Вернемся теперь к сформулированной выше теореме 1. Матрица $P_0(x) \in \in \{P(x)\}$ представлялась в виде

$$P_0(x) = \left\| \begin{matrix} 1 & & & 0 \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_{21} & 1 & . & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} v_{n1} & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_2} v_{n2} & \ldots & 1 \end{matrix} \right\| P(x),$$

где $v_{ij} \in \mathbb{C}[x]$, а $P(x)$ — некоторая матрица из $\{P(x)\}$. Условие (4), как нетрудно проверить, не нарушится, если возьмем матрицу $P_0(x)$ в виде $P_0(x) = G(x) P(x)$, где $G(x)$ имеет вид (10), (30), а $P(x)$ — некоторая матрица из $\{P(x)\}$. Согласно предложению 5 ранг матрицы (28) не зависит от выбора $P(x)$, что и доказывает такую теорему.

Теорема 2. Для того чтобы $A(x) = B(x) C(x)$, где $B(x)$ — регулярный матричный многочлен степени r с формой Смита $\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, а $C(x)$ имеет ту же форму Смита, что и матрица $\operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rang} M_{N_{r-1}(x)}(\varphi) = nr,$$

где $N_{r-1}(x) = [\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)]_* G(x) P(x) \| E, Ex, \ldots, Ex^{r-1} \|$; $G(x)$ — матрица вида (10), (30), а $P(x)$ — произвольная матрица из класса $\{P(x)\}$.

Отметим, что множители $B(x)$ и $C(x)$ в условиях теоремы 2 зависят от конечного числа независимых переменных, являющихся коэффициентами многочленов g_{ij} в (30) (так называемое разложение матричного многочлена в произведение обобщенных множителей).

1. *Зелиско В. Р., Казимирский П. С.* К вопросу о разложении матричного многочлена на множители.— В кн.: 14-я Всесоюз. алгебраич. конф. : Тез. докл. Новосибирск, 1977, ч. 2, с. 30—31.
2. *Казімірський П. С.* Квазіунітальні і супровідні матриці матричних многочленів.— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К. : Наук. думка, 1977, с. 29—52.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 20.12.78

УДК 539.376

И. К. Сенченков, В. Г. Карнаухов

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ В СВЯЗАННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ

В статье [2] с использованием интеграла свертки сформулирован вариационный принцип связанной термовязкоупругости, характеризующий перемещение и поток энтропии. Установлено, что принцип является минимальным в области преобразованных по Лапласу переменных. Для доказательства минимальности принималось условие диссипативности [4], которое вообще не вытекает из термодинамики.

В настоящей работе минимальность указанного принципа доказывается на основе термодинамических неравенств и, кроме того, устанавливается минимальный принцип, характеризующий преобразованные напряжения и температуру. С использованием подхода, несколько отличного от [6], сформулированы соответствующие минимальные принципы в области физического времени.

Пусть u_i, ε_{ij} и σ_{ij} — декартовы компоненты вектора перемещения $\vec{u}$, тензоров инфинитезимальной деформации ε и напряжения σ; $T = T_0 + \theta$ — абсолютная температура; T_0 — отсчетная температура; q_i и s_i — компоненты векторов теплового потока $\vec{q}$ и потока энтропии $\vec{s}$, связанные соотношением

$$q_i = T_0 s_i^{(1)}, \tag{1}$$

где цифра в скобках означает производную по времени; ψ и η — свободная энергия Гельмгольца и энтропия на единицу объема.

Представим второй закон термодинамики в форме локального приведенного неравенства Планка и неравенства Фурье [3]

$$-\psi^{(1)} - \eta\theta^{(1)} + \sigma \cdot \varepsilon^{(1)} > 0 \qquad (A \cdot B = A_{ij}B_{ij}), \tag{2}$$

$$-\vec{q} \cdot \nabla\theta \geqslant 0 \qquad (\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i), \tag{3}$$

где ∇ — набла-оператор.

Рассмотрим линейные вязкоупругие материалы, для которых определяющие уравнения имеют вид

$$\sigma_{ij} = G_{ijkl}(0)\,\varepsilon_{kl}(t) - \varphi_{ij}(0)\,\theta(t) + \int_0^\infty [G_{ijkl}^{(1)}(s)\,\varepsilon_{kl}(t-s) - \varphi_{ij}^{(1)}(s)\,\theta(t-s)]\,ds, \tag{4}$$

$$\eta = \varphi_{ij}(0)\,\varepsilon_{ij}(t) = c_\varepsilon(0)\,\theta(t) + \int_0^\infty [\varphi_{ij}^{(1)}(s)\,\varepsilon_{ij}(t-s) + c_\varepsilon^{(1)}(s)\,\theta(t-s)]\,ds \tag{5}$$

или

$$\varepsilon_{ij} = K_{ijkl}(0)\,\sigma_{kl}(t) + d_{ij}(0)\,\theta(t) + \int_0^\infty [K_{ijkl}^{(1)}(s)\,\sigma_{kl}(t-s) + d_{ij}^{(1)}(s)\,\theta(t-s)]\,ds, \tag{6}$$

$$\eta = d_{ij}(0)\,\sigma_{ij}(t) + c_\sigma(0)\,\theta(t) + \int_0^\infty [d_{ij}^{(1)}(s)\,\sigma_{ij}(t-s) + c_\sigma^{(1)}(s)\,\theta(t-s)]\,ds. \tag{7}$$

Функции G_{ijkl}, φ_{ij}, c_ε и K_{ijkl}, d_{ij}, c_σ вообще могут зависеть от вектора положения $\vec{x}$ и удовлетворяют ограничениям

а) $G_{ijkl}(t) = G_{ijkl}(t) = G_{klij}(t)$, $\varphi_{ij}(t) = \varphi_{ji}(t)$,

$K_{ijkl}(t) = K_{jikl}(t) = K_{klij}(t)$, $d_{ij}(t) = d_{ji}(t)$, $t \geqslant 0$;

б) существует число $p_0 > 0$ такое, что интегралы

$$\{\bar{G}_{ijkl}, \bar{\varphi}_{ij}, \bar{c}_\varepsilon, \bar{K}_{ijkl}, \bar{d}_{ij}, \bar{c}_\sigma\}(\vec{x}, p) = \int_0^\infty \{G_{ijkl}, \varphi_{ij}, c_\varepsilon, K_{ijkl}, d_{ij}, c_\sigma\}(\vec{x}, t)\,e^{-pt}dt$$

сходятся равномерно для каждого $\vec{x}$, принадлежащего некоторой замкнутой ограниченной области $\bar{R}$ и $p \in [p_0, \infty)$.

Произвольную функцию $\varphi(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, удовлетворяющую условию б), будем называть оригиналом преобразования Лапласа.

Установим некоторые необходимые в дальнейшем неравенства.

Из соотношения (2) с использованием свойства минимальности свободной энергии в состоянии равновесия устанавливается неравенство [1]

$$\int_{t_0}^{t_1} (\sigma \cdot \varepsilon^{(1)} - \eta\theta^{(1)})\,dt \geqslant 0, \tag{8}$$

справедливое для любого циклического по ε и θ процесса из состояния равновесия; (t_0, t_1) — интервал времени, включающий цикл.

Пусть $\overset{0}{\varepsilon}$ — произвольный симметричный постоянный тензор второго ранга и $p > 0$ — произвольный скаляр. Рассмотрим циклический процесс

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \overset{0}{\varepsilon} t e^{-pt}, & t \geqslant 0, \end{cases} \qquad \theta(t) = 0, \quad -\infty < t < \infty. \tag{9}$$

Подстановка (9) в (8) с учетом (4) и (5) после некоторых преобразований дает

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dp}\,[p\bar{G}(p)\,\overset{0}{\varepsilon}\cdot\overset{0}{\varepsilon}] \geqslant 0 \quad (\bar{G}\overset{0}{\varepsilon}\cdot\overset{0}{\varepsilon} = \bar{G}_{ijkl}\overset{0}{\varepsilon}_{kl}\overset{0}{\varepsilon}_{ij}). \tag{10}$$

Умножая (10) на $p > 0$, интегрируя по p в пределах от 0 до p с использованием теоремы о предельных значениях, получаем

$$[p\bar{G}(p) - G(\infty)]\,\overset{0}{\varepsilon}\cdot\overset{0}{\varepsilon} \geqslant 0. \tag{11}$$

Примем допущение: тензор $G(\infty)$ является положительно полуопределенным. Тогда из неравенства (11) следует, что для любых симметричных $\overset{0}{\varepsilon}$

$$\bar{G}(p)\,\overset{0}{\varepsilon}\cdot\overset{0}{\varepsilon} \geqslant 0, \quad p > 0. \tag{12}$$

Пусть теперь $\overset{0}{\theta} > 0$ и $p > 0$ — произвольные скаляры. Рассмотрим циклический процесс

$$\varepsilon(t) = 0, \quad -\infty < t < \infty, \quad \theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \overset{0}{\theta} t e^{-pt}, & t \geqslant 0. \end{cases} \tag{13}$$

Подстановка (13) в (8) с последующим умножением на p и интегрированием от p до ∞ дает

$$c_\varepsilon(0) - p\bar{c}_\varepsilon(p) \leqslant 0. \tag{14}$$

Предполагая, что $c_\varepsilon(0) \geqslant 0$, получаем

$$\bar{c}_\varepsilon(p) \geqslant 0, \quad p > 0. \tag{15}$$

Введем свободную энергию Гиббса H на единицу объема:

$$H = \sigma\cdot\varepsilon - \psi. \tag{16}$$

В терминах функции H неравенство (2) примет вид

$$H^{(1)} - \sigma^{(1)}\cdot\varepsilon - \eta\theta^{(1)} \geqslant 0. \tag{17}$$

Из соотношения (17) с использованием свойства максимальности H в состоянии равновесия аналогично [1] устанавливается неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} (\sigma^{(1)}\cdot\varepsilon + \eta\theta^{(1)})\,dt \leqslant 0, \tag{18}$$

справедливое для любого процесса, циклического по σ и θ и начинающегося из состояния равновесия.

Рассмотрим циклический процесс

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \overset{0}{\sigma} t e^{-pt}, & t \geqslant 0, \end{cases} \qquad \theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \overset{0}{\theta} t e^{-pt}, & t \geqslant 0. \end{cases} \tag{19}$$

Подставляя (19) в (18) с учетом (6), (7) и принимая допущение

$$K(0)\overset{0}{\sigma}\cdot\overset{0}{\sigma}+2d(0)\cdot\overset{0}{\sigma}\overset{0}{\theta}+c_\sigma(0)\overset{0}{\theta}{}^2\geqslant 0,$$

для любых постоянных симметричных тензоров $\overset{0}{\sigma}$ и скаляров $\overset{0}{\theta}$ получаем

$$\overline{K}(p)\overset{0}{\sigma}\cdot\overset{0}{\sigma}+2\overline{d}(p)\cdot\overset{0}{\sigma}\overset{0}{\theta}+\overline{c}_\sigma(p)\overset{0}{\theta}{}^2\geqslant 0,\ p>0. \tag{20}$$

Определяющее соотношение для теплового потока принимается в форме Фурье

$$q_i=-k_{ij}\theta_{,j}, \tag{21}$$

или в терминах потока энтропии

$$\theta_{,i}=-T_0\lambda_{ij}s_j,\quad \lambda=k^{-1}, \tag{22}$$

где тензор теплопроводности k и тензор λ предполагаются симметричными и согласно неравенству (3) положительно полуопределенными:

$$k_{ij}a_ia_j\geqslant 0,\quad \lambda_{ij}a_ia_j\geqslant 0 \tag{23}$$

для любых векторов $\vec{a}$.

Пусть R — область, занятая телом; B_u, B_σ и B_θ, B_q — непересекающиеся части границы B; $B=B_u\cup B_\sigma=B_\theta\cup B_q$; $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к B; $\rho(\vec{x})>0$ — плотность; $F_i(\vec{x}, t)$ и $r(\vec{x}, t)$ — массовые силы и источники тепла.

Уравнения поля связанной термовязкоупругости состоят из определяющих уравнений (4), (5), (22) или (6), (7), (21), соотношений Коши

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=u_{(i,j)}, \tag{24}$$

уравнения движения

$$\sigma_{ij,j}+\rho F_i=\rho u_i^{(2)},\quad \sigma_{ij}=\sigma_{ji} \tag{25}$$

и уравнения энергии

$$T_0\eta^{(1)}=-q_{i,i}+\rho r \tag{26}$$

или

$$\eta^{(1)}=-s_{i,i}^{(1)}+\rho r/T_0. \tag{27}$$

Уравнения поля необходимо дополнить граничными условиями

$$u_i=\hat{u}_i(\vec{x}, t),\quad B_u\times(-\infty, \infty), \tag{28}$$

$$t_i=\sigma_{ij}n_j=\hat{t}_i(\vec{x}, t)\quad B_\sigma\times(-\infty, \infty), \tag{29}$$

$$\theta=\hat{\theta}(\vec{x}, t),\quad B_\theta\times(-\infty, \infty), \tag{30}$$

$$q=q_in_i=\hat{q}(\vec{x}, t),\quad B_q\times(-\infty, \infty), \tag{31}$$

или

$$\dot{\varkappa}=s_in_i=\hat{\varkappa}(\vec{x}, t),\quad B_q\times(-\infty, \infty). \tag{32}$$

Термовязкоупругим состоянием назовем набор функций $\Lambda=\{u_i,\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, \theta, \eta, s_i$ (или q_i)$\}$, определенных на $\overline{R}\times(-\infty, \infty)$, которые удовлетворяют уравнениям поля (4), (5) (или (6), (7)), (24), (25), (27) (или (26)).

Для правильной постановки задачи с начальными значениями следует учесть историю состояния вплоть до некоторого отсчетного момента, скажем,

$t = 0$. Начальной историей назовем набор функций $\Lambda' = \{u_i', \varepsilon_{ij}', \sigma_{ij}', \theta', \eta', s_i'$ (или $q_i')\}$, определенных на $\overline{R} \times (-\infty, 0)$ и удовлетворяющих уравнениям поля и граничным условиям (28) — (31) (или (32)). Ниже начальная история предполагается известной.

Решением смешанной задачи назовем термовязкоупругое состояние, которое имеет начальную историю Λ' и удовлетворяет граничным условиям (28) — (31) (или (32)) при $t \geqslant 0$.

Компоненты u_i предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми, а η и s_i — непрерывно дифференцируемыми функциями времени. Поэтому u_i, η и s_i автоматически удовлетворяют начальным условиям

$$(u_i,\ u_i^{(1)},\ \eta,\ s_i)(\vec{x},\ 0) = \lim_{t\to 0-} (u_i',\ u_i'^{(1)},\ \eta',\ s_i')(\vec{x},\ t) = (u_i^0,\ v_i^0,\ \eta^0,\ s_i^0)(\vec{x}).$$

Будем предполагать, что функции, входящие в Λ, а также функции F_i, r, $\hat{u}_i$, $\hat{t}_i$, $\hat{\theta}$, $\hat{q}$ и $\hat{\varkappa}$ при $t \geqslant 0$ являются оригиналами. Если Λ — состояние с начальной историей Λ', то уравнения (5), (6) и (7), (8) можно представить в виде

$$\begin{gathered}\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^+ + (G_{ijkl} * \varepsilon_{kl} - \varphi_{ij} * \theta)^{(1)}, \quad \eta = \eta_\varepsilon^+ + (\varphi_{ij} * \varepsilon_{ij} + c_\varepsilon * \theta)^{(1)}, \\ \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^+ + (K_{ijkl} * \sigma_{kl} + d_{ij} * \theta)^{(1)}, \quad \eta = \eta_\sigma^+ + (d_{ij} * \sigma_{ij} + c_\sigma * \theta)^{(1)}, \quad t \geqslant 0,\end{gathered} \tag{33}$$

где $a(t) * b(t) = \int\limits_0^t a(t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau$ — свертка двух функций, и

$$\sigma_{ij}^+(\vec{x},\ t) = \int\limits_0^\infty [G_{ijkl}^{(1)}(\vec{x},\ t+s)\, \varepsilon_{kl}'(\vec{x},\ -s) - \varphi_{ij}^{(1)}(\vec{x},\ t+s)\, \theta'(\vec{x},\ -s)]\, ds,$$

$$\eta_\varepsilon^+(\vec{x},\ t) = \int\limits_0^\infty [\varphi_{ij}^{(1)}(\vec{x},\ t+s)\, \varepsilon_{ij}'(\vec{x},\ -s) + c_\varepsilon^{(1)}(\vec{x},\ t+s)\, \theta'(x,\ -s)]\, ds, \quad t \geqslant 0.$$

Аналогично определяются функции $\varepsilon^+(\vec{x},\ t)$ и $\eta_\sigma^+(\vec{x},\ t)$. Очевидно, в случае нулевой предыстории величины σ_{ij}^+, η_ε^+, ε_{ij}^+ и η_σ^+ обращаются в нуль.

Рассмотрим формулировку смешанной задачи в терминах u_i и s_i. Будем говорить, что $\vec{u}$ и $\vec{s}$ есть поля перемещения и потока энтропии, соответствующие решению смешанной задачи, тогда и только тогда, если существуют функции ε_{ij}, σ_{ij}, θ и η такие, что $\{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, \theta, \eta, s_i\}$ есть решение смешанной задачи.

Следующее утверждение обобщает результат работы [5] на случай связанной термовязкоупругости: функции u_i и s_i есть поля перемещения и потока энтропии, соответствующие решению смешанной задачи, тогда и только тогда, если $u_i = u_i'$ и $s_i = s_i'$ при $t < 0$ и

$$g * [\sigma_{ij}^+ + (G_{ijkl} * u_{k,l} - \varphi_{ij} * \theta)^{(1)}] + f_i = \rho u_i, \tag{34}$$

$$g * \theta_{,j} + h * T_0 \lambda_{ij} s_i - b_j = 0, \quad R \times [0,\ \infty), \tag{35}$$

$$g * s_{i,i} + h * (\varphi_{ij} * u_{i,j} + c_\varepsilon * \theta) + d = 0, \tag{36}$$

$$u_i = \hat{u}_i, \qquad B_u \times [0,\ \infty), \tag{37}$$

$$t_i = [\sigma_{ij}^+ + (G_{ijkl} * u_{k,l} - \varphi_{ij} * \theta)^{(1)}]\, n_j = \hat{t}_i, \quad B_\sigma \times [0,\ \infty), \tag{38}$$

$$\theta = \hat{\theta}, \qquad B_\theta \times [0,\ \infty), \tag{39}$$

$$\varkappa = s_i n_i = \hat{\varkappa}, \qquad B_q \times [0,\ \infty), \tag{40}$$

где $h(t) = 1$, $g(t) = t$, $m(t) = \frac{1}{2} t^2$, $0 \leqslant t < \infty$; $b_i = T_0 \lambda_{ij} s_j^0 (\vec{x})\, t$;

$$f_i(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}) [g * F_i(\vec{x}, t) + u_i^0 (\vec{x}) + t v_i^0 (\vec{x})];$$

$$d(\vec{x}, t) = g * \eta_\varepsilon^+ (\vec{x}, t) - \frac{1}{2} [s_{i,i}^0 (\vec{x}) - \eta^0 (\vec{x})]\, t^2 - m * \rho(\vec{x})\, r(\vec{x}, t)/T_0.$$

Отметим, что входящая в приведенные выше соотношения температура θ может быть легко исключена с помощью уравнения (36) с использованием преобразования Лапласа.

Обозначим через U множество наборов $\{u_i, s_i\}$, имеющих начальную историю u_i' и s_i' и удовлетворяющих граничным условиям (37) и (40). Следующий стационарный вариационный принцип отвечает системе (35) — (40).

Пусть $\Gamma = \{u_i, s_i\} \in U$. Для каждого $t \in [0, \infty)$ определим функционал $\mu_t(\cdot)$ на U:

$$\mu_t(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_R [h * (G_{ijkl} * u_{k,l} * u_{i,j} + c_\varepsilon * \theta * \theta + T_0 \lambda_{ij} s_i * s_j) + \rho u_i * u_i]\, dx +$$
$$+ \int_R (g * \sigma_{ij}^+ * u_{i,j} - f_i * u_i - b_i * s_i)\, dx -$$
$$- \int_{B_\sigma} g * \hat{l}_i * u_i dx + \int_{B_\theta} g * \hat{\theta} n_i * s_i dx. \qquad (41)$$

Тогда $\delta\mu_t(\Gamma) = 0$ на U, $0 \leqslant t < \infty$, при условии выполнения соотношения (36), если только Γ есть решение смешанной задачи (34) — (40).

Преобразуем μ_t по Лапласу. Пусть $\{u_i^*, s_i^*\} \in U$ — решение задачи, $\{u_i, s_i\} \in U$ и $\Delta u_i = u_i - u_i^*$, $\Delta s_i = s_i - s_i^*$. Подстановка $\bar{u}_i = \bar{u}_i^* + \Delta\bar{u}_i$, $\bar{s}_i = \bar{s}_i^* + \Delta\bar{s}_i$ и $\bar{\mu}_p$ с учетом соотношений (12), (15) и (23) приводит к неравенству

$$\Delta\bar{\mu}_p(\Delta\Gamma) =$$
$$= \frac{1}{2} \int_R \left[\frac{1}{p} (\bar{G}_{ijkl} \Delta\bar{u}_{k,l} \Delta\bar{u}_{i,j} + \bar{c}_\varepsilon \Delta\bar{\theta} \Delta\bar{\theta} + T_0 \lambda_{ij} \Delta\bar{s}_i \Delta\bar{s}_j) + \rho \Delta\bar{u}_i \Delta\bar{u}_i\right] dx \geqslant 0, \qquad (42)$$

которое доказывает минимальность функционала μ_t в преобразованной области.

Следуя работе [6], введем множество L функций $l(t)$, $t \in [0, \infty)$, которые имеют положительные изображения по Лапласу, т. е.

$$\bar{l}(p) > 0, \qquad (43)$$

$p \in [p_0, \infty)$, $p_0 > 0$, интегрируемые на $[p_0, \infty)$. Тогда из соотношений (41) — (43) следует минимальный принцип для перемещения и потока энтропии в реальном времени.

Пусть $l(t) \in L$, $\Gamma^* = \{u_i^*, s_i^*\} \in U$ — решение задачи (34) — (40) и $\Gamma = \{u_i, s_i\} \in U$. Определим функционал $M(\cdot)$ на U:

$$M(\Gamma) = \int_{p_0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-pt} l * \mu_t(\Gamma)\, dt dp = \int_{p_0}^{\infty} \bar{l}(p)\, \bar{\mu}_p(\bar{\Gamma})\, dp, \qquad (44)$$

где μ_t определяется формулой (41).

Тогда а) $\delta M(\Gamma) = 0$ (при условии выполнения уравнения (36)) тогда и только тогда, если $\Gamma = \Gamma^*$; б) $M(\Gamma) - M(\Gamma^*) \geqslant 0$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\Gamma = \Gamma^*$.

Рассмотрим вариационный принцип для напряжения и температуры.

Будем говорить, что σ_{ij} и θ есть поля напряжений и температуры, соответствующие решению смешанной задачи, тогда и только тогда, когда $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ и существуют функции u_i, ε_{ij}, η и q_i такие, что $\{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, \theta, \eta, s_i\}$ есть решение смешанной задачи.

Следующее утверждение обобщает результат работы [5] на случай связанной термовязкоупругости: функции σ_{ij} и θ, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, есть поля напряжений и температуры, соответствующие решению смешанной задачи, тогда и только тогда, когда $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij}$, $\theta = \theta'$ при $t < 0$ и

$$[\rho^{-1} g * \sigma_{ik,k}]_{,j)} - (K_{ijkl} * \sigma_{kl} + d_{ij} * \theta)^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{+} - f_{(i,j)}, \tag{45}$$

$$(d_{ij} * \sigma_{ij} + c_\sigma * \theta)^{(1)} - T_0^{-1} h * (k_{ij}\theta_{,j})_{,i} + a = 0, \quad R \times [0, \infty), \tag{46}$$

$$\rho^{-1} g * \sigma_{ik,k} = \hat{u}_i - f_i, \quad B_u \times [0, \infty), \tag{47}$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \hat{t}_i, \quad B_\sigma \times [0, \infty), \tag{48}$$

$$\theta = \hat{\theta}, \quad B_\theta \times [0, \infty), \tag{49}$$

$$-k_{ij}\theta_{,j} n_i = \hat{q}, \quad B_q \times [0, \infty). \tag{50}$$

Здесь $a(\vec{x}, t) = \eta_\sigma^{+}(\vec{x}, t) - \eta^0(\vec{x}) - h * \rho(\vec{x})\, r(\vec{x}, t)$.

Обозначим через S множество наборов $\{\sigma_{ij}, \theta\}$, $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij}$, $\theta = \theta'$, $t < 0$, удовлетворяющих граничным условиям (48) и (49). Следующий стационарный принцип дает вариационную формулировку задачи (45) — (50).

Пусть $\Gamma = \{\sigma_{ij}, \theta\} \in S$. Для каждого $t \in [0, \infty)$ определим функционал $\omega_t(\cdot)$ на S:

$$\omega_t(\Gamma) = \int_R \Big[\frac{1}{2} \rho^{-1} g * \sigma_{ik,k} * \sigma_{ij,j} + \frac{1}{2} (K_{ijkl} * \sigma_{kl} * \sigma_{ij} + 2 d_{ij} * \sigma_{ij} * \theta +$$
$$+ c_\sigma * \theta * \theta)^{(1)} + \frac{1}{2} h * T_0^{-1} k_{ij}\theta_{,j} * \theta_{,i} + (\varepsilon_{ij}^{+} - f_{i,j}) * \sigma_{ij} + a * \theta \Big] dx -$$
$$- \int_{B_u} (\hat{u}_i - f_i) * t_i dx + \int_{B_q} h * T_0^{-1} \hat{q}\, \theta dx. \tag{51}$$

Тогда $\delta\omega_t(\Gamma) = 0$ на S, $0 \leqslant t < \infty$, тогда и только тогда, если Γ есть решение смешанной задачи (45) — (50).

Преобразуем ω_t по Лапласу. Пусть $\Gamma^* = \{\sigma^*_{ij}, \theta^*\} \in S$ — решение задачи, $\Gamma = \{\sigma_{ij}, \theta\} \in S$ и $\Delta\sigma_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma^*_{ij}$, $\Delta\theta = \theta - \theta^*$. Подстановка $\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}^*_{ij} + \Delta\bar{\sigma}_{ij}$ и $\bar{\theta} = \theta^* + \Delta\bar{\theta}$ в $\bar{\omega}_p$ с учетом соотношений (45) — (50), (20) и (23) приводит к неравенству

$$\Delta\bar{\omega}_p(\bar{\Gamma}) = \int_R \Big[\frac{1}{2\rho p^2} \Delta\bar{\sigma}_{ik,k} \Delta\bar{\sigma}_{ij,j} + \frac{1}{2} p (\bar{K}_{ijkl} \Delta\bar{\sigma}_{ij} \Delta\bar{\sigma}_{kl} +$$
$$+ 2\bar{d}_{ij} \Delta\bar{\theta} \Delta\bar{\sigma}_{ij} + \bar{c}_\sigma \Delta\bar{\theta} \Delta\bar{\theta}) + \frac{1}{2p} T_0^{-1} k_{ij} \Delta\theta_{,j}\, \Delta\theta_{,i} \Big] dx \geqslant 0, \quad p > 0, \tag{52}$$

которое доказывает минимальность ω_t в преобразованной области.

Из соотношений (51), (52) вытекает минимальный принцип для напряжений и температуры в реальном времени.

Пусть $l(t) \in L$, $\Gamma^* = \{\sigma_{ij}^*, \theta^*\} \in S$ — решение задачи (45) — (50) и $\Gamma = \{\sigma_{ij}, \theta\} \in S$. Определим функционал $\Omega(\cdot)$ на S:

$$\Omega(\Gamma) = \int_{p_0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-pt} l * \omega_t(\Gamma)\, dt dp = \int_{p_0}^{\infty} \bar{l}(p)\, \bar{\omega}_p(\bar{\Gamma})\, dp, \tag{53}$$

где ω_t определяется формулой (51).

Тогда а) $\delta\Omega(\Gamma) = 0$ тогда и только тогда, если $\Gamma = \Gamma^*$; б) $\Omega(\Gamma) - \Omega(\Gamma^*) \geqslant 0$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, если $\Gamma = \Gamma^*$.

1. *Дэй У. А.* Термодинамика простых сред с памятью.— М. : Мир, 1974.— 190 с.
2. *Карнаухов В. Г., Сенченков И. К.* Вариационный принцип для связанных динамических задач линейной вязкоупругости.— Прикл. механика, 1977, 13, № 8, с. 113—117.
3. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.— М. : Мир, 1975.— 592 с.
4. *Gurtin M. E., Herrera I.* On dissipation inequalities and linear viscoelasticity.— Quart. Appl. Math., 1965, 23, N 3, p. 235—245.
5. *Leitman M. J.* Variational principles in the linear dynamic theory of vicoelasticity.— Quart. Appl. Math., 1966, 24, N 1, p. 37—46.
6. *Reiss R.* Minimum principles for linear elastodynamics.— J. Elast., 1978, 8, N 1, p. 35—45

Институт механики АН УССР

Поступила в редколлегию 07.02.79

УДК 533.6.013.42

Я. С. Подстригач, В. В. Пороховский, А. П. Поддубняк

АНАЛИЗ ПЕРЕИЗЛУЧЕННОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО СИГНАЛА ОТ УПРУГОЙ СФЕРЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ОГРАНИЧЕННОГО ЗВУКОВОГО ПУЧКА

При рассеянии акустической стационарной волны на упругой сплошной сфере амплитуда рассеянного поля сопровождается последовательностью пиков и углублений. Это имеет место как для случая ненаправленного излучения первичного поля [2], так и тогда, когда на объект набегает ограниченный звуковой пучок. Однако в стационарной задаче между случаями направленного и ненаправленного рассеяния имеются глубокие различия. Анализ нестационарного эхо-сигнала при рассеянии плоской волны на стальной упругой сфере в воде был выполнен в работе [5]. В настоящей статье подобный анализ проведен при набегании на объект ограниченного звукового пучка.

В качестве исходных используем результаты работы [1]. При этом импульс посылки принимаем в виде

$$p_i(r, \theta, \tau) = p_* l_0 l^{-1} \sin[\omega_0(\tau - l)]\,[H(\tau - l) - H(\tau - l - \tau_0)] \times$$
$$\times H\left(\sin\psi_0 - \frac{r}{l}\sin\theta\right) \quad \left(l = \sqrt{l_0^2 - 2rl_0\cos\theta + r^2}\right), \tag{1}$$

где p_* — постоянная, имеющая размерность давления; l_0 — расстояние от центра сферы до центра излучателя; ω_0 и τ_0 — несущая частота и длительность импульса посылки; ψ_0 — плоский угол развертки характеристики направленности излучателя; r, θ — сферические координаты с началом отсчета в центре сферы. Линейные величины системы отнесены к радиусу сферы a; $\tau = ct/a$; c — скорость звука в жидкости; t — время.