УДК 539.3

В. А. Осадчук

МЕТОД ДИСТОРСИЙ В ЗАДАЧАХ ОБ УПРУГОМ РАВНОВЕСИИ ОБОЛОЧЕК С РАЗРЕЗАМИ (ТРЕЩИНАМИ)

В связи с определенными математическими трудностями, как это неоднократно отмечалось в литературе, теория трещин применительно к оболочкам разработана очень мало; некоторые решения задач получены лишь в последнее время. В данной работе изложен эффективный метод, позволяющий сводить задачи о напряженно-деформированном состоянии оболочек с разрезами (трещинами) к решению систем сингулярных интегральных уравнений. При этом исходными могут быть уравнения теории оболочек, базирующейся на гипотезах Кирхгофа — Лява, а также уточненных классических теорий, в частности теории оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Метод основан на том, что вместо оболочки с разрезами рассматривается сплошная оболочка, находящаяся под действием дисторсий, описывающих скачки перемещений и углов поворота на линиях, соответствующих разрезам.

Дисторсии в теории оболочек. Приведем основные соотношения линейной теории тонких упругих оболочек, напряженное состояние которых обусловлено заданным тензором дисторсии — симметричным тензором второго ранга, несовместность которого приводит к возникновению собственных напряжений. При получении этих соотношений воспользуемся следующим представлением компонентов тензора $\{e_{ij}\}$ геометрически малой деформации тела, находящегося под воздействием поля дисторсий [7, 8]:

$$e_{ij} = \overset{s}{e}_{ij} + \overset{0}{e}_{ij} \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3). \tag{1}$$

Здесь $\overset{0}{e}_{ij}$ — компоненты тензора дисторсии; $\overset{s}{e}_{ij}$ — компоненты тензора упругой деформации, вызванные действием собственных напряжений σ_{ij} так, что

$$\overset{s}{e}_{ij} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\,\sigma_{\alpha\alpha}\delta_{ij}\right), \tag{2}$$

где G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; δ_{ij} — символ Кронекера.

Рассмотрим тонкую оболочку, отнесенную к триортогональной системе координатных линий (α_1, α_2, γ), являющихся соответственно линиями главных кривизн срединной поверхности и внешней нормалью к ней. Для такой оболочки в соответствии с допущениями классической теории Кирхгофа — Лява

$$e_{13} = e_{23} = e_{33} = 0, \ \sigma_{33} = 0 \tag{3}$$

на основании соотношений (1) имеем

$$e_{ij} = \overset{s}{e}_{ij} + \overset{0}{e}_{ij} \qquad (i,\ j = 1,\ 2). \tag{4}$$

При этом компоненты упругой деформации $\overset{s}{e}_{ij}$ связаны с напряжениями соотношениями

$$\overset{s}{e}_{ii} = \frac{1}{E}\,(\sigma_{ii} - \nu\sigma_{jj}), \quad i \neq j = 1,\ 2, \quad \overset{s}{e}_{12} = \frac{2(1+\nu)}{E}\,\sigma_{12}, \tag{5}$$

где E — модуль Юнга. Индексы 1, 2, 3 соответствуют индексам α_1, α_2, γ.

Решая уравнение (5) относительно компонентов напряжений и используя соотношения (4), находим

$$\sigma_{ii} = \frac{E}{1-\nu^2}\,[(e_{ii} + \nu e_{jj}) - (\overset{0}{e}_{ii} + \nu\overset{0}{e}_{jj})] \qquad (i \neq j = 1,\ 2),$$
$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}\,(e_{12} - \overset{0}{e}_{12}). \tag{6}$$

Формулы, связывающие компоненты деформации e_{ij} в произвольной точке оболочки с компонентами деформации ее срединной поверхности, запишем в виде [2, 17]

$$e_{jj} = \frac{\varepsilon_{jj} + \varkappa_{jj}\gamma}{1 + k_j\gamma} \quad (j = 1,\ 2), \quad e_{12} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\omega_i + \tau_i\gamma}{1 + k_i\gamma}, \tag{7}$$

где

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{v}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + k_1 w; \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{u}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + k_2 w;$$

$$\varkappa_{11} = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\theta_2}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}; \quad \varkappa_{22} = -\frac{1}{A_2}\frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\theta_1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1};$$

$$\theta_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - k_1 u; \quad \theta_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - k_2 v; \tag{8}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}; \quad \omega_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1};$$

$$\tau_1 = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\theta_1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2}; \quad \tau_2 = -\frac{1}{A_2}\frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\theta_2}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1};$$

A_1, A_2, u, v, w, k_1, k_2 — соответственно коэффициенты Ляме, перемещения и главные кривизны срединной поверхности оболочки; θ_1, θ_2 — углы поворота нормали к срединной поверхности.

Используя соотношения (6) — (8), для удельной работы деформации тонкой оболочки [3, 17] получаем выражение

$$V = \frac{Eh}{1 - \nu^2}\left\{(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 - 2(1 - \nu)\left(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \frac{1}{4}\varepsilon_{12}^2\right) + \frac{h^2}{3}\left[(\varkappa_{11} + \varkappa_{22})^2 - \right.\right.$$
$$- 2(1 - \nu)(\varkappa_{11}\varkappa_{22} - \varkappa_{12}^2)] - 2\left[\varepsilon_{11}(\overset{0}{\varepsilon}_{11} + \nu\overset{0}{\varepsilon}_{22}) + \varepsilon_{22}(\overset{0}{\varepsilon}_{22} + \nu\overset{0}{\varepsilon}_{11}) + \right.$$
$$\left. + \frac{1 - \nu}{2}\varepsilon_{12}\overset{0}{\varepsilon}_{12}\right] - \frac{2h^2}{3}\left[\varkappa_{11}(\overset{0}{\varkappa}_{11} + \nu\overset{0}{\varkappa}_{22}) + \varkappa_{22}(\overset{0}{\varkappa}_{22} + \nu\overset{0}{\varkappa}_{11}) + 2(1 - \nu) \times \right.$$
$$\left.\left. \times\ \varkappa_{12}\overset{0}{\varkappa}_{12}\right]\right\}, \tag{9}$$

где

$$\varepsilon_{12} = \omega_1 + \omega_2; \quad \varkappa_{12} = \tau_1 + k_1\omega_2 = \tau_2 + k_2\omega_1;$$
$$\overset{0}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \overset{0}{e}_{ij}\,d\gamma \qquad (i,\ j = 1,\ 2); \tag{10}$$
$$\overset{0}{\varkappa}_{jj} = \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} e_{jj}\gamma\,d\gamma \ (j = 1,\ 2); \quad 2\overset{0}{\varkappa}_{12} = \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} \overset{0}{e}_{12}\gamma\,d\gamma;$$

h — полутолщина оболочки.

На основании выражения для удельной работы (9) и ее дифференциала [17]

$$dV = N_1 d\varepsilon_{11} + S_{12} d\varepsilon_{12} + N_2 d\varepsilon_{22} + M_1 d\varkappa_{11} + 2H_{12} d\varkappa_{12} + M_2 d\varkappa_{22}$$

устанавливаем связь между усилиями N_1, N_2, S_{12}, моментами M_1, M_2, H_{12}, компонентами деформации срединной поверхности ε_{ij}, $\varkappa_{ij}$ и компонентами тензора дисторсии $\overset{0}{\varepsilon}_{ij}$, $\overset{0}{\varkappa}_{ij}$:

$$N_i = B\left[\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj} - (\overset{0}{\varepsilon}_{ii} + \nu\overset{0}{\varepsilon}_{jj})\right],$$
$$M_i = D_1\left[\varkappa_{ii} + \nu\varkappa_{jj} - (\overset{0}{\varkappa}_{ii} + \nu\overset{0}{\varkappa}_{jj})\right] \quad (i \neq j = 1,\ 2), \tag{11}$$
$$S_{12} = \frac{B}{2}(1 - \nu)(\varepsilon_{12} - \overset{0}{\varepsilon}_{12}), \quad H_{12} = D_1(1 - \nu)(\varkappa_{12} - \overset{0}{\varkappa}_{12}),$$

где

$$B = \frac{2Eh}{1-\nu^2}; \quad D_1 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}.$$

Используя выражения (11), компоненты деформации срединной поверхности представим в виде

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^s + \varepsilon_{ij}^0, \quad \varkappa_{ij} = \varkappa_{ij}^s + \varkappa_{ij}^0. \tag{12}$$

Здесь

$$\begin{gathered} \varepsilon_{ii}^s = \frac{1}{2Eh}(N_i - \nu N_j), \quad \varkappa_{ii}^s = \frac{3}{2Eh^3}(M_i - \nu M_j) \quad i \neq j = 1, 2; \\ \varepsilon_{12}^s = \frac{1+\nu}{Eh} S_{12}, \quad \varkappa_{12}^s = \frac{3}{2Eh^3}(1+\nu) H_{12}. \end{gathered} \tag{13}$$

Введем дифференциальные операторы L_{ij}^0, L_{33}^0, действующие на некоторые функции Φ_k, следующим образом:

$$\begin{gathered} L_{ij}^0(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, \Phi_6) = \frac{\partial}{\partial\alpha_i}(A_j\Phi_1) - \frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\Phi_2 + \frac{\partial}{\partial\alpha_j}(A_i\Phi_3) + \\ + k_i\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_i}(A_j\Phi_4) - \frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\Phi_5 + 2\frac{\partial}{\partial\alpha_i}(A_i\Phi_6) + 2\frac{k_j}{k_i}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Phi_6\right], \quad i = j = 1, 2, \end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} L_{33}^0(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5) = k_1\Phi_1 + k_2\Phi_2 - \frac{1}{A_1A_2}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2\Phi_3) - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\Phi_4 + \right.\right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1\Phi_5) + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\Phi_5\right] + \\ \left.+ \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{1}{A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1\Phi_4) - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\Phi_3 + \frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_1\Phi_5) + \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\Phi_5\right]\right\}. \end{gathered}$$

Тогда уравнения равновесия и совместности деформаций в усилиях и моментах можно представить в виде

$$\begin{gathered} L_{ij}^0(N_i, N_j, S_{ij}, M_i, M_j, H_{ij}) = -A_iA_jX_i, \quad i \neq j = 1, 2, \\ L_{33}^0(N_1, N_2, M_1, M_2, H_{12}) = Z, \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} L_{ij}^0\left(\varkappa_{jj}^s, \varkappa_{ii}^s, -\varkappa_{ij}^s, -\varepsilon_{jj}^s, -\varepsilon_{ii}^s, \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}^s\right) = \\ = -L_{ij}^0\left(\varkappa_{jj}^0, \varkappa_{ii}^0, -\varkappa_{ij}^0, \varepsilon_{jj}^0, -\varepsilon_{ii}^0, \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}^0\right), \quad i \neq j = 1, 2, \\ L_{33}^0\left(\varkappa_{22}^s, \varkappa_{11}^s, -\varepsilon_{22}^s, -\varepsilon_{11}^s, \frac{1}{2}\varepsilon_{12}^s\right) = -L_{33}^0\left(\varkappa_{22}^0, \varkappa_{11}^0, -\varepsilon_{22}^0, -\varepsilon_{11}^0, \frac{1}{2}\varepsilon_{12}^0\right), \end{gathered} \tag{16}$$

где ε_{ij}^s, $\varkappa_{ij}^s$ выражаются через усилия и моменты по формулам (13); X_i, Z—компоненты вектора интенсивности заданной внешней поверхностной нагрузки.

Если в уравнения (15) подставить выраженные через перемещения с помощью соотношений (8), (10) усилия и моменты (11), получим систему уравнений равновесия оболочки, находящейся под действием поля дисторсий, в перемещениях:

$$\begin{gathered} L_{ij}^{(1)}u + L_{ij}^{(2)}v + L_{ij}^{(3)}w = L_{ij}^0\,[B(\varepsilon_{ii}^0 + \nu\varepsilon_{jj}^0),\ B(\varepsilon_{jj}^0 + \nu\varepsilon_{ii}^0),\ \frac{B}{2}(1-\nu)\varepsilon_{12}^0, \\ D_1(\varkappa_{ii}^0 + \nu\varkappa_{jj}^0),\ D_1(\varkappa_{jj}^0 + \nu\varkappa_{ii}^0),\ D_1(1-\nu)\varkappa_{12}^0], \quad i \neq j = 1, 2, \\ L_{33}^{(1)}u + L_{33}^{(2)}v + L_{33}^{(3)}w = L_{33}\,[B(\varepsilon_{11}^0 + \nu\varepsilon_{22}^0),\ B(\varepsilon_{22}^0 + \nu\varepsilon_{11}^0), \\ D_1(\varkappa_{11}^0 + \nu\varkappa_{22}^0),\ D_1(\varkappa_{22}^0 + \nu\varkappa_{11}^0),\ D_1(1-\nu)\varkappa_{12}^0]. \end{gathered} \tag{17}$$

Здесь $L_{ij}^{(s)}$, $L_{33}^{(s)}$ $(s = 1, 2, 3)$ — дифференциальные операторы не выше четвертого порядка с переменными коэффициентами. Для круговой цилиндрической оболочки $\left(A_1 = A_2 = R,\ k_1 = 0,\ k_2 = \frac{1}{R}\right)$ система уравнений (17) принимает вид

$$L_{k1}u + L_{k2}v + L_{k3}w = g_k \quad (k = 1, 2, 3), \tag{18}$$

где

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2};\ L_{12} = L_{21} = \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2};\ L_{13} = L_{31} = \nu\frac{\partial}{\partial\alpha_1};$$

$$L_{22} = \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2} + c_1^2\left[2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}\right];$$

$$L_{23} = L_{32} = \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left\{1 - c_1^2\left[(2-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}\right]\right\};$$

$$L_{33} = 1 + c_1^2\nabla^2\nabla^2;\quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2};\quad c_1^2 = \frac{h^2}{3R^2}; \tag{19}$$

$$g_1 = R\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\varepsilon_{11}^0 + \nu\varepsilon_{22}^0) + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial\varepsilon_{12}^0}{\partial\alpha_2}\right];\quad g_2 = R\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\varepsilon_{22}^0 + \nu\varepsilon_{11}^0) + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial\varepsilon_{12}^0}{\partial\alpha_1}\right] + \frac{h^2}{3}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\varkappa_{22}^0 + \nu\varkappa_{11}^0) + 2(1-\nu)\frac{\partial\varkappa_{12}^0}{\partial\alpha_1}\right];$$

$$g_3 = R(\varepsilon_{22}^0 + \nu\varepsilon_{11}^0) - \frac{h^2}{3}\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}(\varkappa_{11}^0 + \nu\varkappa_{22}^0) + \right.$$

$$\left. + 2(1-\nu)\frac{\partial^2\varkappa_{12}^0}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} + \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}(\varkappa_{22}^0 + \nu\varkappa_{11}^0)\right];$$

R — радиус срединной поверхности оболочки.

Учитывая структуру уравнений (15), (16), введем в рассмотрение, следуя В. В. Новожилову [9] и К. Ф. Черных [19], комплексные усилия и моменты

$$\begin{gathered}\tilde N_1 = N_1 - iD_0a\varkappa_{22}^s,\ \tilde N_2 = N_2 - iD_0a\varkappa_{11}^s,\ \tilde S_{12} = S_{12} + iD_0a\varkappa_{12}^s,\\ \tilde M_1 = M_1 + iD_0a\varepsilon_{22}^s,\ \tilde M_2 = M_2 + iD_0a\varepsilon_{11}^s,\ \tilde H_{12} = H_{12} - iD_0a\frac{\varepsilon_{12}^s}{2},\end{gathered} \tag{20}$$

где $i = \sqrt{-1}$; $a = h/\sqrt{3(1-\nu^2)}$; $D_0 = 2Eh$. Очевидно, что

$$\begin{gathered}N_1 = \operatorname{Re}\tilde N_1,\ N_2 = \operatorname{Re}\tilde N_2,\ S_{12} = \operatorname{Re}\tilde S_{12},\\ \varkappa_{11}^s = -\frac{1}{D_0a}\operatorname{Im}\tilde N_2,\ \varkappa_{22}^s = -\frac{1}{D_0a}\operatorname{Im}N_1,\ \varkappa_{12}^s = \frac{1}{D_0a}\operatorname{Im}\tilde S_{12}.\end{gathered} \tag{21}$$

На основании этих выражений и соотношений (11) — (13) записываем

$$\begin{gathered}M_i = -a\operatorname{Im}(\tilde N_j + \nu\tilde N_i),\ \varepsilon_{ii}^s = \frac{1}{D_0}\operatorname{Re}(\tilde N_i - \nu\tilde N_j),\quad i \neq j = 1, 2,\\ H_{12} = a(1-\nu)\operatorname{Im}\tilde S_{12},\ \varepsilon_{12}^s = \frac{2(1+\nu)}{D_0}\operatorname{Re}\tilde S_{12}.\end{gathered} \tag{22}$$

Умножив каждое из уравнений совместности (16) на $-iD_0a$ и сложив их с уравнениями равновесия, получим систему уравнений в комплексных усилиях и моментах:

$$L^0_{kj}(\tilde N_k, \tilde N_i, \tilde S_{kj}, \tilde M_k, \tilde M_j, \tilde H_{kj}) = -A_kA_jX_k +$$
$$+ iD_0a\left(\varkappa^0_{jj}, \varkappa^0_{kk}, -\varkappa^0_{kj}, \varepsilon^0_{jj}, -\varepsilon^0_{kk}, \frac{1}{2}\varepsilon^0_{kj}\right), \quad k\neq j=1,2, \tag{23}$$
$$L^0_{33}(\tilde N_1, \tilde N_2, \tilde M_1, \tilde M_2, \tilde H_{12}) = Z + iD_0aL^0_{33}\left(\varkappa^0_{22}, \varkappa^0_{11}, -\varepsilon^0_{12}, -\varepsilon^0_{11}, \frac{\varepsilon^0_{12}}{2}\right).$$

Если теперь заменить в этих уравнениях комплексные моменты их выражениями через усилия (22) и ввести комплексную функцию Новожилова, после преобразований, аналогичных [19], получим систему уравнений в комплексных усилиях. Так, для круговой цилиндрической оболочки, находящейся под действием поля дисторсий, основное комплексное уравнение имеет вид

$$\left(\nabla^2\nabla^2 + \underline{\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}} + i2b^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}\right)\tilde N = -D_0\left\{(\nabla^2 \underline{+ 1 + i\mu\nabla^2})\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}\varepsilon^0_{11} -\right.\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\varepsilon^0_{12}\right) + \nabla^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}\varepsilon^0_{22} + R\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2} - i\mu\nabla^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}\right)\varkappa^0_{11} +\right.$$
$$\left.\left. + 2i\mu\nabla^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\varkappa^0_{12} + (1 - i\mu\nabla^2)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}\varkappa^0_{22}\right]\right\}, \tag{24}$$

где $2b^2 = \frac{R}{a}$, $\mu = \frac{1-\nu}{2b^2}$. При этом комплексные усилия $\tilde N_1$ и $\tilde N_2$ выражаются через основную функцию $\tilde N$ соотношениями

$$\tilde N_2 = \frac{i}{2b^2}\nabla^2\tilde N + \frac{iD_0}{2b^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}\varepsilon^0_{22} + (1 \underline{+ i\mu})\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}\varepsilon^0_{11} - (1 + i\mu)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\varepsilon^0_{12} +\right.$$
$$\left. + R\left(1 - i\mu\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}\right)\varkappa^0_{11} - i\mu R\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}\varkappa^0_{22} - 2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\varkappa^0_{12}\right)\right], \quad \tilde N_1 = \tilde N - \tilde N_2. \tag{25}$$

Выражения для производных функции $\tilde S_{12}$ имеют вид

$$\frac{\partial\tilde S_{12}}{\partial\alpha_1} = -\frac{\partial\tilde N_2}{\partial\alpha_2} - \underline{\frac{ia}{R}\frac{\partial\tilde N}{\partial\alpha_2}} + iD_0a\left[\frac{\partial\varkappa^0_{11}}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial\varkappa^0_{12}}{\partial\alpha_1} - \underline{\frac{1}{R}\left(\frac{\partial\varepsilon^0_{11}}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial\varepsilon^0_{12}}{\partial\alpha_1}\right)}\right],$$
$$\frac{\partial\tilde S_{12}}{\partial\alpha_2} = -\frac{\partial\tilde N_1}{\partial\alpha_1} + iD_0a\left(\frac{\partial\varkappa^0_{22}}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial\varkappa^0_{12}}{\partial\alpha_2}\right). \tag{26}$$

Нетрудно проверить, что они совместны в силу основного уравнения (24).

Пренебрегая в приведенных выше выражениях подчеркнутыми членами, приходим к соотношениям технической теории [2] цилиндрических оболочек.

В теории оболочек с дисторсиями важную роль играет теорема взаимности. Если рассмотреть два различных напряженно-деформированных состояния оболочки, обусловленных двумя системами внешних усилий и полей дисторсий $e^{0'}_{ij}$ и $e^{0''}_{ij}$, нетрудно убедиться в справедливости следующего соотношения:

$$A^0_{12} + \frac{2Eh}{1-\nu^2}\iint_G\left\{\varepsilon''_{11}(\varepsilon^{0'}_{11} + \nu\varepsilon^{0'}_{22}) + \varepsilon''_{22}(\varepsilon^{0'}_{22} + \nu\varepsilon^{0'}_{11}) +\right.$$
$$+ \frac{1-\nu}{2}\varepsilon''_{12}\varepsilon^{0'}_{12} + \frac{h^2}{3}\left[\varkappa''_{11}(\varkappa^{0'}_{11} + \nu\varkappa^{0'}_{22}) + \varkappa''_{22}(\varkappa^{0'}_{22} + \nu\varkappa^{0'}_{11}) +\right.$$
$$\left.\left.+ \varkappa''_{12}\varkappa^{0'}_{12}\right]\right\}A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2 = A^0_{21} + \frac{2Eh}{1-\nu^2}\iint_G\left\{\varepsilon'_{11}(\varepsilon^{0''}_{11} + \nu\varepsilon^{0''}_{22}) +\right.$$

$$+ \varepsilon_{22}'(\varepsilon_{22}^{0''} + \nu\varepsilon_{11}^{0''}) + \frac{1-\nu}{2}\varepsilon_{12}'\varepsilon_{12}^{0''} + \frac{h^2}{3}[\varkappa_{11}'(\varkappa_{11}^{0''} + \nu\varkappa_{22}^{0''}) +$$

$$+ \varkappa_{22}'(\varkappa_{22}^{0''} + \nu\varkappa_{11}^{0''}) + \varkappa_{12}'\varkappa_{12}^{0''}]\Big\} A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2. \qquad (27)$$

Здесь A_{12}^0 (A_{21}^0) — работа внешней нагрузки первого (второго) состояния на перемещениях второго (первого) [17].

Соотношение (27) представляет собой обобщение принципа взаимности Бетти на случай, когда наряду с действием внешних нагрузок напряженное состояние оболочки обусловлено также заданным полем дисторсии. На основании этого соотношения можно получить в квадратурах решение задачи о напряженно-деформированном состоянии оболочки, обусловленном заданным тензором дисторсии, если известно решение соответствующей задачи в случае сосредоточенной поверхностной нагрузки.

Изотропные оболочки с разрезами (трещинами). Рассмотрим упругое равновесие тонкой оболочки с системой сквозных разрезов (длины разрезов велики по сравнению с толщиной оболочки), произвольным образом расположенных вдоль координатных линий. Предположим, что оболочка находится под действием внешней нагрузки и к противоположным берегам разрезов приложены равные по величине и противоположно направленные усилия и моменты. Напряженное состояние такой оболочки можно представить в виде суммы напряженного состояния, вызванного внешней нагрузкой в оболочке без разрезов, и возмущенного — вызванного наличием разрезов (трещин). Напряженное состояние в оболочке без трещин будем считать известным. Граничные условия на контуре разреза $l_{p\nu}$, расположенного вдоль линии $\alpha_1 = \alpha_p^0$, в таком случае имеют вид

$$\begin{gathered} N_1^+ = N_1^- = \hat{N}_1^{l_{p\nu}}(\alpha_2), \;\; S_{12}^+ + 2k_2H_{12}^+ = S_{12}^- + 2k_2H_{12}^- = \hat{S}^{l_{p\nu}}(\alpha_2), \\ Q_1^+ + \frac{1}{A_2}\frac{\partial H_{12}^+}{\partial\alpha_1} = Q_1^- + \frac{1}{A_2}\frac{\partial H_{12}^-}{\partial\alpha_1} = \hat{Q}_1^{*l_{p\nu}}(\alpha_2), \;\; M_1^+ = M_1^- = \hat{M}_1^{l_{p\nu}}(\alpha_2), \end{gathered} \qquad (28)$$

где Q_1 — перерезывающее усилие; $\hat{N}_1^{l_{p\nu}}(\alpha_2)$, $\hat{S}^{l_{p\nu}}(\alpha_2)$, $\hat{Q}_1^{*l_{p\nu}}(\alpha_2)$, $\hat{M}_1^{l_{p\nu}}(\alpha_2)$ — заданные при $\alpha_2 \in l_{p\nu}$ функции; знаками «+» и «—» отмечены граничные значения функций на берегах разреза $\alpha_p^0 + 0$ и $\alpha_p^0 - 0$ соответственно. Аналогично на контуре разреза q_{rs}, расположенного вдоль линии $\alpha_2 = \alpha_r^0$, получаем

$$\begin{gathered} N_2^+ = N_2^- = \hat{N}_2^{q_{rs}}(\alpha_1), \;\; S_{12}^+ + 2k_1H_{12}^+ = S_{12}^- + 2k_1H_{12}^- = \hat{S}^{q_{rs}}(\alpha_1), \\ Q_2^+ + \frac{1}{A_1}\frac{\partial H_{12}^+}{\partial\alpha_1} = Q_2^- + \frac{1}{A_1}\frac{\partial H_{12}^-}{\partial\alpha_1} = \hat{Q}_1^{*q_{rs}}(\alpha_1), \;\; M_2^+ = M_2^- = \hat{M}_2^{q_{rs}}(\alpha_1). \end{gathered} \qquad (29)$$

Пусть k — общее количество разрезов (трещин) в оболочке. Если обозначить через μ_1 и μ_2 количество линий $\alpha_1 = \alpha_p^0$ и $\alpha_2 = \alpha_r^0$, вдоль каждой из которых расположено m_p и n_r разрезов соответственно, то

$$k = k_1 + k_2, \;\; k_1 = \sum_{p=1}^{\mu_1} m_p, \;\; k_2 = \sum_{r=1}^{\mu_2} n_r.$$

Рассмотрим наряду с оболочкой с разрезами идентичную оболочку с сосредоточенными на месте линий разрезов дисторсиями. При этом будем требовать такого распределения плотностей дисторсий вдоль указанных линий, чтобы обусловленное ими напряженно-деформированное состояние тождественно совпадало с напряженно-деформированным состоянием в оболочке с разрезами. Тогда, учитывая, что перемещение u, v, w и углы поворота θ_1, θ_2 претерпевают скачки при переходе через линии разрезов, и рассматривая их как обобщенные функции [1], на основании соотношений (8), (10), (11), (28), (29) для компонентов тензора дисторсий получаем выражения

$$\varepsilon_{11}^0 = \sum\nolimits_1 \frac{1}{A_1^p} [u(\alpha_2)]_{l_{p\nu}} \delta(\alpha_1 - \alpha_p^0), \quad \varepsilon_{22}^0 = \sum\nolimits_2 \frac{1}{A_2^r} [v(\alpha_1)]_{q_{rs}} \delta(\alpha_2 - \alpha_r^0),$$

$$\varepsilon_{12}^0 = \sum\nolimits_1 \frac{1}{A_1^p} [v(\alpha_2)]_{l_{p\nu}} \delta(\alpha_1 - \alpha_p^0) + \sum\nolimits_2 \frac{1}{A_2^r} [u(\alpha_1)]_{q_{rs}} \delta(\alpha_2 - \alpha_r^0),$$

$$\varkappa_{11}^0 = -\sum\nolimits_1 \frac{1}{A_1} \left\{ [\theta_1(\alpha_2)]_{l_{p\nu}} \delta(\alpha_1 - \alpha_p^0) + \frac{1}{A_1^p} [w(\alpha_2)]_{l_{p\nu}} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \delta(\alpha_1 - \alpha_p^0) \right\} -$$

$$- \sum\nolimits_2 \frac{1}{A_1^r (A_2^r)^2} \frac{\partial A_1^r}{\partial \alpha_2} [w(\alpha_1)]_{q_{rs}} \delta(\alpha_2 - \alpha_r^0), \tag{30}$$

$$\varkappa_{22}^0 = -\sum\nolimits_2 \frac{1}{A_2} \left\{ [\theta_2(\alpha_1)]_{q_{rs}} \delta(\alpha_2 - \alpha_r^0) + \frac{1}{A_2^r} [w(\alpha_1)]_{q_{rs}} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \delta(\alpha_2 - \alpha_r^0) \right\} -$$

$$- \sum\nolimits_1 \frac{1}{(A_1^p)^2 A_2^p} \frac{\partial A_2^p}{\partial \alpha_1} [w(\alpha_2)]_{l_{p\nu}} \delta(\alpha_1 - \alpha_p^0),$$

$$\varkappa_{12}^0 = -\sum\nolimits_1 \left\{ \frac{1}{A_2^p} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_1^p} [w(\alpha_2)]_{l_{p\nu}} - \frac{k_2^p}{A_1^p} [v(\alpha_2)]_{l_{p\nu}} \right\} \delta(\alpha_1 - \alpha_p^0) -$$

$$- \sum\nolimits_2 \left\{ \frac{1}{A_1^r} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_2^r} [w(\alpha_1)]_{q_{rs}} - \frac{k_1^r}{A_2^r} [u(\alpha_1)]_{q_{rs}} \right\} \delta(\alpha_2 - \alpha_r^0).$$

Здесь и далее

$$[f(\alpha_2)]_{l_{p\nu}} = f_{l_{p\nu}}^+ (\alpha_p^0 + 0, \alpha_2) - f_{l_{p\nu}}^- (\alpha_p^0 - 0, \alpha_2) \ \forall \alpha_2 : \alpha_2 \in l_{p\nu},$$

$$[f(\alpha_2)]_{l_{p\nu}} = 0 \ \forall \alpha_2 : \alpha_2 \notin l_{p\nu}, \tag{31}$$

$$[f(\alpha_1)]_{q_{rs}} = f_{q_{rs}}^+ (\alpha_1, \alpha_r^0 + 0) - f_{q_{rs}}^- (\alpha_1, \alpha_r^0 - 0) \ \forall \alpha_1 : \alpha_1 \in q_{rs},$$

$[f(\alpha_1)]_{q_{rs}} = 0 \ \forall \alpha_1 : \alpha_1 \notin q_{rs}$ $(f = u, v, w, \theta_1, \theta_2)$ — скачки перемещений и углов поворота при переходе через контуры разрезов $l_{p\nu}$ и q_{rs} соответственно,

$$A_j^p = A_j|_{\alpha_1 = \alpha_p^0}, \quad A_j^r = A_j|_{\alpha_2 = \alpha_r^0} \ (j = 1, 2), \quad k_1^r = k_1|_{\alpha_2 = \alpha_r^0},$$

$$k_2^p = k_2|_{\alpha_1 = \alpha_p}, \quad \sum\nolimits_1 = \sum_{p=1}^{\mu_1} \sum_{\nu=1}^{m_p}, \quad \sum\nolimits_2 = \sum_{r=1}^{\mu_2} \sum_{s=1}^{n_r},$$

$\delta(\alpha - \alpha_j^0)$ — функция Дирака.

Подставив выражение (30) в уравнения (15) — (17), получим систему разрешающих дифференциальных уравнений в усилиях, моментах и перемещениях, учитывающих наличие в оболочках разрезов (трещин). Рассмотрим далее такую систему уравнений, записанных в перемещениях. Обозначим через

$$U_{p\nu}^{i*} (U_{p\nu}^{1*} = u_{p\nu}^*, \ U_{p\nu}^{2*} = v_{p\nu}^*, \ U_{p\nu}^{3*} = w_{p\nu}^*), \quad U_{rs}^{i*} (U_{rs}^{1*} = u_{rs}^*, \ U_{rs}^{2*} = v_{rs}^*, \ U_{rs}^{3*} = w_{rs}^*)$$

решение этой системы в случае, когда в правых частях уравнений вместо скачков перемещений и углов поворота на линиях $l_{p\nu}$ и q_{rs} заданы соответствующие сосредоточенные факторы. Тогда формулы для определения перемещений в произвольной точке оболочки, вызванных скачками перемещений и углов поворота на линиях разрезов, могут быть записаны в квадратурах

$$U^i(\alpha_1, \alpha_2) = \sum\nolimits_1 \int_{l_{p\nu}} U_{p\nu}^{i*} (\alpha_1, \alpha_2, \zeta_{p\nu}) [f(\zeta_{p\nu})]_{l_{p\nu}} d\zeta_{p\nu} +$$

$$+ \sum\nolimits_2 \int_{q_{rs}} U_{rs}^{i*} (\alpha_1, \alpha_2, \zeta_{rs}) [f(\zeta_{rs})]_{q_{rs}} d\zeta_{rs} \ (U^1 = u, U^2 = v, U^3 = w). \tag{32}$$

На основании выражений для перемещений (32) по соответствующим формулам определяем усилия и моменты в оболочке, вызванные произвольным распределением скачков перемещений и углов поворота вдоль разрезов. Если затем к найденным величинам усилий и моментов прибавить их значения в оболочке без разрезов и требовать, чтобы суммарные величины удовлетворяли заданным на берегах разрезов условиям (28), (29), получим систему $4k$ сингулярных интегральных уравнений для нахождения функций, определяющих скачки перемещений и углов поворота. Таким образом, задача об упругом равновесии оболочки с разрезами сводится к решению системы интегральных уравнений.

Пример 1. *Цилиндрическая оболочка с периодической системой параллельных разрезов (трещин).* Рассмотрим замкнутую бесконечную цилиндрическую оболочку с системой k параллельных периодически расположенных продольных разрезов ($|\alpha| \leqslant \alpha_0$, $\beta = 2n\frac{\pi}{k}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\frac{k}{2}$ при k четном, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\frac{k-1}{2}$ при k нечетном), центры которых находятся на окружности $\alpha = 0$. Здесь $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \alpha_2$, $\alpha_0 = l/R$ (l — полудлина разреза).

Предположим, что напряженно-деформированное состояние оболочки без разрезов (трещин) осесимметрично и берега разрезов свободны от нагрузок. Тогда напряженное состояние оболочки с k разрезами будет циклически симметричным. С учетом этого далее будем рассматривать цилиндрическую панель $|\beta| \leqslant \frac{\pi}{k}$ с трещиной $|\alpha| \leqslant \alpha_0$, $\beta = 0$. В этом случае поле дисторсий (30) принимает вид

$$\begin{gathered}\varepsilon_{11}^0 = \varepsilon_{12}^0 = \varkappa_{11}^0 = \varkappa_{12}^0 = 0,\\ \varepsilon_{22}^0 = \frac{1}{R}[v(\alpha)]\,\delta(\beta),\quad \varkappa_{22}^0 = -\frac{1}{R}[\theta_2(\alpha)]\,\delta(\beta),\end{gathered} \tag{33}$$

где

$$\begin{gathered}[v(\alpha)] = v^+(\alpha, +0) - v^-(\alpha, -0)\ \forall\alpha : |\alpha| < \alpha_0;\\ [\theta_2(\alpha)] = \theta_2^+(\alpha, +0) - \theta_2^-(\alpha, 0)\ \forall\alpha : |\alpha| < \alpha_0;\\ [v(\alpha)] = [\theta_2(\alpha)] = 0 \quad \forall\alpha : |\alpha| \geqslant \alpha_0.\end{gathered}$$

Подставляя теперь выражения (33) в (19), а затем полученные соотношения для g_k — в систему уравнений (18) и учитывая условия циклической симметрии

$$v = 0,\quad \frac{\partial w}{\partial\beta} = 0 \ \text{при}\ \beta \pm \frac{\pi}{k},$$

решение этих уравнений, затухающее на бесконечности, записываем в виде

$$f = R\,(L_{2f}\varphi_2 + P_{2f}\Psi_2),\quad f = u, v, w. \tag{34}$$

Здесь

$$\begin{gathered}L_{2u} = \partial_1[(\nu\partial_1^2 - \partial_2^2)\nabla^2\nabla^2 - L\partial_2^2],\ P_{2u} = \partial_1(\nu^2\partial_1^4 - \partial_2^4 - \partial_2^2) -\\ - c_1^2(1-\nu^2)\,\partial_1^5\partial_2^2;\quad L_{2v} = \partial_2 P\nabla^2\nabla^2 + \partial_2\{\partial_2^2 P + 2\partial_1^2[L + \nu(2-\nu)\,\partial_1^2]\};\\ P_{2v} = \partial_2(P_1 P + P + \nu\partial_1^2) + c_1^2(1-\nu)\,\partial_1^4\partial_2(\nabla^2 + \partial_1^2 - \nu\partial_2^2);\\ L_{2w} = c^{-2}\partial_1^4 + \partial_2^2[(4-\nu^2)\,\partial_1^4 + (4\partial_1^2 + \partial_2^2)(\partial_2^2 + 1)];\\ P_{2w} = -P_1\nabla^2\nabla^2 - P\partial_2^2;\quad L = (2-\nu)\,\partial_1^2 + \partial_2^2;\quad P_1 = \nu\partial_1^2 + \partial_2^2;\\ P = (2+\nu)\,\partial_1^2 + \partial_2^2;\quad \partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial\alpha};\quad \partial_2 \equiv \frac{\partial}{\partial\beta};\quad c^2 = \frac{c_1^2}{1-\nu^2};\end{gathered} \tag{35}$$

$$\varphi_2(\alpha, \beta) = \frac{k}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cos kn\beta \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [v(\zeta)] \Phi_n(\zeta - \alpha)\, d\zeta;$$

$$\Psi_2(\alpha, \beta) = -\frac{k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cos kn\beta \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [\theta_2(\zeta)] \Phi_n(\zeta - \alpha)\, d\zeta;$$

функции $\Phi_n(\zeta - \alpha)$ имеют вид

$$\Phi_0(z) = -\frac{1}{16a_{20}^4}\left[\frac{1}{2a_{20}^3} e^{-a_{20}|z|} (\cos a_{20}z + \sin a_{20}|z|) - \frac{|z|^3}{3}\right],$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2(P_{21}^2 + q_{21}^2)} \left\{ \frac{e^{-a_{21}|z|}}{q_{21}(a_{21}^2 + b_{21}^2)} \left[(b_{21}(P_{21}^2 - q_{21}^2) + 2a_{21}P_{21}q_{21}) \cos b_{21}z + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (a_{21}(P_{21}^2 - q_{21}^2) - 2b_{21}q_{21}P_{21}) \sin b_{21}|z|\right] + 2\left(\frac{P_{21}^2 + q_{21}^2}{12} z^2 + P_{21}\right)|z|\right\}, \quad k = 1,$$

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{X_n} \sum_{j=1}^{2} \frac{e^{-a_{jn}|z|}}{q_{jn}(a_{jn}^2 + b_{jn}^2)} [(b_{jn}C_{jn} - a_{jn}B_{jn}) \cos b_{jn}z +$$

$$+ (a_{jn}C_{jn} + b_{jn}B_{jn}) \sin b_{jn}|z|], \quad n \geqslant 2; \quad X_n = 2(C_{1n}^2 + B_{1n}^2),$$

$$C_{1n} = (P_{2n} - P_{1n})^2 + q_{2n}^2 - q_{1n}^2, \quad B_{1n} = 2(P_{2n} - P_{1n})q_{1n}, \quad C_{2n} = (P_{1n} - P_{2n})^2 +$$

$$+ q_{1n}^2 - q_{2n}^2, \quad B_{2n} = 2(P_{1n} - P_{2n})q_{2n},$$

$$P_{jn} = a_{jn}^2 - b_{jn}^2, \quad q_{jn} = 2a_{jn}b_{jn}, \quad \lambda_0 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_n = 1\ (n \geqslant 1),$$

a_{jn}, b_{jn} — соответственно мнимая и действительная части корней характеристического уравнения

$$s^8 + 4k^2n^2s^6 + (6k^4n^4 - c^{-2}) s^4 + 4k^2n^2(k^2n^2 - 1)^2 + k^4n^4(k^2n^2 - 1)^2 = 0. \quad (36)$$

Выражение для $\Phi_1(\alpha)$ при $k > 1$ имеет аналогичный $\Phi_n(\alpha)$ при $n \geqslant 2$ вид, поскольку в этом случае уравнение (36) при $n = 1$ не имеет нулевых корней.

Подставляя выражение для перемещений (34) в формулы для определения усилий и моментов (11), записанные с помощью соотношений (8), (10) через перемещения, находим усилия и моменты в оболочке, вызванные произвольным распределением скачков перемещений $[v]$ и углов поворота $[\theta_2]$ на линиях разрезов. Если к найденным усилиям и моментам прибавить усилия и моменты в оболочке без разрезов и потребовать, чтобы суммарные величины удовлетворяли условиям свободных берегов разрезов

$$N_2(\alpha, 0) + N_2^0(\alpha, 0) = 0, \quad M_2(\alpha, 0) + M_2^0(\alpha, 0) = 0 \ \forall \alpha : |\alpha| \leqslant \alpha_0, \quad (37)$$

с использованием некоторых результатов работы [4] для определения производных функций $[v]$, $[\theta_2]$ получим систему сингулярных интегральных уравнений

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\Omega_m(u)}{u - s}\, du = -G_m(s), \quad |s| \leqslant 1 \quad (m = 1, 2), \quad (38)$$

где

$$\Omega_m(u) = Eh\Phi_m^0(\alpha_0 u); \quad \Phi_1^0 = a_{11}F_1 + a_{12}F_2;$$

$$\Phi_2 = a_{21}F_1 + a_{22}F_2, \quad F_1(\alpha) = \frac{1}{R} \frac{d}{d\alpha}[v(\alpha)], \quad F_2(\alpha) = -Rc\frac{d}{d\alpha}[\theta_2(\alpha)],$$

$$G_m = f_m + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{2} \int_{-1}^{1} \Omega_j(u) \Psi_{mj}^0 [\alpha_0(s - u)]\, du, \quad f_1 = N_2^0,$$

$$f_2 = \frac{1}{Rc} M_2^0,\ a_{11} = 1,\ a_{12} = a_{21} = -\frac{c_1^2 (1-\nu)(3+\nu)}{8c(1+\nu)},$$

$a_{22} = 3 - 2\nu - \nu^2 - \frac{c_1^2}{8}(3 - 4\nu + \nu^2)$ — усилия и моменты на линиях разрезов в оболочке без разрезов.

Функции Ψ_{mj}^0 непрерывны для всего множества действительных значений s, u и имеют вид

$$\Psi_{11}^0(z) = k\alpha_0\left[\frac{1}{kz} - \frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{kz}{2} - \Psi_{11}(z)\right],\ \Psi_{12}^0(z) = -k\alpha_0\Psi_{12}(z),$$

$$\Psi_{22}^0(z) = k\alpha_0\left[\frac{1}{kz} - \frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{kz}{2} - \Psi_{22}(z)\right],\ \Psi_{21}^0(z) = -k\alpha_0\Psi_{21}(z),$$

$$\Psi_{11} = \frac{1}{\Delta}(a_{22}k_{11} - a_{21}k_{12}),\ \Psi_{12} = \frac{1}{\Delta}(a_{11}k_{12} - a_{12}k_{11}),$$

$$\Psi_{21} = \frac{1}{\Delta}(a_{22}k_{21} - a_{21}k_{22}),\ \Psi_{22} = \frac{1}{\Delta}(a_{11}k_{22} - a_{12}k_{21}),\ \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$$

$$K_{11}(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{kz}{\operatorname{sh} kz}\right)\operatorname{cth}\frac{kz}{2} - \left(1 - \frac{2t}{P_{21}^2 + q_{21}^2} - e^{-\frac{|z|}{\sqrt{2c}}}\cos\frac{z}{\sqrt{2c}}\right)\operatorname{sgn} z +$$

$$+ 4\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{X_n}\sum_{j=1}^{2}\frac{e^{-a_{jn}|z|}}{q_{jn}}(A_{jn}^{(1)}\cos b_{jn}z\operatorname{sgn} z + A_{jn}^{(2)}\sin b_{jn}z) +\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{2}e^{-kn|z|}\left(\frac{knz}{2} - \operatorname{sgn} z\right)\right],\ K_{22}(z) = \frac{1}{2}\left[(1-\nu)^2 - \frac{c_1^2}{8}(11 - 12\nu + \nu^2)\right] \times$$

$$\times\left(\frac{kz}{\operatorname{sh} kz} - 1\right)\operatorname{cth}\frac{kz}{2} - \frac{c_1^2(1-\nu^2)}{32}\left[\left(\frac{k^3z^3}{\operatorname{sh}^2\frac{kz}{2}\operatorname{sh} kz} - 4\right)\operatorname{cth}\frac{kz}{2} +\right.$$

$$\left.+ \frac{k^3z^3}{3\operatorname{sh}^2\frac{kz}{2}}\right] + \frac{1}{32}c_1^2(5 - 4\nu - \nu^2)\left(\frac{k^2z^2}{\operatorname{sh}^2\frac{kz}{2}} - 4\right)\operatorname{cth}\frac{kz}{2} +$$

$$+ \nu^2\left(1 - e^{-\frac{|z|}{\sqrt{2c}}}\cos\frac{z}{\sqrt{2c}}\right)\operatorname{sgn} z + 2\left[\frac{1}{c^2} - 3(1-\nu^2) - c_1^2(1-\nu)^2\right] \times$$

$$\times\frac{2t\operatorname{sgn} z}{P_{21}^2 + q_{21}^2} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{X_n}\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{q_{jn}}e^{-a_{jn}|z|}[A_{jn}^{(3)}\cos b_{jn}z\operatorname{sgn} z +\right.$$

$$+ A_{jn}^{(4)}\sin b_{jn}z] + e^{-kn|z|}\left[-\frac{1}{4}(1-\nu)^2 knz - \frac{1}{2}(1-\nu^2)\operatorname{sgn} z +\right.$$

$$\left.\left.+ \frac{c_1^2}{96}((1-\nu^2)k^3n^3z^3 - 3(5 - 4\nu - \nu^2)k^2n^2z^2\operatorname{sgn} z + 3(11 - 12\nu + \nu^2)knz)\right]\right\},$$

$$K_{12}(z) = K_1^0(z) - 2(1 + c_1^2)\frac{t\operatorname{sgn} z}{P_{21}^2 + q_{21}^2} + \frac{4}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{X_n}\sum_{j=1}^{2}\frac{e^{-a_{jn}|z|}}{q_{jn}} \times\right.$$

$$\left.\times[D_{jn}^{(1)}\cos b_{jn}z\operatorname{sgn} z + D_{jn}^{(2)}\sin b_{jn}z] + K_2^0(z)\right\},$$

$$K_{21}(z) = K_1^0(z) - 2(1 - 3c_1^2)\frac{t\operatorname{sgn} z}{P_{21}^2 + q_{21}^2} +$$

$$+ \frac{4}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{X_n}\sum_{j=1}^{2}\frac{e^{-a_{jn}|z|}}{q_{jn}}[D_{jn}^{(3)}\cos b_{jn}z\operatorname{sgn} z + D_{jn}^{(4)}\sin b_{jn}z] + K_2^0(z)\right\},$$

$$K_1^0(z) = -\frac{c_1^2(1-\nu)}{32c}\left[\left(\frac{k^3z^3}{\operatorname{sh}^2\frac{kz}{2}\operatorname{sh}kz} - 4\right)\operatorname{cth}\frac{kz}{2} + \frac{k^3z^3}{3\operatorname{sh}^2\frac{kz}{2}} + \right.$$

$$+ \frac{c}{32}(5+3\nu)(1-\nu)^2\left(\frac{k^2z^2}{\operatorname{sh}^2\frac{kz}{2}} - 4\right)\operatorname{cth}\frac{kz}{2} - \frac{c}{16}(11+5\nu)(1-\nu)^2 \times$$

$$\times\left(\frac{kz}{\operatorname{sh}kz} - 1\right)\operatorname{cth}\frac{kz}{2} - \nu e^{-\frac{|z|}{\sqrt{2c}}}\sin\frac{z}{\sqrt{2c}}, \quad K_2^0(z) = \frac{c_1^2}{96}e^{-kn|z|}\times$$

$$\times\left[(1-\nu)(knz)^3 - \frac{3(5+3\nu)(1-\nu)}{1+\nu}(knz)^2\operatorname{sgn}z + \frac{3(11+5\nu)(1-\nu)}{1+\nu}knz\right],$$

$$t=1 \text{ при } k=1 \text{ и } t=0 \text{ при } k>1,$$

$$A_{jn}^{(i)} = t_{jn}^{(i)} - 2k^2n^2d_{jn}^{(i)} + k^4n^4E_{jn}^{(i)}, \quad A_{jn}^{(2+i)} = (1-\nu^2)\,t_{jn}^{(i)} -$$

$$-2k^2n^2\left[2-\nu-\nu^2-c_1^2(1-\nu)\right]d_{jn}^{(i)} + \left[(5-4\nu-\nu^2)k^4n^4 + \frac{1}{c^2} -\right.$$

$$\left. - c_1^2(1-\nu^2)k^4n^4 - 4k^2n^2(2-\nu-\nu^2)\right]E_{jn}^{(i)} - 2(1-\nu)(1-k^2n^2)^2k^2n^2B_{jn}^{(i)},$$

$$D_{jn}^{(i)} = \left[\nu + k^2n^2c^2(2-3\nu+\nu^3)\right]d_{jn}^{(i)} - k^2n^2\left[1 + k^2n^2c^2(1-\nu)^2\right]E_{jn}^{(i)},$$

$$D_{jn}^{(2+i)} = D_{jn}^{(i)} + 2k^2n^2c^2(2-\nu-\nu^2)E_{jn}^{(i)}, \quad i=1,2, \quad B_{jn}^{(1)} = B_{jn},$$

$$B_{jn}^{(2)} = C_{jn}, \quad t_{jn}^{(1)} = r_{jn}E_{jn}^{(1)} - s_{jn}E_{jn}^{(2)}, \quad t_{jn}^{(2)} = r_{jn}E_{jn}^{(2)} - s_{jn}E_{jn}^{(1)},$$

$$d_{jn}^{(1)} = s_{jn}C_{jn} + r_{jn}B_{jn}, \quad d_{jn}^{(2)} = s_{jn}B_{jn} - r_{jn}C_{jn}, \quad r_{jn} = P_{jn}^{(2)} - q_{jn}^{(2)},$$

$$s_{jn} = 2P_{jn}q_{jn}, \quad E_{jn}^{(1)} = P_{jn}B_{jn} + q_{jn}C_{jn}, \quad E_{jn}^{(2)} = q_{jn}B_{jn} - P_{jn}C_{jn}.$$

Для построения решения системы уравнений (38) целесообразно воспользоваться одним из прямых методов решения сингулярных интегральных уравнений [5, 6, 18]. Ниже для нахождения функций Ω_m применяется обобщение метода Мультоппа [6]. Применяя этот метод в случае, когда $N_2^0 = \mathrm{const}$, $M_2^0 = 0$, для определения коэффициентов интенсивности [15] K_1, соответствующего усилию N_2, и K_3 — моменту M_2, получим формулы

$$K_1 = \frac{1}{2}N_2^0\sqrt{R\alpha_0}\sum_{j=1}^{N/2}A_{2j-1}, \quad K_3 = \frac{1}{2}N_2^0Rc\sqrt{R\alpha_0}\sum_{j=1}^{N/2}B_{2j-1}. \tag{39}$$

Здесь

$$A_{2j-1} = \frac{4}{n}\sum_{\nu=1}^{N/2}\varphi_\nu^{(1)}\cos(2j-1)\theta_\nu; \quad B_{2j-1} = \frac{4}{n}\sum_{\nu=1}^{N/2}\varphi_\nu^{(2)}\cos(2j-1)\theta_\nu;$$

$\varphi_\nu^{(1)}$, $\varphi_\nu^{(2)}$ — корни системы алгебраических уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{N/2}(\alpha_{m\nu}\varphi_\nu^{(1)} + \beta_{m\nu}\varphi_\nu^{(2)}) = 1,$$

$$\sum_{\nu=1}^{N/2}(\beta_{m\nu}^0\varphi_\nu^{(1)} + \alpha_{m\nu}^0\varphi_\nu^{(2)}) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, N/2,$$

где

$$\alpha_{m\nu} = \frac{1}{2N}\left[\Psi_{m\nu}^* + \Psi_{11}^0(z_1) - \Psi_{11}^0(z_2)\right]; \quad \beta_{m\nu} = \frac{1}{2n}\left[\Psi_{12}^0(z_1) - \Psi_{12}^0(z_2)\right];$$

$$\alpha_{m\nu}^0 = \frac{1}{2N}\left[\Psi_{m\nu}^* + \Psi_{22}^0(z_1) - \Psi_{22}^0(z_2)\right]; \quad \beta_{m\nu}^0 = \frac{1}{2n}\left[\Psi_{21}^0(z_1) - \Psi_{21}^0(z_2)\right];$$

$$z_1 = \alpha_0(\cos\theta_m - \cos\theta_\nu); \quad z_2 = \alpha_0(\cos\theta_m + \cos\theta_\nu), \quad \theta_m = \frac{2m-1}{2n}\pi;$$

$$\Psi_{m\nu}^* = \frac{1}{\sin\theta_m}\left[\operatorname{ctg}\frac{\theta_m \mp \theta_\nu}{2} + \operatorname{tg}\frac{\theta_m \mp \theta_\nu}{2}\right].$$

Верхний знак берется в случае, когда число $|m - \nu|$ нечетно, а нижний, когда оно четно.

На ЭВМ «Минск-32» произведен численный анализ задачи для следующих значений параметров оболочки: $R = 0{,}15$ м; $h = 0{,}0015$ м; $\nu = 0{,}3$. Контроль сходимости решений системы алгебраических уравнений произведен методом сравнения величин $\varphi_\nu^{(i)}$ $(i = 1, 2)$, вычисленных при $N = M$ и $N = 2M$ соответственно. В рассмотренном случае оказалось возможным для достижения точности 1% ограничиться $N = 30$.

На рис. 1 представлена зависимость относительного коэффициента интенсивности $K_1^* = K_1/N_2^0$ от относительной длины и количества разрезов. Из приведенных графиков видно, что изменение коэффициента интенсивности мембранных усилий (K_1) при сближении контуров разрезов (увеличение k) носит немонотонный характер.

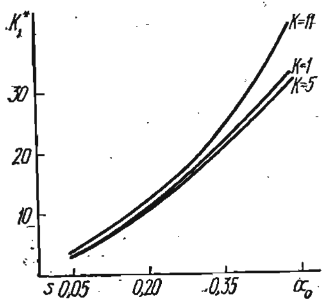

Рис. 1

Задача о напряженном состоянии замкнутой цилиндрической оболочки с продольной трещиной в случае, когда в качестве исходных приняты уравнения технической теории оболочек, рассмотрена в работе [12].

Пример 2. *Замкнутая цилиндрическая оболочка с периодической системой коллинеарных разрезов.* Рассмотрим замкнутую бесконечную цилиндрическую оболочку с системой k периодически расположенных вдоль окружности $\alpha = 0$ разрезов (трещин). Пусть оболочка растягивается на бесконечности равномерно распределенными усилиями постоянной интенсивности N_0. Напряженно-деформированное состояние такой оболочки будет циклически симметричным, что позволяет исследовать цилиндрическую панель $|\beta| \leqslant \frac{\pi}{k}$ с разрезом $|\beta| \leqslant \beta_0$, $\alpha = 0$ (начало координат выбрано посредине разреза, $2\beta_0$ — центральный угол раствора дуги, вдоль которой расположен разрез). Поле дисторсий (30) в этом случае принимает вид

$$\begin{gathered}\overset{0}{\varepsilon}_{22} = \overset{0}{\varepsilon}_{12} = \overset{0}{\varkappa}_{22} = \overset{0}{\varkappa}_{12} = 0, \\ \overset{0}{\varepsilon}_{11} = \frac{1}{R}[u(\beta)]\,\delta(\alpha), \quad \overset{0}{\varkappa}_{11} = -\frac{1}{R}[\theta_1(\beta)]\,\delta(\alpha),\end{gathered} \tag{40}$$

где

$$\begin{gathered}[u(\beta)] = u^+(\beta) - u^-(\beta); \quad [\theta_1(\beta)] = \theta_1^+(\beta) - \theta_1^-(\beta)\,\forall\beta : |\beta| < \beta_0; \\ [u(\beta)] = [\theta_1(\beta)] = 0\,\forall\beta : |\beta| \geqslant \beta_0.\end{gathered}$$

Для построения решения рассматриваемой задачи воспользуемся разрешающим уравнением (24) для круговой цилиндрической оболочки, записанным в комплексных усилиях. Подставим выражение (40) в уравнение (24). Используя затем $2\pi/k$-периодическое по координате β фундаментальное решение уравнения

$$\left(\nabla^2\nabla^2 + i2b^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right)\Phi = \delta(\alpha)\,\delta(\beta - \theta), \tag{41}$$

для определения разрешающей функции $\tilde{N}$ в рамках технической теории [2] получаем формулу

$$\begin{gathered}\tilde{N} = -\frac{D_0 k}{\pi}\int\limits_{-\beta_0}^{\beta_0}\left\{\frac{1}{R}[u(\theta)]\,\nabla^2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - [\theta_1(\theta)]\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - i\mu\nabla^2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)\right\}\times \\ \times\Phi(\alpha, \beta - \theta)\,d\theta.\end{gathered}$$

Здесь

$$\Phi(\alpha, \beta-\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_m(\alpha) \cos kn(\beta-\theta)\, d\theta, \quad m = kn;$$

$$\Phi_0(\alpha) = \frac{1-i}{16b^3} e^{-b(1-i)|\alpha|} - \frac{i|\alpha|}{8b^2}; \quad \Phi_m(\alpha) = \frac{i}{4} \sum_{j=1}^{2} \frac{e^{ip_{jm}|\alpha|}}{p_{jm}(p_{jm}^2 + m^2 - ib^2)};$$

$$p_{jm} = (-1)^{j+1} a_{jm} + ib_{jm}; \quad a_{jm} = \frac{m}{\sqrt{2}} \sqrt{R_{jm} - H_{jm}};$$

$$b_{jm} = \frac{m}{\sqrt{2}} \sqrt{R_{jm} + H_{jm}};$$

$$R_{jm} = \sqrt{H_{jm}^2 + E_{jm}^2}; \quad H_{jm} = 1 + (-1)^{j+1} \frac{b}{m} \sqrt{d_m - s_m};$$

$$E_{jm} = \frac{b}{m} \sqrt{d_m + s_m} + 2(-1)^{j+1} s_m; \quad d_m = \sqrt{1 + s_m^2}; \quad s_m = \frac{b}{2m^2}.$$

На основании формул (21), (22), (25), (40), (41) определяем усилия и моменты в оболочке, вызванные произвольным распределением скачков перемещений $[u]$ и углов поворота $[\theta_1]$ вдоль разрезов. Прибавив затем к найденным величинам усилия в оболочке без разрезов и потребовав, чтобы суммарные величины удовлетворяли условиям свободных берегов разрезов

$$N_1(0, \beta) + N_1^0 = 0, \quad M_1 = 0 \; \forall \beta : |\beta| \leqslant \beta_0, \tag{42}$$

для определения функций

$$F_1(\beta) = \frac{1}{R} \frac{d}{d\beta} [u(\beta)], \quad F_2(\beta) = \frac{1}{2b^2} \frac{d}{d\beta} [\theta_1(\beta)]$$

в новых переменных

$$s = \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{k\beta}{2}, \quad \zeta = \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{k\theta}{2}, \quad \lambda = \operatorname{tg} \frac{k\beta_0}{2}$$

получим систему сингулярных интегральных уравнений

$$\frac{a_r}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\Omega_r^0(\zeta)\, d\zeta}{s-\zeta} + \frac{\lambda}{\pi z} \sum_{j=1}^{2} \int_{-1}^{1} \Omega_j^0(\zeta)\, \Psi_{rj}(s, \zeta)\, d\zeta = f_r(s), \quad |s| < 1 \quad (r = 1, 2). \tag{43}$$

Здесь

$$\Omega_r^0(s) = \frac{1}{z} F_r\left(\frac{2}{k} \operatorname{arctg} \lambda s\right), \quad f_1 = \frac{N_0}{Ehz}, \quad f_2 = 0,$$

$$\Psi_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} C_m \sin n\omega(s, \zeta), \quad \Psi_{12} = \Psi_{21} = (1+\nu) \sum_{n=1}^{\infty} D_m \sin n\omega(s, \zeta),$$

$$\Psi_{22} = \frac{b}{k} \omega(s, \zeta) + 2a_2 \Psi_{11} + 2b^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_m}{m^2} \sin n\omega(s, \zeta), \quad z = 1 + \lambda^2 s^2,$$

$$\omega(s, \zeta) = 2 \operatorname{arctg} \frac{\lambda(s-\zeta)}{1 + \lambda^2 s\zeta}, \quad C_m = A_m(b_m + s_m a_m) - 1,$$

$$D_m = A_m(s_m b_m - a_m), \quad A_m = \frac{1}{2m(1 + s_m^2)}, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{3 - 2\nu - \nu^2}{2}.$$

Функции $\Psi_{rj}(s, \zeta)$ непрерывны для всего множества действительных значений s и ζ.

Для нахождения решения системы уравнений (43), а затем коэффициентов интенсивности усилий и моментов можно воспользоваться одним из прямых методов решения сингулярных интегральных уравнений [5, 6, 18]. В случае, когда исходными приняты уравнения в перемещениях (19), задача об упругом равновесии замкнутой цилиндрической оболочки с системой коллинеарных трещин рассмотрена в работе [10].

Пологие оболочки. Рассмотрим тонкую пологую оболочку [2, 3], находящуюся под воздействием поля дисторсий. Отнесем срединную поверхность оболочки к декартовой прямоугольной системе координат XOY и пусть координатные линии в общем случае не совпадают с линиями главных кривизн срединной поверхности. Тогда соотношения, связывающие компоненты деформации срединной поверхности с перемещениями, имеют вид [3]

$$\begin{gathered}\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{w}{R_{11}},\quad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{R_{22}},\quad \varepsilon_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+2\frac{w}{R_{12}},\\ \varkappa_{xx}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \varkappa_{yy}=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad \varkappa_{xy}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\end{gathered}\tag{44}$$

где R_{11}, R_{22}— радиусы кривизны нормальных сечений поверхности, проведенных вдоль координатных линий $y=\text{const}$ и $x=\text{const}$ соответственно; R_{11}, R_{22} и R_{12} связаны с главными радиусами кривизны R_1 и R_2 формулами

$$\frac{1}{R_{11}}+\frac{1}{R_{22}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2},\quad \frac{1}{R_{11}R_{22}}-\frac{1}{R_{12}^2}=\frac{1}{R_1R_2},$$

$$\frac{1}{R_{12}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\sin 2\beta;$$

β — угол между координатной осью OX и линией, вдоль которой нормальная кривизна поверхности равна $1/R_1$.

Усилия и моменты в оболочке определяются через функцию напряжений $\varphi(x, y)$ и функцию прогибов $w(x, y)$ следующим образом:

$$\begin{gathered}N_1=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\quad N_2=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\quad S=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y},\\ M_1=-D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\varkappa_{xx}^0+\nu\varkappa_{yy}^0\right),\\ M_2=-D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\varkappa_{yy}^0+\nu\varkappa_{xx}^0\right),\\ H=-D_1(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\varkappa_{xy}^0\right),\\ Q_1=-D_1\left[\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w+\frac{\partial}{\partial x}(\varkappa_{xx}^0+\nu\varkappa_{yy}^0)+(1-\nu)\frac{\partial}{\partial y}\varkappa_{xy}^0\right],\\ Q_2=-D_1\left[\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w+\frac{\partial}{\partial y}(\varkappa_{yy}^0+\nu\varkappa_{xx}^0)+(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\varkappa_{xy}^0\right].\end{gathered}\tag{45}$$

Систему разрешающих уравнений относительно функции напряжений φ и функции прогибов w представим в виде

$$\begin{gathered}\nabla^2\nabla^2\varphi-\frac{D_0}{R}\nabla_k^2 w=-D_0F_1^0(x, y),\\ \nabla^2\nabla^2 w+\frac{1}{D_1R}\nabla_k^2\varphi=-F_2^0(x, y).\end{gathered}\tag{46}$$

Здесь

$$F_1^0=\nabla^2\varepsilon_{yy}^0+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\varepsilon_{xx}^0-\varepsilon_{yy}^0)-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\varepsilon_{xy}^0;$$

$$F_2^0=\nabla^2(\varkappa_{xx}^0+\nu\varkappa_{yy}^0)-(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\varkappa_{xx}^0-\varkappa_{yy}^0)+2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\varkappa_{xy}^0;$$

$$\nabla_k^2=a\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2}{\partial y^2};\quad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$a = \gamma_1^* \sin^2\beta + \gamma_2^* \cos^2\beta; \quad b = (\gamma_1^* - \gamma_2^*)\sin 2\beta;$$
$$c = \gamma_1^* \cos^2\beta + \gamma_2^* \sin^2\beta;$$
$$\gamma_1^* = \frac{R}{R_1}; \quad \gamma_2^* = \frac{R}{R_2}; \quad R = \min(|R_1|, |R_2|).$$

Рассмотрим напряженное состояние пологой цилиндрической оболочки с системой N произвольно расположенных прямолинейных в плане разрезов (трещин) длиной $2l_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$. Отнесем срединную поверхность оболочки к декартовой системе координат XOY, причем ось OX направим по линии нулевой кривизны. Кроме того, на каждом разрезе, как и в случае плоской задачи [15], введем локальную систему координат $X_kO_kY_k$, начало которой поместим в центре трещины, а ось O_kX_k направим по линии трещины. Центры трещин в базисной системе координат XOY имеют координаты (X_k^0, Y_k^0), а оси O_kX_k образуют с осью OX углы β_k.

Граничные условия на контуре разреза $Y_k = 0$, $|x_k| \leqslant l_k$ запишем так:

$$\begin{gathered} N_2^+(x_k, 0) = N_2^-(x_k, 0) = f_{1k}(x_k), \quad M_2^+(x_k, 0) = M_2^-(x_k, 0) = f_{3k}(x_k), \\ S^+(x_k, 0) = S^-(x_k, 0) = f_{2k}(x_k), \quad Q_2^{*+}(x_k, 0) = Q_2^{*-}(x_k, 0) = f_{4k}(x_k), \end{gathered} \tag{47}$$

где f_{ik} $(i = \overline{1, 4})$ — заданные усилия и моменты.

Учитывая соотношения (44), (47), разрешающие уравнения (46) для определения функций φ_k, w_k в случае одного произвольно ориентированного разреза в цилиндрической оболочке записываем в виде

$$\nabla^2\nabla^2\varphi_k - \frac{D_0}{R}\nabla_R^2 w_k = -D_0(\nabla_1^2\varepsilon_{yy}^0 - \nabla_1\nabla_2\varepsilon_{xy}^0), \tag{48}$$

$$\nabla^2\nabla^2 w_k + \frac{1}{D_1R}\nabla_R^2\varphi_k = -(\nu\nabla_1^2 + \nabla_2^2)\varkappa_{yy}^0 - 2(1-\nu)\nabla_1\nabla_2\varkappa_{xy}^0.$$

Здесь

$$\begin{gathered} \nabla^2 = \nabla_1^2 + \nabla_2^2, \quad \nabla_R^2 = \cos^2\beta_k\nabla_1^2 - \sin 2\beta_k\nabla_1\nabla_2 + \sin^2\beta_k\nabla_2^2, \\ \nabla_1 = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \nabla_2 = \frac{\partial}{\partial y_k}, \\ \varepsilon_{yy}^0 = [v_k(x_k)]\,\delta(y_k), \quad \varepsilon_{xy}^0 = [u_k(x_k)]\,\delta(y_k), \\ \varkappa_{yy}^0 = -[\theta_{2k}(x_k)]\,\delta(y_k) - [w_k(x_k)]\,\nabla_2\delta(y_k), \quad \varkappa_{xy}^0 = -\nabla_1[w_k(x_k)]\,\delta(y_k), \end{gathered} \tag{49}$$

где

$$\begin{gathered} [v_k(x_k)] = v_k^+(x_k) - v_k^-(x_k); \quad u_k(x_k) = u_k^+(x_k) - u_k^-(x_k); \\ [\theta_{2k}(x_k)] = \nabla_2 w_k^+ - \nabla_2 w_k^-; \quad [w_k(x_k)] = w_k^+(x_k) - w_k^-(x_k)\,\forall x_k; |x_k| < l_k; \\ [v_k] = [u_k] = [\theta_{2k}] = [w_k] = 0\,\forall x_k : |x_k| \geqslant l_k. \end{gathered}$$

Используя преобразования Фурье, решение системы уравнений (48) представляем в виде

$$g_k^{(i)}(x_k, y_k) = \frac{a_i^*}{4\pi}\int_{-l_k}^{l_k}\Big\{[v_k(\zeta)]\,\Phi_i(x_k - \zeta, y_k) + [u_k(\zeta)]\,\Phi_{i+2}(x_k - \zeta, y_k) -$$
$$- Rc\,[\theta_{2k}(\zeta)]\,F_i(x_k - \zeta, y_k) - Rc\,\frac{d}{d\zeta}[w_k(\zeta)]\,F_{i+2}(x_k - \zeta, y_k)\Big\}\,d\zeta \quad (i = 1, 2), \tag{50}$$

где

$$g_k^{(1)} = w_k; \quad g_k^{(2)} = \varphi_k; \quad \Phi_1 = \varphi^1 - f^1; \quad \Phi_2 = \varphi^2 + f^2;$$
$$\varphi^1 = b_1f^3 + b_2f^5; \quad \varphi^2 = b_1f^4 + b_2f^6; \quad \Phi_3 = b_2f^3 - b_1f^5; \quad \Phi_4 = b_2f^4 - b_1f^6;$$

$$F_1 = (1+\nu) f^2 - (1-\nu)\varphi^2; \quad F_2 = (1+\nu) f^1 + (1-\nu)\varphi^1;$$

$$F_3 = -(1-\nu)\Phi_4 + 2\int_0^\tau \nabla_2 f^2 d\tau; \quad F_4 = (1-\nu)\Phi_3 + 2\int_0^\tau \nabla_2 f^1 d\tau;$$

$$f^1 = B_1(z)\ker\beta r + B_2(z)\operatorname{kei}\beta r; \ f^2 = B_2(z)\ker\beta r - B_1(z)\operatorname{kei}\beta r; \ f^3 = \Psi_1\frac{\tau}{r};$$

$$f^4 = \Psi_2\frac{\tau}{r}; \quad f^5 = \Psi_1\frac{y_k}{r}; \quad f^6 = \Psi_2\frac{y_k}{r}; \quad \Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\gamma_2(z)\ker'\beta r -$$

$$-\gamma_1(z)\operatorname{kei}'\beta r]; \quad \Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\gamma_1(z)\ker'\beta r + \gamma_2(z)\operatorname{kei}'\beta r]; \quad \gamma_1 = B_3 + B_4;$$

$$\gamma_2 = B_1 - B_3; \quad B_1(z) = \sin mz \operatorname{sh} mz; \quad B_2(z) = \cos mz \operatorname{ch} mz;$$

$$B_3(z) = \sin mz \operatorname{ch} mz;$$

$$B_4(z) = \cos mz \operatorname{sh} mz; \quad r^2 = \tau^2 + y_k^2; \quad \tau = x_k - \zeta; \quad z = b_1\tau - b_2 y_k;$$

$$b_1 = \cos\beta_k; \quad b_2 = \sin\beta_k; \quad m = \frac{\beta}{\sqrt{2}}; \quad \beta = \frac{\lambda}{2}; \quad \lambda^2 = \frac{1}{R^2 c};$$

$$Rc = \frac{h}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}; \quad a_1^* = \frac{1}{Rc}; \quad a_2^* = D_0; \quad \ker' x = \frac{d}{dx}\ker x;$$

$$\operatorname{kei}' x = \frac{d}{dx}\operatorname{kei} x;$$

$\ker x$, $\operatorname{kei} x$ — функции Томсона.

Используя полученные выражения для разрешающих функций (50) и формулы для определения усилий и моментов (45), а также некоторые соотношения из работы [19], можно найти усилия и моменты на произвольной площадке с нормалью n, вызванные скачками перемещений и углов поворота на k-й трещине. В частности, на линии n-й трещины O_nX_n они имеют вид

$$G_{nk}^{(i)} = \frac{A_i}{2\pi}\int_{-l_k}^{l_k} [\Psi_{1k}(\zeta) K_{nk}^{(i)}(\zeta, x_n) + \Psi_{2k}(\zeta) L_{nk}^{(i)}(\zeta, x_n) +$$

$$+ \Psi_{3k}(\zeta) P_{nk}^{(i)}(\zeta, x_n) + \Psi_{4k}(\zeta) R_{nk}^{(i)}(\zeta, x_n)]\, d\zeta, \ |x_n| \leqslant l_n \quad (n = \overline{1, N}; \ i = \overline{1, 4}). \tag{51}$$

Здесь

$$G_{nk}^{(1)} = N_{nk}, \ G_{nk}^{(2)} = S_{nk}, \ G_{nk}^{(3)} = M_{nk}, \ G_{nk}^{(4)} = \int Q_{nk}^* dx_n + c_{nk},$$

$$Q_{nk}^* = Q_{nk} + \frac{\partial}{\partial x_n} H_{nk}, \ \Psi_{1k}(\zeta) = \frac{d}{d\zeta}[v_k(\zeta)], \ \Psi_{2k}(\zeta) = \frac{d}{d\zeta}[u_k(\zeta)],$$

$$\Psi_{3k}(\zeta) = -Rc\frac{d}{d\zeta}[\theta_{2k}(\zeta)], \ \Psi_{4k}(\zeta) = -Rc\frac{d}{d\zeta}\left\{\frac{d}{d\zeta}[w_k(\zeta)]\right\},$$

$$T_{nk}^{(1)} = t_1^{(1)}\alpha_1 + t_2^{(1)}\alpha_2 - t_3^{(1)}\alpha_3, \ T_{nk}^{(2)} = t_1^{(2)}\alpha_3 + t_2^{(2)}\alpha_4, \ T_{nk}^{(3)} = t_1^{(3)}\alpha_1 +$$

$$+ t_2^{(3)}\alpha_2 - t_3^{(3)}\alpha_3, \ T_{nk}^{(4)} = -t_1^{(4)}\sin\beta_{nk} + t_2^{(4)}\cos\beta_{nk} + t_3^{(4)}\alpha_3 + t_4^{(4)}\alpha_4,$$

$$T_{nk}^{(i)} = K_{nk}^{(i)}, \ L_{nk}^{(i)}, \ P_{nk}^{(i)}, \ R_{nk}^{(i)}, \ t_i^{(i)} = k_i^{(i)}, \ l_i^{(i)}, \ p_i^{(i)}, \ r_i^{(i)},$$

$$t_1^{(2)} = \frac{1}{2}(t_2^{(1)} - t_1^{(1)}), \ t_2^{(2)} = t_3^{(1)}, \ t_3^{(4)} = \frac{1}{2}(t_2^{(3)} - t_1^{(3)}), \ t_4^{(4)} = t_3^{(3)},$$

$$k_1^{(1)} = b_1(\omega_9 - \omega_7) - b_2(\omega_8 + b_1\omega_4 - b_2\omega_2), \ k_2^{(1)} = (1 + b_1^2)\omega_2 + b_1(\omega_7 + \omega_9) +$$

$$+ b_2(\omega_8 + b_1\omega_4), \ k_3^{(1)} = -b_1(\omega_8 + b_1\omega_4) + b_2(\omega_7 + b_1\omega_2), \ l_1^{(1)} = -(1 + b_2^2)\omega_4 +$$

$$+ b_1(\omega_8 - b_2\omega_2) + b_2(2\omega_9 - \omega_7), \ l_2^{(1)} = k_3^{(1)}, \ l_3^{(1)} = b_1(\omega_9 - \omega_7) - b_2(\omega_8 +$$

$$+ b_1\omega_4 - b_2\omega_2),\quad p_1^{(1)} = -(1-\nu)(b_1\omega_5 + b_2\omega_6 - b_1b_2\omega_3) - [2 + (1-\nu)b_2^2]\,\omega_1 +$$
$$+ (1+\nu)\,b_1\omega_{10} - 4b_2\omega_{11},\quad p_2^{(1)} = -p_1^{(1)} - 2\,[(1-\nu)\,\omega_1 - (1+\nu)\,b_1\omega_{10} + 2b_2\omega_{11}],$$
$$p_3^{(1)} = -(1-\nu)(b_1\omega_6 - b_2\omega_5 + b_1b_2\omega_1) - [2-(1-\nu)\,b_1^2]\,\omega_3 + 2b_2\omega_{10},$$
$$r_1^{(1)} = -p_3^{(1)} - 2\,(1+\nu)(\omega_3 - b_2\omega_{10}) + 4\,(b_1\omega_{11} - b_2\omega_{12}),\ r_2^{(1)} = p_3^{(1)} +$$
$$+ 4\,(\omega_3 - b_2\omega_{10}),\quad r_3^{(1)} = p_1^{(1)} + 4\,(\omega_1 - b_1\omega_{10} + 2b_2\omega_{11}),\quad k_1^{(3)} = p_1^{(1)} +$$
$$+ 4\,(\omega_1 + b_2\omega_{11}),\quad k_2^{(3)} = p_2^{(1)},\quad k_3^{(3)} = (1-\nu)\,[b_2(\omega_5 - b_1\omega_1) - b_1(\omega_6 - b_1\omega_3)],$$
$$l_1^{(3)} = r_1^{(1)} - 4\,(b_1\omega_{11} - b_2\omega_{12}),\quad l_2^{(3)} = p_3^{(1)},\quad l_3^{(3)} = -(1-\nu)\,[b_1(\omega_5 + \omega_{10}) +$$
$$+ b_2(\omega_6 - b_1\omega_3 + b_2\omega_1)],\quad p_1^{(3)} = (1-\nu)^2\,[b_1(\omega_7 + b_2\omega_4) + b_2(\omega_8 - b_2\omega_2)] -$$
$$-(1+\nu)^2\,b_1\omega_9 + 4\nu b_2\omega_{13},\quad p_2^{(3)} = -(1-\nu)^2\,(b_1\omega_7 + b_2\omega_8 + b_1b_2\omega_4) -$$
$$-(1-\nu)^2\,b_1\omega_9 + (1-\nu)\,[3+\nu-(1-\nu)\,b_1^2]\,\omega_2 + 4b_2\omega_{13},$$
$$p_3^{(3)} = (1-\nu)^2\,(b_1\omega_8 - b_2\omega_7 - b_1b_2\omega_2) + 2\,(1-\nu)\,b_2\omega_9 -$$
$$-(1-\nu)\,[2-(1-\nu)\,b_1^2]\,\omega_4,\quad r_1^{(3)} = -(1-\nu)^2\,(b_1\omega_8 - b_2\omega_7 - b_1b_2\omega_2) +$$
$$+ 2\,(1-\nu^2)\,b_2\omega_9 - (1-\nu)\,[3+\nu-(1-\nu)\,b_2^2]\,\omega_4 - 4\nu\,(b_1\omega_{13} - b_2\omega_{14}),$$
$$r_2^{(3)} = (1-\nu)^2\,[b_1(\omega_8 + b_1\omega_4) - b_2(\omega_7 + b_1\omega_2)] - 4\,(b_1\omega_{13} - b_2\omega_{14}),$$
$$r_3^{(3)} = (1-\nu)^2\,(b_1\omega_7 + b_2\omega_8 + b_1b_2\omega_4) - (1-\nu)(3-\nu)\,b_1\omega_9 +$$
$$+ (1-\nu)\,[2-(1-\nu)\,b_2^2]\,\omega_2 + 4\,(1-\nu)\,b_2\omega_{13},\quad k_1^{(4)} = 2\,(\omega_1 + b_1\omega_{10}),$$
$$k_2^{(4)} = 2\,(\omega_3 - b_2\omega_{10}),\quad l_1^{(4)} = -k_2^{(4)},\quad l_2^{(4)} = 2\,(\omega_1 - b_1\omega_{10}) + 4b_2\omega_{11},$$
$$p_1^{(4)} = 2\,[(1-\nu)\,\omega_2 - (1+\nu)\,b_1\omega_9 + 2b_2\omega_{13}],\quad p_2^{(4)} = 2\,[(1-\nu)(\omega_4 - b_2\omega_9) -$$
$$-2\,(b_1\omega_{13} - b_2\omega_{14})],\quad r_1^{(4)} = -2\,[(1-\nu)(\omega_4 - b_2\omega_9) + 2\,(b_1\omega_{13} - b_2\omega_{14})],$$
$$r_2^{(4)} = 2\,(1-\nu)(\omega_2 - b_1\omega_9) + 4\,\{b_2[(1-\nu)\,\omega_{13} + \omega_{15}] - b_1\omega_{14}\},$$

где

$$\omega_1 = B_1(z_1)\,\partial_1\Psi_1 + B_2(z_1)\,\partial_1\Psi_2;\quad \omega_2 = B_2(z_1)\,\partial_1\Psi_1 - B_1(z_1)\,\partial_1\Psi_2;$$
$$\omega_3 = B_1(z_1)\,\partial_2\Psi_1 + B_2(z_1)\,\partial_2\Psi_2;\quad \omega_4 = B_2(z_1)\,\partial_2\Psi_1 - B_1(z_1)\,\partial_2\Psi_2;$$
$$\omega_5 = m_1\,[\gamma_2(z_1)\,\partial_1^2\Psi_1 - \gamma_1(z_1)\,\partial_1^2\Psi_2];\quad \omega_6 = m_1\,[\gamma_2(z_1)\,\partial_1\partial_2\Psi_1 - \gamma_1(z_1)\,\partial_1\partial_2\Psi_2];$$
$$\omega_7 = m_1\,[\gamma_1(z_1)\,\partial_1^2\Psi_1 + \gamma_2(z_1)\,\partial_1^2\Psi_2];$$
$$\omega_8 = m_1\,[\gamma_1(z_1)\,\partial_1\partial_2\Psi_1 + \gamma_2(z_1)\,\partial_1\partial_2\Psi_2];\quad \omega_9 = m\,[\gamma_2(z_1)\,\Psi_1 - \gamma_1(z_1)\,\Psi_2];$$
$$\omega_{10} = m\,[\gamma_1(z_1)\,\Psi_1 + \gamma_2(z_1)\,\Psi_2];\quad \omega_{11} = \int_0^{\eta-\zeta} \partial_2\omega_{10}\,d\eta;$$
$$\omega_{12} = \iint_0^{\eta-\zeta} \partial_2^2\omega_{10}\,d\eta\,d\eta;\quad \omega_{13} = \int_0^{\eta-\zeta} \partial_2\omega_9\,d\eta;\quad \omega_{14} = \iint_0^{\eta-\zeta} \partial_2^2\omega_9\,d\eta\,d\eta;$$
$$\omega_{15} = \iiint_0^{\eta-\zeta} \partial_2^3\omega_9\,d\eta\,d\eta\,d\eta;\quad \Psi_1 = \operatorname{ker}\beta\rho;\quad \Psi_2 = \operatorname{kei}\beta\rho;$$
$$z_1 = b_1(\eta-\zeta) - b_2\theta;\quad \rho^2 = (\eta-\zeta)^2 + \theta^2;\quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial\eta};\quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial\theta};$$
$$\eta = b_1s_1 + b_2s_2 + x_n\cos\beta_{nk};\quad \theta = -b_2s_1 + b_1s_2 + x_n\sin\beta_{nk};$$
$$s_1 = x_n^0 - x_k^0;\quad s_2 = y_n^0 - y_k^0;\quad \alpha_1 = \sin^2\beta_{nk};\quad \alpha_2 = \cos^2\beta_{nk};$$
$$\alpha_3 = \sin 2\beta_{nk};\quad \alpha_4 = \cos 2\beta_{nk};\quad \beta_{nk} = \beta_n - \beta_k;\quad m_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\,\beta};$$

$A_1 = A_2 = D_0$; $A_3 = A_4 = D_0Rc$; c_{nk} — постоянная интегрирования.

В силу линейности рассматриваемой задачи суммарные усилия и моменты на линии n-го разреза O_nX_n, вызванные всеми скачками перемещений и углов поворота на N разрезах $y_k=0$, $|x_k|\leqslant l_k$ $(k=\overline{1,N})$, получим путем суперпозиции усилий и моментов для изолированных разрезов

$$G_n^{(i)}=\sum_{k=1}^{N}G_{nk}^{(i)},\ |x_n|\leqslant l_n\quad (n=\overline{1,N};\ i=\overline{1,4}),\tag{52}$$

где $G_n^{(1)}=N_n$, $G_n^{(2)}=S_n$, $G_n^{(4)}=\int Q_n^{*}dx_n+c_n$— соответственно нормальное, касательное и обобщенное перерезывающее усилия; $G_n^{(3)}=M_n$ — изгибающий момент.

Приравнивая выражения (52) для усилий и моментов к заданным усилиям и моментам на берегах разрезов, для определения неизвестных функций получаем систему сингулярных интегральных уравнений

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{-l_k}^{l_k}[\Psi_{1k}(\zeta)K_{nk}^{(i)}(\zeta,x_n)+\Psi_{2k}(\zeta)L_{nk}^{(i)}(\zeta,x_n)+$$

$$+\Psi_{3k}(\zeta)P_{nk}^{(i)}(\zeta,x_n)+\Psi_{4k}(\zeta)R_{nk}^{(i)}(\zeta,x_n)]\,d\zeta=\frac{2\pi}{A_i}T_n^{(i)}(x_n),\tag{53}$$

$$|x_n|\leqslant l_n\quad (n=\overline{1,N};\ i=\overline{1,4}),$$

где $T_n^{(i)}$ — заданные на берегах разрезов усилия и моменты. Ядра системы уравнений (53) есть регулярные функции, за исключением случая $n=k$, когда ядра $K_{nk}^{(1)}$, $L_{nk}^{(2)}$, $P_{nk}^{(3)}$, $R_{nk}^{(4)}$ имеют сингулярности типа Коши.

В случае, когда в оболочке имеется четыре равноудаленных от начала координат XOY разреза (два продольных и два поперечных) одинаковой длины $2l$, которые образуют с осью OX углы $\beta_k=\frac{2\pi}{N}(k-1)$ $(k=\overline{1,4};\ N=4)$ и загружены попарно одинаковыми равномерно распределенными по длине разрезов усилиями $N_2(x,0)=-N_2^0$, $N_1(x,0)=-N_1^0$ и моментами $M_2(x,0)=-M_2^0$, $M_1(x,0)=-M_1^0$, действующими соответственно на продольных и поперечных разрезах, система интегральных уравнений (53) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{4}\int_{-l}^{l}\Psi_k(\zeta)K_{ik}(\zeta,\ x)\,d\zeta=f_i(x),\ |x|\leqslant l\ (i=\overline{1,4}).\tag{54}$$

Здесь

$$\Psi_1(\zeta)=\frac{d}{d\zeta}[v_1'(\zeta)],\ \Psi_2(\zeta)=-Rc\frac{d}{d\zeta}[\theta_{21}(\zeta)],\ \Psi_3=\frac{d}{d\zeta}[v_2(\zeta)],$$

$$\Psi_4(\zeta)=-Rc\frac{d}{d\zeta}[\theta_{22}(\zeta)],\ K_{11}=-\frac{a_1}{z_1}+K_{11}^0,$$

$$K_{22}=-\frac{a_2}{z_1}+K_{22}^0,\ K_{33}=-\frac{a_1}{z_1}+K_{33}^0,\ K_{44}=-\frac{a_2}{z_1}+K_{44}^0,\ z_1=x-\zeta,$$

$$K_{11}^0=K_{11}^2(z_1)+K_{11}^2(z_2),\ K_{22}^0=K_{33}^2(z_1)+K_{33}^2(z_2),\ K_{33}^0=K_{11}^1(z_1)+$$

$$+K_{11}^1(z_2),\ K_{44}^0=K_{33}^1(z_1)+K_{33}^1(z_2),\ z_2=-(x+\zeta+2d),\ K_{12}=K_{21}=$$

$$=K_{13}^2(z_1)+K_{13}^2(z_2),\ K_{13}=2K_{11}^1(s,t),\ K_{14}=K_{23}=2K_{13}^1(s,t),$$

$$K_{24}=2K_{33}^1(s,t),\ K_{31}=2K_{11}^2(s,t),\ K_{32}=K_{41}=2K_{13}^2(s,t),$$

$$K_{34}=K_{43}=K_{13}^1(z_1)+K_{13}^1(z_2),\ K_{42}=2K_{33}^2(s,t),$$

$$K_{11}^2(z_i)=2[\varphi_2(z_i)+\varphi_3(z_i)]-\varphi_6(z_i),\quad K_{13}^2(z_i)=2\nu[\varphi_1(z_i)+\varphi_4(z_i)]-$$

$$-(1-\nu)\varphi_5(z_i),\ K_{33}^2(z_i)=2(1-\nu^2)\varphi_2(z_i)-2(1+\nu^2)\varphi_3(z_i)+$$

$$+(1-\nu)^2\varphi_6(z_i),\ K^1_{11}(z_i)=\omega_1(z_i),\ K^1_{13}(z_i)=(1+\nu)\,\omega_2(z_i),$$

$$K^1_{33}(z_i)=a_2\omega_1(z_i)+\omega_3(z_i),\ \varphi_1(z_i)=[B_1(z_i)\beta|z_i|\operatorname{ker}'\beta|z_i|+$$

$$+B_2(z_i)\beta|z_i|\operatorname{kei}'\beta|z_i|]\frac{1}{z_i},\ \varphi_2(z_i)=[B_2(z_i)\beta|z_i|\operatorname{ker}'\beta|z_i|-$$

$$-B_1(z_i)\beta|z_i|\operatorname{kei}'\beta|z_i|]\frac{1}{z_i}+\frac{1}{z_i}\delta_{1i},\ \varphi_3(z_i)=m[\gamma_2(z_i)\operatorname{ker}\beta|z_i|-$$

$$-\gamma_1(z_i)\operatorname{kei}\beta|z_i|],\ \varphi_4(z_i)=m[\gamma_1(z_i)\operatorname{ker}\beta|z_i|+\gamma_2(z_i)\operatorname{kei}\beta|z_i|],$$

$$\varphi_5(z_i)=[\gamma_2(z_i)\operatorname{ker}'\beta|z_i|-\gamma_1(z_i)\operatorname{kei}'\beta|z_i|]\frac{m}{\beta|z_i|},$$

$$\varphi_6(z_i)=[\gamma_1(z_i)\operatorname{ker}'\beta|z_i|+\gamma_2(z_i)\operatorname{kei}'\beta|z_i|]\frac{m}{\beta|z_i|}+\frac{1}{z_i}\delta_{1i},$$

$$\omega_1(z_i)=(\beta|z_i|\operatorname{ker}'\beta|z_i|+\delta_{1i})\frac{1}{z_i},\ \omega_2(z_i)=\beta|z_i|\operatorname{kei}'\beta|z_i|\frac{1}{z_i}\quad(i=1,\ 2),$$

δ_{ik} — символ Кронекера,

$$\omega_3(z_1)=4\beta^2\int\limits_0^{z_1}\operatorname{kei}\beta|\eta|\,d\eta,\ \omega_3(z_2)=4\beta^2\int\limits_{2s}^{z_2}\operatorname{kei}\beta|\eta|\,d\eta,$$

$$K^1_{11}(s,t)=\Phi^0_2-\Phi^0_6,\ K^1_{13}(s,t)=(1+\nu)\,\Phi^0_1-(1-\nu)\,\Phi^0_5,\ K^{(1)}_{33}(s,t)=$$

$$=a_2\Phi^0_2+(1-\nu)^2\,\Phi^0_6+4\beta^2\int\limits_x^{\zeta}(\Phi^0_3-\Phi^0_4)\,dx,\ K^2_{11}(s,t)=2\Omega_1+\Omega_3+\Omega_5,$$

$$K^2_{13}(s,t)=2\nu\Omega_2+(1+\nu)\,\Omega_4+(1-\nu)\,\Omega_6,\ K^2_{33}(s,t)=2(1-\nu^2)\,\Omega_1-$$

$$-(1+\nu)^2\,\Omega_3-(1-\nu)^2\,\Omega_5,\ s=-(\zeta+d),\ t=x+d,$$

$$\Phi^0_1=\beta[B_1(t)\operatorname{ker}'\beta\rho+B_2(t)\operatorname{kei}'\beta\rho]\frac{s}{\rho},\ \Phi^0_2=\beta[B_2(t)\operatorname{ker}'\beta\rho-$$

$$-B_1(t)\operatorname{kei}'\beta\rho]\frac{s}{\rho},\ \Phi^0_3=\frac{1}{\sqrt{2}}[\gamma_2(t)\operatorname{ker}'\beta\rho-\gamma_1(t)\operatorname{kei}'\beta\rho]\frac{t}{\rho},$$

$$\Phi^0_4=B_1(t)\operatorname{ker}\beta\rho+B_2(t)\operatorname{kei}\beta\rho,\ \Phi^0_5=-m[\gamma_2(t)\,\Psi_1(s,t)-\gamma_1(t)\,\Psi_2(s,t)],$$

$$\Phi^0_6=-m[\gamma_1(t)\,\Psi_1(s,t)+\gamma_2(t)\,\Psi_2(s,t)],\ \Omega_1=\beta[B_2(s)\operatorname{ker}'\beta\rho-$$

$$-B_1(s)\operatorname{kei}'\beta\rho]\frac{s}{\rho},\ \Omega_2=\beta[B_1(s)\operatorname{ker}'\beta\rho+B_2(s)\operatorname{kei}'\beta\rho]\frac{s}{\rho},$$

$$\Omega_3=m[\gamma_2(s)\operatorname{ker}\beta\rho-\gamma_1(s)\operatorname{kei}\beta\rho],\ \Omega_4=m[\gamma_1(s)\operatorname{ker}\beta\rho+\gamma_2(s)\operatorname{kei}\beta\rho],$$

$$\Omega_5=-m[\gamma_1(s)\,\Psi^0_3(s,t)+\gamma_2(s)\,\Psi^0_4(s,t)],\ \Omega_6=-m[\gamma_2(s)\,\Psi^0_3(s,t)-$$

$$-\gamma_1(s)\,\Psi^0_4(s,t)],\ \Psi^0_1=L_1\frac{st}{\rho^2},\ \Psi^0_2=L_2\frac{st}{\rho^2},\ \Psi^0_3=L_1\frac{s^2}{\rho^2}-\frac{\operatorname{ker}'\beta\rho}{\beta\rho},$$

$$\Psi^0_4=L_2\frac{s^2}{\rho^2}-\frac{\operatorname{kei}'\beta\rho}{\beta\rho},\ L_1=\frac{2\operatorname{ker}'\beta\rho}{\beta\rho}+\operatorname{kei}\beta\rho,\ L_2=\frac{2\operatorname{kei}'\beta\rho}{\beta\rho}-\operatorname{ker}\beta\rho,$$

$$f_1=-\frac{4\pi}{D_0}N^0_2,\ f_2=-\frac{4\pi}{D_0Rc}M^0_2,\ f_3=-\frac{4\pi}{D_0}N^0_1,\ f_4=-\frac{4\pi}{D_0Rc}M^0_1,$$

$$a_1=1,\ a_2=3-2\nu-\nu^2,$$

d — расстояние от центра каждого разреза до начала координат x, y.

Если в системе интегральных уравнений (54) перейти к безразмерным координатам, отнесенным к полудлине разреза l, то решение вновь полученной системы уравнений можно построить одним из прямых методов [5, 6, 18]. Коэффициенты интенсивности [15] усилий K_1, K_1^* и моментов K_3, K_3^* определяются так:

в окрестности внешних вершин разрезов

$$K_i^+ = \lim_{x^* \to 1} \sqrt{2l(x^* - 1)}\, P_i^0(x^*, 0), \quad i = 1, 3, \tag{55}$$

в окрестности внутренних —

$$K_i^- = \lim_{x^* \to -1} \sqrt{2l\,|x^* + 1|}\, P_i^0(x^*, 0), \quad i = 1, 3. \tag{56}$$

Здесь K_1 и K_3 — соответственно коэффициенты интенсивности усилия $P_1^0 = N_2(x, 0)$ и момента $P_3^0 = M_2(x, 0)$ в окрестности продольных разрезов, а K_1^* и K_3^* — коэффициенты интенсивности усилия $P_1^0 = N_1(x, 0)$ и момента $P_3^0 = M_1(x, 0)$ в окрестности поперечных разрезов.

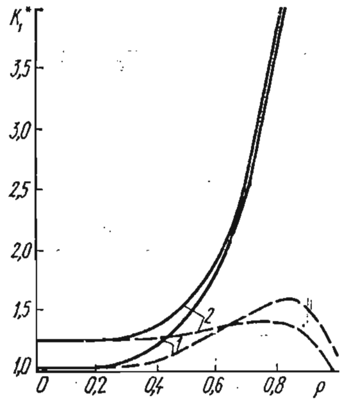

Рис. 2

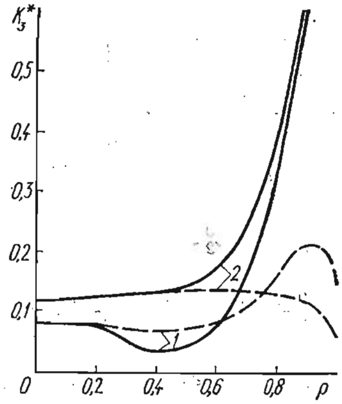

Рис. 3

В случае, когда берега разрезов загружены одинаковыми нормальными усилиями постоянной интенсивности N^0, на ЭВМ «Минск-32» произведен численный анализ задачи. Вычисления произведены для следующих значений параметров: $R = 0{,}15$ м; $2h = 0{,}003$ м; $\nu = 0{,}3$ при наличии в оболочке четырех разрезов одинаковой длины $l = 0{,}0116$ м. Для построения решения системы интегральных уравнений (54) использован прямой метод решения сингулярных интегральных уравнений [6].

На рис. 2 приведена зависимость относительного коэффициента интенсивности $K_1^* = K_1/N^0\sqrt{l}$ от параметра $\rho = l/d$ для внутренних вершин разрезов (сплошные линии) и внешних (штриховые). Кривые *1* соответствуют изменению коэффициента интенсивности у вершин поперечных разрезов, кривые *2* — у вершин продольных. Как видно из графиков, по мере сближения разрезов (трещин) величина коэффициента интенсивности для внутренних вершин монотонно возрастает, стремясь к бесконечности, в то время как у внешних вершин изменение его носит немонотонный характер. На рис. 3 приведены аналогичные кривые изменения относительного коэффициента $K_3^* = K_3/N^0\sqrt{lRc}$ от параметра ρ.

Задача об упругом равновесии пологой сферической оболочки с системой произвольно ориентированных трещин (разрезов) рассмотрена в работе [13].

Трансверсально-изотропные оболочки. Рассмотрим упругое равновесие оболочки с разрезами, обладающей анизотропией специального вида, когда в каждой точке материала имеется поверхность изотропии. Этот вид упругой анизотропии — трансверсальная изотропия — имеет место в ряде слоистых материалов, широко применяющихся в современной технике. При получении исходных соотношений состояния трансверсально-изотропных оболочек с разрезами (трещинами) воспользуемся подходом, основанным на применении модели С. П. Тимошенко (сдвиговой модели) [16].

Для трансверсально-изотропного материала с учетом статической гипотезы $\sigma_{33}\approx 0$ [16] компоненты тензора упругой деформации e_{ij}^s связаны с компонентами тензора напряжений σ_{ij} соотношениями

$$e_{11}^s = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \quad e_{22}^s = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11});$$
$$e_{12}^s = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{12}, \quad e_{13}^s = \frac{1}{G'}\sigma_{13}, \quad e_{23}^s = \frac{1}{G'}\sigma_{23}, \tag{57}$$

где G' — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных срединной поверхности. На основании соотношений (1), (57) записываем

$$\sigma_{ii} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[e_{ii} + \nu e_{jj} - (e_{ii}^0 + e_{jj}^0)\right] \quad (i \neq j = 1, 2), \tag{58}$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}(e_{12} - e_{12}^0), \quad \sigma_{13} = G'(e_{13} - e_{13}^0), \quad \sigma_{23} = G'(e_{23} - e_{23}^0). \tag{59}$$

Используя эти выражения и формулы, связывающие компоненты деформации e_{ij} в произвольной точке оболочки с компонентами деформации ее срединной поверхности ε_{ij}, $\varkappa_{ij}$ [16], для удельной работы деформации трансверсально-изотропной оболочки, находящейся под воздействием заданного поля дисторсий, получаем

$$V = \frac{Eh}{1-\nu^2}\Big\{(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 - 2(1-\nu)\left(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \frac{1}{4}\varepsilon_{12}^2\right) + \frac{G'(1-\nu^2)}{E}(\varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2) +$$
$$+ \frac{h^2}{3}\left[(\varkappa_{11} + \varkappa_{22})^2 - 2(1-\nu)(\varkappa_{11}\varkappa_{22} - \varkappa_{12}^2)\right] - 2\left[\varepsilon_{11}(\varepsilon_{11}^0 + \nu\varepsilon_{22}^0) +\right.$$
$$+ \varepsilon_{22}(\varepsilon_{22}^0 + \nu\varepsilon_{11}^0) + \frac{1-\nu}{2}\varepsilon_{12}\varepsilon_{12}^0 + \frac{G'(1-\nu^2)}{E}(\varepsilon_{13}\varepsilon_{13}^0 + \varepsilon_{23}\varepsilon_{23}^0)\Big] -$$
$$- \frac{2h^2}{3}\left[\varkappa_{11}(\varkappa_{11}^0 + \nu\varkappa_{22}^0) + \varkappa_{22}(\varkappa_{22}^0 + \nu\varkappa_{11}^0) + 2(1-\nu)\varkappa_{12}\varkappa_{12}^0\right]\Big\}. \tag{60}$$

Здесь ε_{ij}, ε_{ij}^0, $\varkappa_{ij}^0$ $(i = j = 1, 2)$ выражаются формулами (8), (10);

$$\varepsilon_{13} = \gamma_1 + \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1, \quad \varepsilon_{23} = \gamma_2 + \frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - k_2 v,$$
$$\varkappa_{11} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\gamma_2}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \quad \varkappa_{22} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\gamma_1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}, \tag{61}$$
$$2\varkappa_{12} = \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{\gamma_1}{A_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{\gamma_2}{A_2}\right) + k_1\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\right) +$$
$$+ k_2\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\right), \quad \varepsilon_{j3}^0 = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} e_{j3}^0 d\gamma \quad (j = 1, 2),$$

γ_1, γ_2 — обобщенные перемещения (углы поворота нормального волокна в плоскости $\alpha_1\gamma$, $\alpha_2\gamma$).

На основании выражения для удельной работы (60) и ее дифференциала [16]

$$dV = N_1 d\varepsilon_{11} + S_{12} d\varepsilon_{12} + N_2 d\varepsilon_{22} + Q_1 d\varepsilon_{13} + Q_2 d\varepsilon_{23} + M_1 d\varkappa_{11} +$$
$$+ 2H_{12} d\varkappa_{12} + M_2 d\varkappa_{22} \tag{62}$$

устанавливаем связь между усилиями, моментами и компонентами деформации срединной поверхности. При этом соотношения для N_i, M_i $(i = 1, 2)$, S_{12}, H_{12} совпадают с выражениями (11), а для определения перерезывающих усилий Q_1, Q_2 имеем формулы

$$Q_1 = \Lambda'(\varepsilon_{13} - \varepsilon_{13}^0), \quad Q_2 = \Lambda'(\varepsilon_{23} - \varepsilon_{23}^0), \tag{63}$$

где $\Lambda' = 2k'G'h$; k' — введенный для этих усилий коэффициент сдвига. Решив соотношения (11), (63) относительно компонент деформации, получим

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^s + \varepsilon_{ij}^0, \quad \varkappa_{ij} = \varkappa_{ij}^s + \varkappa_{ij}^0, \tag{64}$$

где

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{ii}^s = \frac{1}{2Eh}(N_i - \nu N_j); \quad \varkappa_{ii}^s = \frac{3}{2Eh^3}(M_i - \nu M_j), \quad i \neq j = 1, 2; \\
\varepsilon_{12}^s = \frac{1+\nu}{Eh} S_{12}; \quad \varepsilon_{13}^s = \frac{Q_1}{\Lambda'}; \quad \varepsilon_{23}^s = \frac{Q_2}{\Lambda'}; \quad \varkappa_{12}^s = \frac{3(1+\nu)}{2Eh^3} H_{12}.
\end{gathered} \tag{65}$$

Подставляя приведенные соотношения в уравнения равновесия и совместности деформаций [16], аналогично случаю изотропных оболочек получим разрешающие уравнения трансверсально-изотропных оболочек, находящихся под воздействием поля дисторсий. Так, для круговой цилиндрической оболочки в рамках технической теории систему разрешающих уравнений можно представить в форме

$$\begin{gathered}
D_1\nabla^2\nabla^2 w + (1 - \eta\nabla^2) R \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} = D_1 R^2 \left[\frac{1}{R}\nabla^2\left(\frac{\partial \varepsilon_{13}^0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varepsilon_{23}^0}{\partial \beta}\right) - \right. \\
\left. - \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}(\varkappa_{11}^0 + \nu\varkappa_{22}^0) - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}(\varkappa_{22}^0 + \nu\varkappa_{11}^0) - (1-\nu)\frac{\partial^2 \varkappa_{12}^0}{\partial\alpha\partial\beta}\right], \\
\frac{1}{D_0 R}\nabla^2\nabla^2 F - \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = -R\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}^0}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}^0}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}^0}{\partial\alpha\partial\beta}\right), \\
\nabla^2\varphi - \delta^2\varphi = \eta R^2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(\varkappa_{11}^0 - \varkappa_{22}^0) + \right. \\
\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\right)\varkappa_{12}^0\right] + R\left(\frac{\partial \varepsilon_{23}^0}{\partial \alpha} - \frac{\partial \varepsilon_{13}^0}{\partial \beta}\right).
\end{gathered} \tag{66}$$

При этом усилия и моменты определяются по формулам

$$\begin{gathered}
N_1 = \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}, \quad N_2 = \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}, \quad S = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta}, \\
M_1 = -D_1\left[\frac{1}{R}\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha} + \nu\frac{\partial \gamma_2}{\partial \beta}\right) - \varkappa_{11}^0 - \nu\varkappa_{22}^0\right], \\
M_2 = -D_1\left[\frac{1}{R}\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial \beta} + \nu\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha}\right) - \varkappa_{22}^0 - \nu\varkappa_{11}^0\right], \\
H = \frac{1-\nu}{2} D_1\left[\frac{1}{R}\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha}\right) - \varkappa_{12}^0\right], \\
Q_1 = \frac{D_1}{\varepsilon}\left(\gamma_1 + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \varepsilon_{13}^0\right), \quad Q_2 = \frac{D_1}{\varepsilon}\left(\gamma_2 + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \beta} - \varepsilon_{23}^0\right),
\end{gathered} \tag{67}$$

где

$$\begin{gathered}
\gamma_1 = -\frac{1}{R}\frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} + \frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \eta R\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(\varkappa_{11}^0 + \nu\varkappa_{22}^0) + \frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial \varkappa_{12}^0}{\partial \beta} - \frac{\varepsilon_{13}^0}{\eta R}\right]; \\
\gamma_2 = -\frac{1}{R}\frac{\partial \Gamma}{\partial \beta} - \frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \eta R\left[\frac{\partial}{\partial \beta}(\varkappa_{22}^0 + \nu\varkappa_{11}^0) + \frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial \varkappa_{12}^0}{\partial \alpha} - \frac{\varepsilon_{23}^0}{\eta R}\right]; \\
\Gamma = w + \eta\nabla^2 w - \frac{R\eta^2}{D_1}\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} - R\eta\left(\frac{\partial \varepsilon_{13}^0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varepsilon_{23}^0}{\partial \beta}\right); \\
\delta^2 = \frac{2}{\eta(1-\nu)}; \quad \eta = \frac{\varepsilon}{R^2}; \quad \varepsilon = \frac{h^2}{3k'(1-\nu^2)}\frac{E}{G'}.
\end{gathered}$$

Первые два уравнения (66) можно представить в ином виде, если ввести в рассмотрение потенциальную функцию $\Psi(\alpha, \beta)$ следующим образом:

$$F = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\Psi, \quad w = \frac{1}{D_0 R}\nabla^2\nabla^2\Psi + \Psi^0. \tag{68}$$

Тогда, подставляя эти формулы во второе уравнение (66), для определения функции Ψ^0 получаем соотношение

$$\frac{\partial^2\Psi^0}{\partial\alpha^2} = R\left(\frac{\partial^2\varepsilon_{11}^0}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}^0}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\varepsilon_{12}^0}{\partial\alpha\partial\beta}\right). \tag{69}$$

На основании первого уравнения (66) для определения функции Ψ получаем разрешающее уравнение

$$\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2\Psi + c^{-2}(1-\eta\nabla^2)\frac{\partial^4\Psi}{\partial\alpha^4} = D_0R^3\left[\frac{1}{R}\nabla^2\left(\frac{\partial\varepsilon_{13}^0}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varepsilon_{23}^0}{\partial\beta}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(\varkappa_{11}^0 + \nu\varkappa_{22}^0) - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(\varkappa_{22}^0 + \nu\varkappa_{11}^0) - (1-\nu)\frac{\partial^2\varkappa_{12}^0}{\partial\alpha\partial\beta}\right] - D_0R\nabla^2\nabla^2\Psi^0. \tag{70}$$

Рассмотрим упругое равновесие тонкой трансверсально-изотропной оболочки с системой сквозных разрезов, произвольным образом расположенных вдоль координатных линий. Допустим, что оболочка находится под действием внешней нагрузки и к противоположным берегам разрезов приложены равные по величине и противоположно направленные усилия и моменты. Если к берегам разрезов приложена произвольная нагрузка, то, как и в случае плоской задачи [15], рассматриваемую задачу можно свести к случаю самоуравновешенной нагрузки на берегах разрезов и несамоуравновешенной на месте разреза в сплошной оболочке. Напряженное состояние в сплошной оболочке при произвольной нагрузке будем считать известным.

Граничные условия на контуре разреза $l_{p\nu}$, расположенного вдоль линии $\alpha_1 = \alpha_p^0$, в этом случае будут такими:

$$\begin{gathered} N_1^+ = N_1^- = \hat{N}_1^{l_{p\nu}}(\alpha_2), \quad S_{12}^+ + k_2H_{12}^+ = S_{12}^- + k_2H_{12}^- = \hat{S}^{l_{p\nu}}(\alpha_2), \\ Q_1^+ = Q_1^- = Q_1^{l_{p\nu}}(\alpha_2), \quad M_1^+ = M_1^- = M_1^{l_{p\nu}}(\alpha_2), \quad H_{12}^+ = H_{12}^- = H_{12}^{l_{p\nu}}(\alpha_2). \end{gathered} \tag{71}$$

Аналогично на контуре разреза q_{rs}, расположенного вдоль линии $\alpha_2 = \alpha_r$,

$$\begin{gathered} N_2^+ = N_2^- = \hat{N}_2^{q_{rs}}(\alpha_1), \quad S_{12}^+ + k_1H_1^+ = S_{12}^- + k_2H_{12}^- = \hat{S}^{q_{rs}}(\alpha_1), \\ Q_2^+ = Q_2^- = \hat{Q}_2^{q_{rs}}(\alpha_1), \quad M_2^+ = M_2^- = \hat{M}_2^{q_{rs}}(\alpha_1), \quad H_{12}^+ = H_{12}^- = H_{12}^{q_{rs}}(\alpha_1). \end{gathered} \tag{72}$$

Здесь и далее обозначения те же, что и в случае изотропной оболочки.

Учитывая, что обобщенные смещения u, v, w, γ_1, γ_2 претерпевают скачки при переходе через линии разрезов, и рассматривая их как обобщенные функции, на основании соотношений (8), (10), (11), (63) с учетом условий (71), (72) для компонентов тензора дисторсий получаем выражение

$$\varepsilon_{11}^0 = \sum\nolimits_1 \frac{1}{A_1^p}[u(\alpha_2)]_{l_{p\nu}}\delta(\alpha_1 - \alpha_p^0), \quad \varepsilon_{22}^0 = \sum\nolimits_2 \frac{1}{A_2^r}[v(\alpha_1)]_{q_{rs}}\delta(\alpha_2 - \alpha_r^0),$$

$$\varepsilon_{12}^0 = \sum\nolimits_1 \frac{1}{A_1^p}[v(\alpha_2)]_{l_{p\nu}}\delta(\alpha_1 - \alpha_p^0) + \sum\nolimits_2 \frac{1}{A_2^r}[u(\alpha_1)]_{q_{rs}}\delta(\alpha_2 - \alpha_r^0),$$

$$\varepsilon_{13}^0 = \sum\nolimits_1 \frac{1}{A_1^p}[w(\alpha_2)]_{l_{p\nu}}\delta(\alpha_1 - \alpha_p^0), \quad \varepsilon_{23}^0 = \sum\nolimits_2 \frac{1}{A_2^r}[w(\alpha_1)]_{q_{rs}}\delta(\alpha_2 - \alpha_r^0),$$

$$\varkappa_{11}^0 = \sum\nolimits_1 \frac{1}{A_1^p}[\gamma_1(\alpha_2)]_{l_{p\nu}}\delta(\alpha_1 - \alpha_p^0), \quad \varkappa_{22}^0 = \sum\nolimits_2 \frac{1}{A_2^r}[\gamma_2(\alpha_1)]_{q_{rs}}\delta(\alpha_2 - \alpha_r^0),$$

$$2\varkappa_{12}^0 = \sum\nolimits_1 \frac{1}{A_1^p}\{[\gamma_2(\alpha_2)]_{l_{p\nu}} + k_2^p[v(\alpha_2)]_{l_{p\nu}}\}\delta(\alpha_1 - \alpha_p^0) +$$

$$+ \sum\nolimits_2 \frac{1}{A_2^r}\{[\gamma_1(\alpha_1)]_{q_{rs}} + k_1^r[u(\alpha_1)]_{q_{rs}}\}\delta(\alpha_2 - \alpha_r^0).$$

С использованием этих соотношений аналогично случаю изотропной оболочки задачу об упругом равновесии трансверсально-изотропной оболочки с k сквозными разрезами сводим к системе $5k$ сингулярных интегральных уравнений для нахождения функций, определяющих скачки обобщенных смещений.

Интегральные уравнения задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропной цилиндрической и пологой сферической оболочек с разрезами (трещинами) приведены в работах [11, 14].

Отметим, что использование сдвиговой модели в теории изотропных оболочек с разрезами позволяет уточнить результаты исследований, полученные на базе классической теории оболочек. Последнее достигается путем более точного удовлетворения граничным условиям на берегах разрезов, когда вместо принятого в классической теории условия на обобщенное в смысле Кирхгофа перерезывающее усилие удовлетворяются физически естественные граничные условия на перерезывающие усилия и крутящий момент.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике.— М. : Наука, 1976.— 280 с.
2. *Власов В. З.* Избранные труды.— М.: Изд-во АН СССР, 1962.— Т. 1. 528 с.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек.— М.: Наука, 1976.— 512 с.
4. *Даревский В. М.* Решение некоторых вопросов теории цилиндрической оболочки.— Прикл. математика и механика, 1952, **16**, вып. 2, с. 159—194.
5. *Иванов В. В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1968.— 288 с.
6. *Каландия А. И.* Замечание о креплении полуплоскости стрингером конечной длины.— В кн.: Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975, с. 211—215.
7. *Кренер Э.* Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений.— М.: Мир, 1965.— 104 с.
8. *Новацкий В.* Теория упругости.— М.: Мир, 1975.— 872 с.
9. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек.— Л.: Судпромгиз, 1962.— 432 с.
10. *Осадчук В. А.* Напряжения в замкнутой цилиндрической оболочке с системой коллинеарных трещин.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, № 7, с. 38—42.
11. *Осадчук В. А., Николишин М. М.* Напряженное состояние ослабленной трещиной замкнутой трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки с упругим заполнителем.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 7, с. 619—623.
12. *Осадчук В. А., Подстригач Я. С.* К определению напряженного состояния в замкнутой цилиндрической оболочке и бесконечной пластинке с трещинами.— Механика твердого тела, 1973, № 3, с. 69—78.
13. *Осадчук В. А., Федюк Е. М.* Система произвольно ориентированных трещин в пологой сферической оболочке.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 8, с. 711—715.
14. *Осадчук В. А., Федюк Е. М.* Интегральные уравнения задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропной пологой сферической оболочки с трещиной.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 2, с. 141—145.
15. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках.— Киев : Наук. думка, 1976.— 444 с.
16. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью.— Киев : Наук. думка, 1973.— 248 с.
17. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках.— К.: Вид-во АН УРСР, 1961.— 212 с.
18. *Попов Г. Я.* Об интегральных уравнениях теории упругости с разностными и суммарными ядрами.— Прикл. математика и механика, 1970, **34**, вып. 4, с. 603—619.
19. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек. Т. 1.— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1962.— 274 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
09.02.78

УДК 539.377

Г. С. Кит, И. П. Лысый

О ТЕРМОУПРУГОМ СОСТОЯНИИ ПОЛОСЫ С ТРЕЩИНАМИ

В работах [3, 4] рассмотрены задачи о термоупругом состоянии широкой и узкой полос с трещиной, когда грани полос свободны от усилий. В настоящей работе определяются коэффициенты интенсивности напряжений в широкой полосе с продольными трещинами, когда полоса зажата между двумя абсолютно жесткими гладкими основаниями либо жестко сцеплена с ними.