧНОГО КРУГА

При рассмотрении разнообразных задач устойчивости возникает, как известно, необходимость установить факт расположения корней определенного многочлена внутри единичного круга. Этот вопрос решают, например, применяя известный критерий Шура — Кона [3]. В данной работе на осно-