и третьем этапах нагрева управление равно предельно возможному, а на втором — обеспечивает предельно допустимый перепад по толщине цилиндрической стенки.

1. *Вигак В. М., Фальковский С. В., Горешник А. Д., Мащенко Б. В.* Допустимые температурные напряжения и скорости нагрева (расхолаживания) толстостенных паропроводов.— М. : Энергия, 1975.— 104 с.
2. *Дуэль М. А., Горелик А. Х., Марьенко А. Ф.* Автоматическое управление энергоустановками в пусковых режимах.— Киев : Техніка, 1974.— 151. с.
3. *Расулов М. Л.* Метод контурного интеграла.— М. : Наука, 1964.— 464 с.
4. *Тайц Н. Ю.* Технология нагрева стали.— М. : Металлургиздат, 1962.— 567 с.

Вычислительный центр Института прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 16.02.79

УДК 512.8

В. М. Петричкович

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ

В работе [8] исследованы условия, при которых матричное уравнение

$$A_0X^m + A_1X^{m-1} + \cdots + A_m = 0, \tag{1}$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_m$ — $n \times n$-матрицы над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, имеет бесконечное число решений. Случаи конечного числа решений уравнения (1) рассмотрены в работах [1, 3, 5]. В частности, известно, что если характеристические корни λ-матрицы

$$M(\lambda) = A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \cdots + A_m, \quad |A_0| \neq 0, \tag{2}$$

различны, то число решений k уравнения (1) конечно [5]. В этой статье показано, что $m^n \leqslant k \leqslant \binom{mn}{n}$. Для квадратного матричного уравнения ($m = 2$) этот результат получен автором в работе [7].

Сформулируем предварительные утверждения.

Лемма 1. Пусть $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_l)$ $(l \geqslant n)$ — наборы линейно независимых векторов. Тогда среди наборов $(a_1, \ldots, a_r, b_{i_1}, \ldots, b_{i_q}, a_{r+q+1}, \ldots, a_n)$, где $i_1, \ldots, i_q$ пробегают $1, \ldots, n$ имеется по крайней мере один набор, состоящий из линейно независимых векторов.

Доказательство легко проводится от противного.

Лемма 2. Пусть $(a_1, \ldots, a_n), \underbrace{(b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n), \ldots, (g_1, \ldots, g_n)}_{p}$ — наборы линейно независимых векторов. Тогда среди наборов $(a_1, \ldots, a_r, x_{i_1}, \ldots, x_{i_q}, a_{r+q+1}, \ldots, a_n)$, где $x_{i_1}, \ldots, x_{i_q}$ — всевозможные $b_j, c_j, \ldots, q_j$, $j = 1, \ldots, n$, имеется $k \geqslant p^q$ наборов, состоящих из линейно независимых векторов.

Доказательство проводим методом индукции.

Для $p = 1$ лемма 2 вытекает из леммы 1. Предположим ее справедливость для $p - 1$. В силу леммы 1 существует набор $(a_1, \ldots, a_r, b_{i_1}, \ldots, b_{i_q}, a_{r+q+1}, \ldots, a_n)$ линейно независимых векторов. Теперь рассмотрим следующие наборы векторов:

$$(a_1, \ldots, a_r, b_{i_1}, \ldots, b_{i_q}, a_{r+q+1}, \ldots, a_n), \underbrace{(c_1, \ldots, c_n), \ldots, (g_1, \ldots, g_n)}_{p-1}.$$

Согласно предположению индукции среди наборов векторов вида

$$(a_1, \ldots, a_r, b_{u_1}, \ldots, b_{u_s}, y_{l_1}, \ldots, y_{l_t}, b_{u_{s+t+1}}, \ldots, b_{u_q}, a_{r+q+1}, \ldots, a_n),$$

где $y_{l_1}, \ldots, y_{l_t}$ — всевозможные $c_i, \ldots, g_i$, $i = 1, \ldots, n$, а $b_{u_1}, \ldots, b_{u_s}$, $b_{u_{s+t+1}}, \ldots, b_{u_q}$ фиксированы из $b_{i_1}, \ldots, b_{i_q}$, имеется не менее $(p-1)^t$ наборов, состоящих из линейно независимых векторов. Если к тому же $u_1, \ldots, u_s, u_{s+t+1}, \ldots, u_q$ пробегают всевозможные $i_1, \ldots, i_q$, то таких наборов линейно независимых векторов будет не менее $\binom{q}{t}(p-1)^t$. Полагая $t = 0, 1, \ldots, q$, получаем все наборы линейно независимых векторов, указанные леммой, т. е.

$$k \geqslant \sum_{t=0}^{q} \binom{q}{t} (p-1)^t = p^q.$$

Из леммы 2 как следствие вытекает следующая лемма.

Лемма 3. Пусть mn различных векторов можно разбить на m множеств по n линейно независимых векторов в каждом. Тогда из этих векторов можно образовать по крайней мере m^n множеств по n линейно независимых векторов.

Пусть характеристические корни λ-матрицы (2) различны. Тогда на основании результатов работы [6] λ-матрицу $M(\lambda)$ полускалярными эквивалентными преобразованиями приведем к треугольному виду

$$F(\lambda) = QM(\lambda)R(\lambda) = \begin{Vmatrix} 1 & . & & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 & \\ f_1(\lambda) & \ldots & f_{n-1}(\lambda) & \Delta(\lambda) \end{Vmatrix},$$

где Q — числовая неособенная, а $R(\lambda)$ — обратимая матрицы. Запишем взаимную матрицу к матрице $F(\lambda)$:

$$F_*(\lambda) = \begin{Vmatrix} \Delta(\lambda) & . & & 0 \\ 0 & & \ddots & \Delta(\lambda) & \\ h_1(\lambda) & \ldots & h_{n-1}(\lambda) & 1 \end{Vmatrix}.$$

Лемма 4. Для λ-матрицы $M(\lambda)$ существует левый делитель $I\lambda - B_i$ (I — единичная матрица) с характеристическими корнями $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_n}$ тогда и только тогда, когда матрица

$$H_i = \begin{Vmatrix} h_1(\lambda_{i_1}) & \ldots & h_{n-1}(\lambda_{i_1}) & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_1(\lambda_{i_n}) & \ldots & h_{n-1}(\lambda_{i_n}) & 1 \end{Vmatrix}$$

неособенная.

Доказательство легко получить, используя теорему 2 и утверждение 2 из работы [5].

Теорема. Пусть характеристические корни λ-матрицы

$$M(\lambda) = A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \cdots + A_m, \quad |A_0| \neq 0$$

различны. Тогда число решений k соответствующего матричного уравнения

$$X^m A_0 + X^{m-1} A_1 + \cdots + A_m = 0 \tag{3}$$

удовлетворяет условию

$$m^n \leqslant k \leqslant \binom{mn}{n}. \tag{4}$$

Доказательство. На основании теоремы 4.1 работы [9] о существовании полного набора решений матричного уравнения (3) mn характеристических корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_{mn}$ λ-матрицы $M(\lambda)$ можно разбить на m непересекающихся множеств

$$S_i = \{\lambda_{i_1}, \ldots \lambda_{i_n}\}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

так, что с каждым из этих множеств характеристических корней существует левый делитель $I\lambda - B_i$ λ-матрицы $M(\lambda)$. Тогда в силу леммы 4 каждая матрица

$$H_i = \begin{Vmatrix} h_1(\lambda_{i_1}) & \dots & h_{n-1}(\lambda_{i_1}) & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_1(\lambda_{i_n}) & \dots & h_{n-1}(\lambda_{i_n}) & 1 \end{Vmatrix}, \quad i = 1, \dots, m,$$

неособенная. Далее, на основании леммы 3 из матриц $H_1, \dots, H_m$ можно образовать $k \geqslant m^n$ неособенных матриц n-го порядка (некоторые матрицы могут и совпадать) и каждой из этих матриц соответствует множество из n характеристических корней λ-матрицы $M(\lambda)$, с которыми $M(\lambda)$ имеет левый делитель $I\lambda - B_i$. Поскольку делитель $I\lambda - B_i$ матрицы $M(\lambda)$ своими характеристическими корнями определяется однозначно [2], то получаем, что $M(\lambda)$ имеет $k \geqslant m^n$ левых делителей. Если $M(\lambda)$ диагональная, то нетрудно показать, что $k = m^n$.

С другой стороны, в работе [4] показано существование λ-матриц, обладающих свойством абсолютной выделяемости линейных множителей. В этом случае $M(\lambda)$ имеет максимальное число $k = \binom{mn}{n}$ линейных делителей. Таким образом, учитывая, что если $I\lambda - B$ — левый делитель $M(\lambda)$, то $X = B$ есть решение уравнения (3), получаем условие (4) для числа решений матричного уравнения (3). Рассматривая правые делители $M(\lambda)$, получаем аналогичный результат для матричного уравнения (1).

1. *Грига Б. С., Казімірський П. С.* До питання єдиності виділення унітального множника з матричного многочлена.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 4, с. 293—295.
2. *Казімірський П. С.* Про розклад матричного многочлена на множники.— УМЖ, 1972, 24, № 3, с. 315—325.
3. *Казимирский П. С.* Матричные многочлены и уравнения. Мат. методы и физ.-мех. поля. 1975, вып. 2, с. 23—31.
4. *Казимирский П. С.* Выделение из матричного многочлена регулярного линейного множителя простой структуры.— В кн.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. К. : Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 29—40.
5. *Казімірський П. С.* Квазіунітальні та супровідні матриці матричних многочленів.— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь.— К.: Наук. думка, 1977, с. 29—52.
6. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць.— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь.— К.: Наук. думка, 1977, с. 61—66.
7. *Петричкович В. М.* Розкладність матричного квадратного тричлена на лінійні множники і його звідність до блочних видів.— Матеріали II конференції молодих вчених Західного наукового центру АН УРСР. Секція мат., Ужгород, 1975, с. 60—64 (Деп. № 1734—76).
8. *Bell J. H.* Families of solutions of the unilateral matrix equation.— Pros. Amer. Math. Soc., 1950, N 1, p. 151—159.
9. *Dennis J. E., Traub J. F., Weber R. P.* The algebraic theory of matrix polinomials.— SIAM Journ. Numer. Anal., 1976, 13, N 6, p. 831—845.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
05.04.78

УДК 536.12

Г. С. Кит, О. В. Побережный

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ

Рассмотрим задачу нестационарной теплопроводности для пластины с теплообменом или бесконечного тела с произвольно расположенными в них трещинами, на которых заданы температура, тепловые потоки или условия теплопроницаемости.