деляемой формулами (14), (15), если в этих формулах заменить $\omega_1$ на $-ik_1$, $\omega_2$ на $-ik_2$, и потенциал двойного слоя второго рода с матрицей, приведенной в работе [3] и названной сингулярным решением динамической задачи установившихся колебаний.

Для решения динамических задач установившихся колебаний для бесконечного тела с трещиной, размещенной по произвольной поверхности, достаточно пользоваться лишь потенциалом двойного слоя первого рода, когда заданные на поверхностях трещины внешние усилия самоуравновешенные. В случае несамоуравновешенных внешних усилий решение необходимо искать в виде суммы потенциала двойного слоя первого рода и потенциала простого слоя.


1. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости.— М.: Высш. школа, 1976.— 272 с.
2. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1108—1112.
3. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости.— М.: Наука, 1976.— 663 с.
4. *Панасюк В. В., Андрейков А. Е., Ковчик С. Е.* Методы оценки трещиностойкости конструкционных материалов.— Киев: Наук. думка, 1977. — 277 с.
5. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упруго-пластического разрушения.— М.: Наука, 1974.— 416 с.
6. *Партон В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости.— М.: Наука, 1977.— 312 с.



Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР



Поступила в редколлегию
16.02.79



УДК 539.377



*Ю. М. Коляно, Е. Г. Иваньк*


## ТЕПЛОВОЙ УДАР ПО ПОВЕРХНОСТИ СОСТАВНОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ

Пусть к поверхности $z = \delta$ свободно опертой круглой пластины радиуса $R$ с покрытием толщины $\varepsilon$ внезапно подводится тепловой поток $q$. Поверхности пластины $z = -\delta$, $r = R$ предполагаются теплоизолированными (рис. 1).

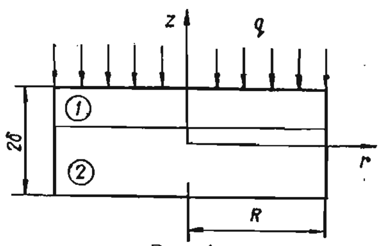

Рис. 1

Физико-механические характеристики такой системы представим через асимметричную единичную функцию в виде

$$p(z) = p_2 + (p_1 - p_2) S_-(z - \delta_1), \tag{1}$$

где $p_2$ и $p_1$ — соответственно характеристики пластины и покрытия; $\delta_1 = \delta - \varepsilon$; $S_-(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geqslant 0, \\ 0, & \xi < 0. \end{cases}$

При указанных условиях нестационарное температурное поле определяется из уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda(z)\frac{\partial t}{\partial z}\right] = c_v(z)\frac{\partial t}{\partial \tau}, \tag{2}$$

где $\lambda$ — коэффициент теплопроводности; $c_v$ — объемная теплоемкость; $\tau$ — время.

Краевые условия примем в виде

$$\left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z=\delta} = \frac{q}{\lambda_1} S_+(\tau), \quad \left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z=-\delta} = 0, \quad t|_{\tau=0} = 0, \tag{3}$$

где $S_+(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0, \\ 0, & \tau \leqslant 0. \end{cases}$

Подставляя выражение (1) в уравнение (2) и применяя затем к полученному уравнению и граничным условиям (3) преобразование Лапласа по переменной $\tau$, для нахождения изображения получаем уравнение

$$\frac{d^2\bar{t}}{dz^2} - \left[\frac{s}{a_2} + \left(\frac{s}{a_1} - \frac{s}{a_2}\right) S_-(z - \delta_1)\right]\bar{t} = (1 - K_\lambda^{-1}) \left.\frac{d\bar{t}}{dz}\right|_{z=\delta_1} \delta_-(z - \delta_1) \quad (4)$$

при условиях

$$\left.\frac{d\bar{t}}{dz}\right|_{z=\delta} = \frac{q}{\lambda_1 s}, \quad \left.\frac{d\bar{t}}{dz}\right|_{z=-\delta} = 0, \quad (5)$$

где $a_i$ — коэффициенты температуропроводности покрытия и пластины ($i = 1, 2$); $K_\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$; $\delta_-(\xi) = S'_-(\xi)$.

Поступая, как и в работе [1], решение уравнения (4) при условиях (5) получаем в виде

$$\bar{t} = \frac{q}{\lambda_1 s \sqrt{\frac{s}{a_1}}\,\psi(s)} \left[\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_2}}(\delta + z) S_+(\delta_1 - z) - \varphi_1(s, z) S_-(z - \delta_1)\right], \quad (6)$$

где

$$\psi(s) = \operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_1}}\varepsilon \operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_2}}(\delta + \delta_1) + K_\varepsilon \operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_1}}\varepsilon \operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_2}}(\delta + \delta_1);$$

$$K_\varepsilon = K_\lambda K_a^{-\frac{1}{2}}; \quad K_a = \frac{a_2}{a_1};$$

$$\varphi_1(s, z) = K_\varepsilon \operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_1}}(\delta_1 - z) \operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_2}}(\delta + \delta_1) -$$

$$- \operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_1}}(\delta_1 - z) \operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_2}}(\delta + \delta_1); \quad S_+(\xi) = 1 - S_-(\xi).$$

Переходя в выражении (6) по формуле обращения к оригиналу, решения задачи теплопроводности находим в виде

$$t(Z, f) = q^* \left\{\left[l_1(u, Z) + 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos\mu_i(1 + Z)}{\mu_i^2 \Delta(\mu_i)} e^{-\mu_i^2 f}\right] S_+(d_1 - Z) + \right.$$

$$\left. + \left[l_2(u, Z) + 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Delta_1(\mu_i, Z)}{\mu_i^2 \Delta(\mu_i)} e^{-\mu_i^2 f}\right] S_-(Z - d_1)\right\}, \quad (7)$$

где

$$\Delta(\mu_i) = H_1 \cos\mu_i(2 - u)\cos\mu_i K_a^{\frac{1}{2}} u - H_2 \sin\mu_i(2 - u)\sin\mu_i K_a^{\frac{1}{2}} u, \quad u = \frac{\varepsilon}{\delta};$$

$$H_1 = K_a u + K_\varepsilon K_a^{\frac{1}{2}}(2 - u); \quad H_2 = K_\varepsilon K_a u + K_a^{\frac{1}{2}}(2 - u); \quad f = \frac{a_2\tau}{\delta^2}; \quad d_1 =$$

$$= \frac{\delta_1}{\delta}; \quad q^* = \frac{-q\delta}{\lambda_1}; \quad \Delta_1(\mu_i, Z) = K_\varepsilon \sin\mu_i(2 - u)\sin\mu_i K_a^{\frac{1}{2}}(d_1 - Z) +$$

$$+ \cos\mu_i(2 - u)\cos\mu_i K_a^{\frac{1}{2}}(d_1 - Z); \quad l_1(u, Z) = l_{11} + l_{12} + l_3; \quad l_2(u, Z) =$$

$$= l_{11} + l_{22} + l_3; \quad Z = \frac{z}{\delta}; \quad l_{11} = -fK_a^{-\frac{1}{2}} l_0^{-1}; \quad l_3 = l_{31} l_0^{-2}; \quad l_0 = 2K_\varepsilon +$$

$$+ u(K_a^{\frac{1}{2}} - K_\varepsilon); \quad l_{22} = l_{21} l_0^{-1}; \quad l_{21} = \frac{1}{2}[-K_a^{\frac{1}{2}}(2 - u)^2 - K_a^{\frac{3}{2}}(1 - u - Z)^2 +$$

$$+ 2K_\varepsilon K_a(1 - u - Z)(2 - u)] K_a^{-1}; \quad l_{31} = \frac{1}{6}[u^3 K_a + 3u(2 - u)^2 +$$

$$+ 3K_\varepsilon K_a^{\frac{1}{2}} u^2(2 - u) + K_\varepsilon K_a^{-\frac{1}{2}}(2 - u)^3]; \quad l_{12} = -\frac{1}{2}(1 + Z)^2 K_a^{-\frac{1}{2}} l_0^{-1};$$

$\mu_i$ — корни трансцендентного уравнения

$$K_\varepsilon \operatorname{tg} \mu (2-u) + \operatorname{tg} \mu K_a^{\frac{1}{2}} u = 0.$$

Поступая аналогично работе [3], после осреднения уравнений движения и соотношений Дюгамеля — Неймана по толщине пластинки для определения прогиба $W$ получаем следующее уравнение:

$$\Delta\Delta W + \varkappa_*^2 \ddot{W} = 0 \tag{8}$$

Краевые условия примем в виде

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial f} = 0 \text{ при } f = 0, \tag{9}$$

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{\nu_*}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} + m_t^* = 0 \text{ при } \rho = 1. \tag{10}$$

Здесь

$$\varkappa_*^2 = \Omega_* D_*^{-1}; \; D_* = 2\rho_2\delta + (\rho_1 - \rho_2)\varepsilon; \; \rho = \frac{r}{R}; \; \nu_* = \nu_2 B_2; \; W = \frac{\lambda_1 w}{\alpha_t^{(1)} q (1+\nu_2) R^2};$$

$$D_* = \frac{\eta_2 \delta^3}{3} \{[1 + (1-u)^3] + K_\eta^{-1}[1 - (1-u)^3]\}; \; \Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right); \; K_\eta = \frac{\eta_2}{\eta_1};$$

$$B_2 = \frac{m_2}{m_1}; \quad m_1 = m_{01}^+ + K_\nu^{-1} K_E^{-1} \frac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2} m_{01}^-; \quad K_\nu = \frac{\nu_2}{\nu_1}; \quad K_E = \frac{E_2}{E_1};$$

$$m_2 = m_{01}^+ + K_E^{-1} m_{01}^-; \quad m_{01}^\pm = 1 \pm (1-u)^3; \quad m_t^* = k_1 \left[k_2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Delta_2(\mu_i)}{\mu_i^4 \Delta(\mu_i)} e^{-\mu_i^2 f}\right];$$

$$k_1 = \frac{m_2}{3}; \quad k_2 = k_{21} + k_{22} + k_{23} + k_{24}; \quad k_{21} = k_0 k_3; \quad k_0 = K_E^{-1} \frac{1-\nu_2}{1-\nu_1} - K_\alpha;$$

$$k_3 = \frac{1}{2}[(1-u)^2 - 1] f l_0^{-1} K_a^{-\frac{1}{2}}; \; K_\alpha = \frac{\alpha_t^{(2)}}{\alpha_t^{(1)}}; \quad k_{22} = \frac{1}{2} k_0 l_{31} l_0^{-2} [(1-u)^2 - 1];$$

$$k_{23} = k_{01} k_4; \quad k_{01} = k_0 + K_\alpha; \quad k_4 = \frac{k_5}{24 K_a l_0}; \qquad k_5 = 4K_\varepsilon K_a u^2 (2-u)(u-3) -$$

$$- 6K_a^{-\frac{1}{2}}(2-u)^2[1-(1-u)^2] - K_a^{\frac{3}{2}} u^3 (4-u); \qquad k_{24} = \frac{K_\alpha (2-u)^3 (2-3u)}{24\sqrt{K_a}\, l_0};$$

$$\Delta_2(\mu_i) = K_\alpha [\cos \mu_i (2-u) - 1 + \mu_i (1-u) \sin \mu_i (2-u)] +$$

$$+ k_{01} \{K_a^{-1} \cos \mu_i (2-u) [\cos \mu_i K_a^{\frac{1}{2}} u - 1] - K_\varepsilon \sin \mu_i (2-u) [K_a^{-1} \sin \mu_i K_a^{\frac{1}{2}} u -$$

$$- K_a^{-\frac{1}{2}} \mu_i (2-u)]\}; \quad \eta_i = \gamma_i \left(1 + \frac{\mu_i}{\lambda_i}\right); \quad \gamma_i = \frac{2\lambda_i \mu_i}{\lambda_i + 2\mu_i};$$

$\lambda_i$, $\mu_i$ — коэффициенты Ляме; $\nu_i$ — коэффициент Пуассона; $\alpha_t^{(i)}$ — коэффициент температурного расширения.

Представляя прогиб, как и в работе [2], в виде суммы квазистатической составляющей $W_{st}$ и динамической составляющей $W_d$, где $W_{st}$ и $W_d$ удовлетворяют соответствующим уравнениям при аналогичных краевых условиях, получаем их выражения в следующем виде:

$$W_{st} = 2k_1 \left\{k_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta_m(\rho)}{\alpha_m^2 D_m} + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta_m(\rho)}{\alpha_m^2 D_m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Delta_2(\mu_i)}{\mu_i^4 \Delta(\mu_i)} e^{-\mu_i^2 f}\right\}, \tag{11}$$

$$W_d = 2k_1 \left\{2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta_m(\rho)}{\alpha_m^2 D_m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Delta_2(\mu_i)}{\mu_i^2 \Delta(\mu_i)} \frac{\beta_m \sin \beta_m f + \mu_i^2 (\cos \beta_m f - e^{-\mu_i^2 f})}{\mu_i^4 + \beta_m^2} - \right.$$

$$\left. - k_{21}^* \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta_m(\rho)}{\alpha_m^2 D_m} \frac{\sin \beta_m f}{\beta_m}\right\}, \tag{12}$$

где

$$\eta_m(\rho) = I_0(\alpha_m)\, J_0(\alpha_m\rho) - J_0(\alpha_m)\, I_0(\alpha_m\rho); \quad \beta_m = \frac{\alpha_m^2 B^2}{b_1}; \quad B = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}};$$

$$\varkappa^2 = \frac{\Omega_2 a_2^2 R^4}{D_2 \delta^4}; \quad \Omega_2 = 2\rho_2\delta; \quad D_2 = \frac{\eta_2\delta^3}{3}; \quad k_{21}^{*} = \frac{k_{21}}{f};$$

$$b_1^2 = 2\left[1 + \frac{1}{2}(K_\rho^{-1} - 1)\, u\right] m_2^{-1}; \quad K_\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}; \quad D_m = \alpha_m [I_0(\alpha_m)\, J_1(\alpha_m) -$$

$$- J_0(\alpha_m)\, I_1(\alpha_m)] - (1 + \nu_*)\, J_0(\alpha_m)\, I_0(\alpha_m);$$

$\alpha_m$ — корни трансцендентного уравнения

$$\frac{J_1(\alpha)}{J_0(\alpha)} + \frac{I_1(\alpha)}{I_0(\alpha)} = \frac{2\alpha}{1 - \nu_*}.$$

На рис. 2 приведены графики изменения отношения полного прогиба

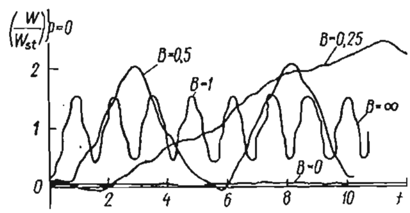


Рис. 2

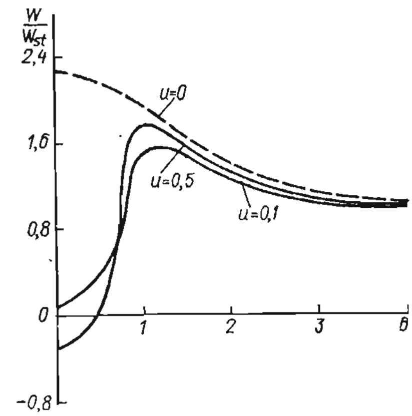


Рис. 3

в центре пластины $W|_{\rho=0}$ к квазистатическому прогибу $W_{st}|_{\rho=0}$ в зависимости от безразмерного времени при различных значениях параметра $B$.

Численный расчет проведен для стальной пластины с медным покрытием при отношении толщины покрытия $\varepsilon$ к полутолщине пластины $\delta$, равном 0,1. Как и в случае однородной пластины, динамический прогиб колеблется относительно статического, но при $B \to 0$ это отношение отлично от нулевого, т. е. не полностью предотвращается влияние сил инерции за счет различия физико-механических характеристик пластины и покрытия. При $B = 1$ амплитуда отношения уменьшается по сравнению с однородной пластиной в 1,33 раза. При $B \to \infty$ влияние сил инерции исчезает и $W = W_{st}$.

На рис. 3 показано изменение отношения $\left(\frac{W}{W_{st}}\right)_{\rho=0}$ в зависимости от параметра $B$ при $f = 1$. Штриховой линией показано соответствующее отношение в случае однородной пластины. Как видно из графика, при $B \to 0$ это отношение в сравнении с однородной пластиной уменьшается и при $u = 0{,}5$ оно меняет знак. При $B \to \infty$ отношение стремится к квазистатическому.


1. *Иваньк Е. Г.* Одномерная динамическая задача термоупругости для кусочно-однородного полупространства.— В кн.: Математические методы в термомеханике. Киев : Наук. думка, 1978, с. 137—144.
2. *Коваленко А. Д.* Избранные труды.— Киев : Наук. думка, 1976.— 762 с.
3. *Коляно Ю. М., Попович В. С.* Уравнения термоупругости неоднородных и кусочно-однородных пластин.— В кн.: Математические методы в термомеханике. Киев : Наук. думка, 1978, с. 50—63.



Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР



Поступила в редколлегию 19.12.78