

и  $\lg \frac{\Delta c_T}{c_1}$  (штриховая) от  $\lg \omega$  в среде из меди. Как видно из рисунков, для всех частот  $\gamma_s \ll \gamma_T$ . В области частот  $\omega \leq 10^{12} \text{с}^{-1}$   $\frac{\Delta c_s}{c_1} \leq \frac{\Delta c_T}{c_1}$ , а при  $\omega > 10^{12} \text{с}^{-1}$   $\frac{\Delta c_s}{c_1} > \frac{\Delta c_T}{c_1}$ .

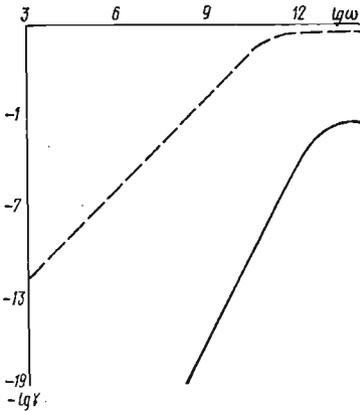


Рис. 1

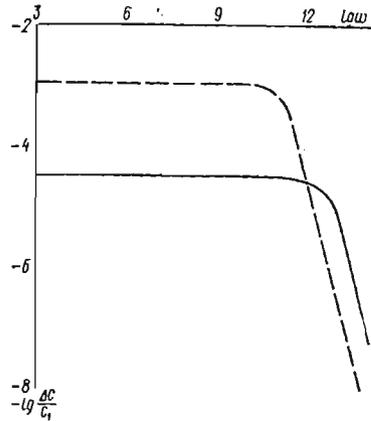


Рис. 2

Из полученных результатов можно заключить, что при исследовании распространения в металлах упругих волн с высокими гиперзвуковыми частотами необходимо учитывать взаимосвязь процессов деформации и электропроводности.

1. Бурак Я. Я., Галапац Б. П., Гнидець Б. М. Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах.— К.: Наук. думка, 1978.— 232 с.
2. Займан Дж. Электроны и фононы.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.— 488 с.
3. Коваленко А. Д. Основы термоупругости.— Киев: Наук. думка, 1970.— 239 с.
4. Семерак Ф. В. Исследование гармонических волн в термоупругих средах с учетом конечной скорости распространения тепла.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 69—79.
5. Таблицы физических величин: Справочник.— М.: Атомиздат, 1976.— 1006 с.

Институт прикладных проблем механики  
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
21.12.78

УДК 539.3 : 534.26

Ю. Д. Зозуляк, Г. В. Магерус

#### К ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО СЛОЯ В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Пусть упругий слой  $-h \leq z \leq 0$  (среда 2) контактирует со стороны плоскопараллельных границ  $z = 0$ ,  $-h$  с акустической средой, характеристики которой для  $z > 0$  (среда 1) равны  $\rho_1, c_1$ , а для  $z < -h$  (среда 3) —  $\rho_3, c_3$  ( $\rho_i, c_i$  — плотность и скорость звука в  $i$ -й среде). В плоскости  $z = z_0$  (среда 1) в течение времени  $0 < \tau \leq \tau_0$  нормально к поверхности  $z = 0$  действует зондирующий импульс, потенциал которого можно представить в виде

$$g(t) \cos \omega t \delta(\zeta - \zeta_0).$$

Ставим задачу об определении такого закона изменения во времени функции управления  $g(t)$  волнового возмущения, которая в пределах заданных ограничений обеспечивает за заданный промежуток времени опти-

мальный по напряжениям выход на квазиустановившийся режим колебаний слоя. В качестве критерия оптимальности принимаем условие минимума функционала квадратичного отклонения напряжений на границе  $\zeta = 0$  для динамического и квазиустановившегося режимов, т. е.

$$I = \int_{\zeta_0}^{t_0 + \zeta_0} [\sigma(t) - \sigma^*(t)]^2 dt. \quad (1)$$

Задачу решаем при следующих ограничениях на функцию управления:

$$\int_0^{t_0} g(t) dt = g_0, \quad g(0) = g_1. \quad (2)$$

Здесь  $t = \frac{c_1 \tau}{h}$ ;  $t_0 = \frac{c_1 \tau_0}{h}$ ;  $\zeta = \frac{z}{h}$ ;  $\zeta_0 = \frac{z_0}{h}$ ;  $\omega$  — частота.

Принимая для квазиустановившегося режима

$$\varphi_2(\zeta, t) = g(t - \zeta_0) \Phi_2(\zeta) e^{i\omega(t - \zeta_0)},$$

выражения для напряжений, согласно работам [1, 4], можно представить в виде

$$\sigma = \rho_2 c_1^2 \operatorname{Re} \frac{\partial^2 \varphi_2(\zeta, t)}{\partial t^2}, \quad \sigma^* = \rho_2 c_1^2 \operatorname{Re} [\omega^2 g(t - \zeta_0) \Phi(\zeta) e^{i\omega(t - \zeta_0)}]. \quad (3)$$

Потенциалы перемещений  $\varphi_i(\zeta, t)$  определим из решения системы волновых уравнений

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \zeta^2} = g(t) e^{i\omega t} \delta(\zeta - \zeta_0), \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t^2} - \frac{1}{\kappa_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \zeta^2} = 0 \quad (j = 2; 3)$$

при следующих условиях сопряжения на границах раздела:

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} = m_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} \quad \text{при } \zeta = 0, \quad (5)$$

$$m_3 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} = m_2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial \zeta} \quad \text{при } \zeta = -1$$

условиях затухания на бесконечности

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \varphi_1 = 0, \quad \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} \varphi_3 = 0 \quad (6)$$

и начальных условиях

$$\varphi_i(\zeta, 0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_i(\zeta, 0)}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

где  $m_i = \frac{\rho_i}{\rho_1}$ ;  $\kappa_i = \frac{c_i}{c_1}$ .

С использованием преобразования Лапласа задачу (4) — (7) можно свести к определению потенциала перемещения  $\varphi = \varphi_2$  в области упругого слоя при обобщенных краевых условиях вида [2]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = -\frac{1}{m_2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + g(t - \zeta_0) e^{i\omega(t - \zeta_0)} \quad \text{при } \zeta = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = -\kappa_3 \frac{m_3}{m_2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{при } \zeta = -1.$$

Решение такой задачи записывается в виде

$$\varphi = \frac{1}{2A} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \{b_1 b_3^n g[\xi - \zeta_0 + \kappa_2(\zeta - 2n)] \exp i\omega[\xi - \zeta_0 + \kappa_2(\zeta - 2n)] + \\ + b_2 b_3^n g[\xi - \zeta_0 - \kappa_2(\zeta + 2 + 2n)] \exp i\omega[\xi - \zeta_0 - \kappa_2(\zeta + 2 + 2n)]\} d\xi, \quad (9)$$

где

$$b_1 = 2m_2(m_2\kappa_2 + m_3\kappa_3); \quad b_2 = 2m_2(m_2\kappa_2 - \kappa_3m_3);$$

$$b_3 = \frac{b_2(m_2\kappa_2 - 1)}{b_1(m_2\kappa_2 + 1)}; \quad A = (m_2\kappa_2 + 1)(m_2\kappa_2 + m_3\kappa_3).$$

Для рассматриваемой системы в квазиустановившемся режиме колебаний соответствующая краевая задача с обобщенными граничными условиями, согласно работе [4], будет такой:

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} + \omega^2\kappa_2^2\Phi = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = -\frac{i\omega}{m_2}\Phi + 1 \quad \text{при } \xi = 0, \quad (11)$$

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = -\kappa_3\frac{im_3\omega}{m_2}\Phi \quad \text{при } \xi = -1$$

и ее решение можно представить в виде

$$\Phi = \frac{m_2}{2\omega} [(m_2\kappa_2 \cos \omega\kappa_2 - im_3\kappa_3 \sin \omega\kappa_2) \cos \omega\kappa_2\xi - (m_2\kappa_2 \sin \omega\kappa_2 + im_3\kappa_3 \cos \omega\kappa_2) \sin \omega\kappa_2\xi] [(m_3\kappa_3 - m_2^2\kappa_2^2) \sin \omega\kappa_2 + i\kappa_2m_2(1 - m_3\kappa_3) \cos \omega\kappa_2]^{-1}. \quad (12)$$

С учетом полученных выражений (9), (12) согласно выражению (3) для заданного промежутка времени  $0 < t \leq t_0$  при  $\xi = 0$  получаем

$$\sigma = \frac{\rho_2 c_1^2}{2A} \sum_{n=0}^{N_0} R^n \left\{ M \left[ \omega g(t - \zeta_0 - 2\kappa_2 n) \sin \omega(t - \zeta_0 - 2\kappa_2 n) - \frac{dg(t - \zeta_0 - 2\kappa_2 n)}{dt} \cos \omega(t - \zeta_0 - 2\kappa_2 n) \right] + N \left[ \omega g(t - \zeta_0 - 2\kappa_2(n+1)) \times \right. \right.$$

$$\left. \times \sin \omega(t - \zeta_0 - 2\kappa_2(n+1)) - \frac{dg(t - \zeta_0 - 2\kappa_2(n+1))}{dt} \times \right.$$

$$\left. \left. \times \cos \omega(t - \zeta_0 - 2\kappa_2(n+1)) \right] \right\}, \quad (13)$$

$$\sigma^* = \frac{\rho_2 c_1^2 m_2 \omega g(t - \zeta_0)}{2a_4} [m_2\kappa_2 a_1 \cos \omega(t - \zeta_0) + (m_2^2\kappa_2^2 a_3 - m_3\kappa_3 a_2) \sin \omega(t - \zeta_0)], \quad (14)$$

где

$$N_0 = \left[ \frac{t_0}{2\kappa_2} \right]; \quad a_1 = (m_3^2\kappa_3^2 - m_2^2\kappa_2^2) \sin \omega\kappa_2 \cos \omega\kappa_2;$$

$$a_2 = (m_2^2\kappa_2^2 - m_3\kappa_3) \sin^2 \omega\kappa_2; \quad a_3 = (1 - m_3^2\kappa_3^2) \cos^2 \omega\kappa_2;$$

$$a_4 = -a_2 + a_3\kappa_2^2 m_2^2 (1 - m_3\kappa_3).$$

Подставляя выражения (13), (14) в функционал (1), из решения вариационной задачи с неподвижными границами получим на каждом отрезке времени  $[n \cdot 2\kappa_2, (n+1) \cdot 2\kappa_2]$  следующие уравнения на функцию управления  $g(t)$ :

$$(1 + \cos 2\omega t) \frac{d^2 g_i}{dt^2} - 2\omega \sin 2\omega t \frac{d g_i}{dt} - \frac{1}{r_{i1}} [(r_{i3} - r_{i4}) + (r_{i3} + r_{i4}) \cos 2\omega t + r_{i5} \sin 2\omega t] g_i = 0. \quad (15)$$

Здесь  $i = 1, N_0 - 1$ ;

$$r_{i1} = \left( \frac{\rho_2 c_1^2 b_4}{2A} \right)^2; \quad r_{i3} = \left( \frac{\omega}{2} \right)^2 \left[ \left( \frac{\rho_2 c_1^2 b_4}{A} - B_1 \right) \frac{\rho_2 c_1^2}{A} (b_3 b_1 + b_2) + A_1^2 \right];$$

$$r_{i4} = \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \left(\frac{\rho_2 c_1^2 b_4}{A} - B_1\right) B_1; \quad r_{i5} = 2A_1 B_1; \quad b_4 = b_1 b^{i-1} + b_2 b_3^{i-2};$$

$$A_1 = \frac{a_1}{a_4} \rho_2 c_1^2 m_2^2 \kappa_2; \quad B_1 = \frac{\rho_2 c_1^2 m_2}{a_4} (m_2^2 \kappa_2^2 a_3 - m_3 \kappa_3 a_2)$$

(при  $i = 1 \quad N = 0$ ).

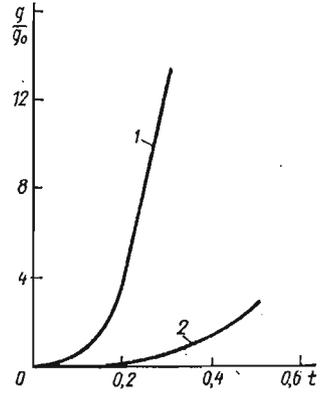
Решение уравнений (15) ищем методом степенных рядов [3]

$$g_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} t^j. \quad (16)$$

Начальное и интегральное условия (2), условия непрерывности и гладкости  $g_i(t)$ ,  $g_{i+1}(t)$ , которыми ограничиваем эти функции в точках  $i \cdot 2\kappa_2$ , служат для определения постоянных  $c_{i0}$ ,  $c_{i1}$ .

Ниже приведено выражение функции управления для случая, когда продолжительность действия зондирующего импульса соответствует времени наложения на геометрически отраженную волну первой волны, излученной упругим слоем ( $2\kappa_2 \leq t_0 < 4\kappa_2$ ):

$$g_i = \sum_{m=0}^{\infty} c_{i1} (u_i^2 f_{im}^1 + u_i^4 f_{im}^2) t^m + \sum_{m=0}^{\infty} g_1 (u_i^1 f_{im}^1 + u_i^3 f_{im}^2) t^m \quad (i = 1; 2). \quad (17)$$



Здесь

$$c_{i1} = \left\{ g_0 - g_1 \sum_{k=0}^{\infty} \left[ f_{1k}^1 \frac{(2\kappa_2)^{k+1}}{k+1} + (u_2^1 f_{2k}^1 + u_2^3 f_{2k}^2) \frac{t_0^{k+1} - (2\kappa_2)^{k+1}}{k+1} \right] \right\} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left[ f_{1k}^2 \frac{(2\kappa_2)^{k+1}}{k+1} + (u_2^2 f_{2k}^1 + u_2^4 f_{2k}^2) \frac{t_0^{k+1} - (2\kappa_2)^{k+1}}{k+1} \right] \right\}^{-1};$$

$$u_1^1 = 1; \quad u_1^2 = 0; \quad u_1^3 = 0; \quad u_1^4 = 1;$$

$$u_2^1 = (k_6 - k_8 u_2^3) k_5; \quad u_2^2 = (k_7 - k_8 u_2^4) k_5; \quad u_2^3 = \frac{k_1 - k_3 k_5 k_6}{k_4 - k_3 k_6 k_8};$$

$$u_2^4 = \frac{k_2 - k_3 k_5 k_7}{k_4 - k_3 k_5 k_8}; \quad k_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{1n}^1 (2\kappa_2)^{n-1}; \quad k_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{1n}^2 (2\kappa_2)^{n-1};$$

$$k_3 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{2n}^1 (2\kappa_2)^{n-1}; \quad k_4 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{2n}^2 (2\kappa_2)^{n-1}; \quad k_5 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} f_{2n}^1 (2\kappa_2)^n};$$

$$k_6 = \sum_{n=0}^{\infty} f_{1n}^1 (2\kappa_2)^n; \quad k_7 = \sum_{n=0}^{\infty} f_{1n}^2 (2\kappa_2)^n; \quad k_8 = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n}^2 (2\kappa_2)^n.$$

В частности, при  $\overline{n} = 0,4$  имеем

$$f_{i0}^1 = 1, \quad f_{i1}^1 = 0, \quad f_{i2}^1 = \frac{r_{i3}}{2r_{i1}}, \quad f_{i3}^1 = \frac{\omega r_{i5}}{6r_{i1}}, \quad f_{i4}^1 = \frac{\omega^2}{12r_{i1}} (2r_{i3} - r_{i4}) +$$

$$+ \frac{1}{24} \left( \frac{r_{i3}}{r_{i1}} \right)^2, \quad f_{i0}^2 = 0, \quad f_{i1}^2 = 1, \quad f_{i2}^2 = 0, \quad f_{i3}^2 = \frac{\omega^2}{3} + \frac{r_{i3} - r_{i4}}{12r_{i1}}, \quad f_{i4}^2 = \frac{\omega r_{i5}}{12r_{i1}}.$$

Случай взаимодействия акустической среды с упругим полупространством ( $0 < t_0 < 2\kappa_2$ ) получим, полагая в выражении (17)  $i = 1$ .

На рисунке изображена функция управления  $g(t)$  для  $m_2 = 0,34$ ;  $m_3 = 0,9$ ;  $\kappa_2 = 0,22$ ;  $\kappa_3 = 0,95$ ;  $\omega = 80$ ;  $g_1 = 0$ . Кривая 1 соответствует

продолжительности зондирующего импульса  $0 < t_0 < 2\kappa_2$ , кривая 2 —  $-2\kappa_2 \leq t_0 < 4\kappa_2$ . Результаты численных расчетов показали, что в формуле (17) с достаточной для практики точностью можно ограничиться тремя членами ряда.

1. Исакович М. А. Общая акустика.— М.: Наука, 1973.— 430 с.
2. Підстригач Я. С. Про один випадок ускладнення граничних умов в задачах гідропружності.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1975, № 3, с. 235—238.
3. Селезов И. Т., Яковлев В. В. Дифракция волн на симметричных неоднородностях.— Киев: Наук. думка, 1978.— 146 с.
4. Термоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская.— Киев: Наук. думка, 1977.— 247 с.

Институт прикладных проблем механики  
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
21.12.78

УДК 533.6.013.42

А. П. Поддубняк

### ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКОГО ЗВУКОВОГО ИМПУЛЬСА НА ДВУХСЛОЙНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ СФЕРЕ

Пусть на двухслойную акустическую сферу, находящуюся в акустической среде, набегают плоский звуковой импульс давления

$$p_i(r, \theta, \tau) = p_0 f(\tau'), \quad \tau' = \tau + r \cos \theta, \quad f(\tau') \equiv 0 \quad (\tau' \leq 0). \quad (1)$$

Здесь и далее  $p_0$  — постоянная, имеющая размерность давления;  $r, \theta$  — сферические координаты с началом отсчета в центре сферы;  $f(\tau')$  — заполнение импульса;  $\tau = ct/a$ ;  $t$  — время;  $a, b$  — радиусы сферы;  $\varepsilon = a/b < 1$ ;  $c, c_1, c_2$  — скорости звука;  $\rho, \rho_1, \rho_2$  — плотности в окружающей среде, оболочке и заполнителе соответственно. Все линейные величины системы отнесены к внешнему радиусу оболочки  $a$ .

Для определения перензлученного сигнала необходимо решить дифференциальные уравнения движения акустических сред с учетом условий гидроакустического контакта [1], принципа причинности [3] и ограниченности искомых функций.

С помощью интегрального преобразования Фурье по  $\tau$  и метода разделения переменных точное решение задачи — давление в эхо-сигнале — находим в виде интеграла свертки

$$p_e(r, \theta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau - \xi) \mathcal{P}_e(r, \theta, \xi) d\xi, \quad (2)$$

где

$$\mathcal{P}_e(r, \theta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{P}}_e(r, \theta, \omega) e^{-i\omega\tau} d\omega; \quad (3)$$

$$\overline{\mathcal{P}}_e(r, \theta, \omega) = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (2n+1) a_n(\omega) h_n^{(1)}(\omega r) P_n(\cos \theta); \quad (4)$$

$$a_n(\omega) = \frac{1}{2} (1 + y^{-1} F_n), \quad F_n = \frac{z^2 - q}{z^2 - q}, \quad q = \frac{D_{10}}{D_{20}},$$

$$D_{10} = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & 0 \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}, \quad D_{20} = \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} & 0 \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}, \quad (5)$$

$$A_{12} = -j_n(\omega_1), \quad A_{13} = -n_n(\omega_1), \quad A_{22} = -N_1 \omega_1 j'_n(\omega_1),$$