и при $r = r_1$

$$v_2(r_1, \theta) = \frac{\sqrt{r_1}\sqrt[4]{G_2(r_1)}}{\sqrt[4]{G_1(r_1)}} \sum_{e=1}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{ke\pi^2}{\alpha}B_e + \operatorname{sh}\frac{ke\pi^2}{\alpha}D_e\right)\sin\frac{e\pi\theta}{\alpha} =$$

$$= f_2(\theta) + \int_{r_0}^{r_1} \rho G_1(\rho)\,d\rho.$$

Отсюда

$$B_e = \frac{\sqrt[4]{G_1(r_0)}}{\sqrt{r_0}\sqrt[4]{G_2(r_0)}} \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f_1(\theta)\sin\frac{e\pi\theta}{\alpha}\,d\theta, \tag{26}$$

$$D_e = \frac{\sqrt[4]{G_1(r_1)}}{\sqrt{r_1}\sqrt[4]{G_2(r_1)}\operatorname{sh}\frac{e\pi^2 k}{\alpha}}\left(\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}\left(f_2(\theta) + \int_{r_0}^{r_1}\rho G_1(\rho)\,d\rho\right)\sin\frac{e\pi\theta}{\alpha}\,d\theta -\right.$$

$$\left. - \frac{2}{\alpha}\frac{\sqrt[4]{G_2(r_1)}}{\sqrt[4]{G_1(r_1)}}\frac{\sqrt{r_1}\sqrt[4]{G_1(r_0)}}{\sqrt{r_0}\sqrt[4]{G_2(r_0)}}\operatorname{ch}\frac{ek\pi^2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f_1(\theta)\sin\frac{e\pi\theta}{\alpha}\,d\theta\right). \tag{27}$$

В итоге решение задачи (3), (4) о кручении ортотропного неоднородного стержня с сечением в виде части кругового кольца представляется так:

$$u(r, \theta) = -\int_{r_0}^{r}\rho G_1(\rho)\,d\rho + v_1(r, \theta) + v_2(r, \theta),$$

где $v_1(r, \theta)$ и $v_2(r, \theta)$ — ряды (18) и (25) с соответствующими коэффициентами (19), (20) и (26), (27).

Если функции $\psi_1(r)$, $\psi_2(r)$ и $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ непрерывно дифференцируемые четыре раза соответственно на отрезках $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$ и $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$, а на их концах удовлетворяют условиям

$$\psi_1(r_0) = \psi_2(r_0) = 0,\ \psi_1'(r_0) = \psi_2'(r_0) = u_0'(r_0),$$

$$\psi_1''(r_0) = \psi_2''(r_0) = u_0''(r_0),\ \psi_1(r_1) = \psi_2(r_1) = u_0(r_1),$$

$$\psi_1'(r_1) = \psi_2'(r_1) = u_0'(r_1),\ \psi_1''(r_1) = \psi_2''(r_1) = u_0''(r_1);$$

$$f_1(0) = f_1(\alpha) = f_1''(0) = f_1''(\alpha),\ f_2(0) = f_2(\alpha) = u_0(r_1),$$

$$f_2''(0) = f_2''(\alpha) = 0,$$

то полученное решение будет классическим.

1. *Костенко В. Г., Веселовська О. О.* Загальне лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку на площині, інваріантне відносно однієї заданої групи перетворень.— Вісн. Льв. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1972, вип. 7, с. 86—90.
2. *Костенко К. С.* Умови інтегрування у квадратурах деяких звичайних дифференціальних рівнянь другого порядку.— Вісн. Льв. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1972, вип. 7, с. 61—69.
3. *Лехницкий С. Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней.— М.: Наука, 1971.— 240 с.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 02.06.78

УДК 513.88

О. Г. Сторож

К ВОПРОСУ ОБ ОБРАТИМОСТИ ТРЕУГОЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n$ — комплексные гильбертовы пространства, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \oplus \ldots \oplus \mathfrak{H}_n$ — их ортогональная сумма, P_i — ортопроектор из $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_i$, $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$; $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_i, \mathfrak{H}_j)$ (где $\mathfrak{H}_i$ и $\mathfrak{H}_j$ — гильбертовы пространства) — пространство, линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathfrak{H}_l$ в $\mathfrak{H}_i$; $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_i) = \mathcal{B}(\mathfrak{H}_i, \mathfrak{H}_i)$; $Z(A)$ и $R(A)$ — многообразие нулей и область значений оператора A. Обозначим через A_j сужение оператора A на $\mathfrak{H}_j$ и положим $A_{ij} = P_i A_j$. Ясно, что $A_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{B}_j, \mathfrak{H}_i)$. Известно [2], что соответствие $A \leftrightarrow (A_{ij})$ обладает всеми естественными алгебраическими свойствами. В частности, матрица, соответствующая сопряженному оператору A^*, получается из матрицы оператора A транспонированием и сопряжением, т. е. на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы оператора A^* стоит элемент A^*_{ji}. Умножению операторов соответствует умножение матриц по формуле $(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik}B_{kj}$.

Рассмотрим операторные матрицы второго порядка, имеющие треугольный вид. Если размерность пространства $\mathfrak{H}$ конечна, то необходимым и достаточным условием обратимости такой матрицы является обратимость ее диагональных элементов. В общем случае это условие оказывается достаточным, но не необходимым.

Установим необходимое и достаточное условие корректной обратимости рассматриваемых операторных матриц в терминах их элементов.

Лемма 1. Если A, $A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2)$ и $A_{21} = 0$, то $Z(A_{11}) = \{0\}$, $R(A_{22}) = \mathfrak{H}_2$.

Доказательство. Справедливость первого утверждения леммы следует из того, что если для некоторого $h_1 \in \mathfrak{H}_1$, $A_{11}h_1 = 0$, то $Ah = 0$ при $h = (h_1, 0)$. Кроме того, при сделанных выше предположениях

$$h_2 = A_{22}P_2A^{-1}(0, h_2), \quad h_2 \in \mathfrak{H}_2,$$

т. е. $R(A_{22}) = \mathfrak{H}_2$.

Пример. Пусть $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2 = \mathcal{H}$, а U — произвольный изометрический, но не унитарный оператор в H. Рассмотрим оператор $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$, отвечающий матрице

$$\begin{pmatrix} U & 1 - UU^* \\ 0 & U^* \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что он является унитарным и удовлетворяет всем условиям леммы 1. Вместе с тем ни одно из соотношений

$$R(V_{11}) = \mathcal{H}, \ Z(V_{22}) = \{0\}, \ (V^{-1})_{21} = 0,$$

которые в случае конечномерного $\mathcal{H}$ автоматически следуют из обратимости $\mathcal{H}$, не выполняется.

Покажем, что эти соотношения могут выполняться или нарушаться только одновременно.

Лемма 2. Пусть A, $A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2)$ и $A_{21} = 0$. Тогда соотношения а) $R(A_{11}) = \mathfrak{H}_1$, б) $Z(A_{22}) = \{0\}$, в) $(A^{-1})_{21} = 0$ эквивалентны.

Доказательство. Предположим, что выполняется соотношение а). Тогда из леммы 1 следует, что $(A_{11})^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_1)$. Пусть для некоторого $h_2 \in \mathfrak{H}_2$ $A_{22}h_2 = 0$. Положим $h = (-(A_{11})^{-1}A_{12}h_2, h_2)$. Легко видеть, что $Ah = 0$. Поэтому $h_2 = P_2A^{-1}0 = 0$, т. е. справедливо соотношение б).

Пусть теперь выполняется соотношение б). Вычитая из первого из двух очевидных тождеств $P_2AA^{-1}P_1 = 0$, $P_2AP_1A^{-1}P_1 = 0$ второе, получаем $A_{22}P_2A^{-1}P_1 = 0$. Используя обратимость оператора A_{22}, убеждаемся в справедливости соотношения в).

Предположим, что $(A^{-1})_{21} = 0$, или, что эквивалентно, $P_2A^{-1}P_1 = 0$. Тогда для всякого $h_1 \in \mathfrak{H}_1$ имеем (при $h = (h_1, 0)$) $A_{11}P_1A^{-1}h = P_1AP_1A^{-1}P_1h + P_1AP_2A^{-1}P_1h = h_1$, т. е. $R(A_{11}) = \mathfrak{H}_1$. Лемма доказана.

Сформулированные выше утверждения касаются верхних треугольных матриц. Однако аналогичные свойства имеют и нижние треугольные матрицы. Справедлив следующий результат.

Лемма 3. Пусть B, $B^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2)$ и $B_{12} = 0$. Тогда $Z(B_{22}) = \{0\}$, $R(B_{11}) = h_1$, а выполнение каждого из соотношений $Z(B_{11}) = \{0\}$, $R(B_{22}) = \mathfrak{H}_2$, $(B^{-1})_{12} = 0$ влечет за собой выполнение остальных.

Доказательство аналогично доказательству лемм 1 и 2.

Следствие 1. Операторы, стоящие на главной диагонали верхней (нижней) треугольной матрицы второго порядка, соответствующей корректно обратимому оператору $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2)$, являются корректно обратимыми или необратимыми одновременно. Первое имеет место тогда и только тогда, когда матрица оператора A^{-1} является верхней (нижней) треугольной.

Следствие 2. Пусть хотя бы одно из пространств $\mathfrak{H}_1$ или $\mathfrak{H}_2$ конечномерно, $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2)$ и матрица оператора A треугольна. Тогда $A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2)$ тогда и только тогда, когда $(A_{11})^{-1} \in \mathcal{B}(h_1)$ и $(A_{22})^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_2)$.

Сформулируем теперь основной результат настоящей статьи.

Теорема 1. Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2)$, $A_{21} = 0$. Тогда $Z(A) = \{0\}$ тогда и только тогда, когда 1) $Z(A_{11}) = \{0\}$, 2) $Z(A_{12}) \cap Z(A_{22}) = \{0\}$, 3) $R(A_{11}) \cap R(A_{12} | Z(A_{22})) = \{0\}$ ($A_{12} | Z(A_{22})$ — сужение оператора A_{12} на $Z(A_{22})$); $R(A) = \mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда 4) $R(A_{22}) = \mathfrak{H}_2$, 5) $R(A_{11}) + R(A_{12} | Z(A_{22})) = \mathfrak{H}_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Z(A) = \{0\}$. Справедливость соотношения 1) фактически показана при доказательстве леммы 1. Справедливость соотношения 2) следует из того, что если $A_{12}h_2 = A_{22}h_2 = 0$, где $h_2 \in \mathfrak{H}_2$, то $A(0, h_2) = 0$. Далее, если $A_{22}h_2 = 0$ и существует $h_1 \in \mathfrak{H}_1$ такое, что $A_{11}h_1 + A_{12}h_2 = 0$, то $A(h_1, h_2) = 0$, поэтому имеет место соотношение 3). Наоборот, пусть выполняются соотношения 1) — 3) и $A(h_1, h_2) = 0$, $h_1 \in \mathfrak{H}_1$, $h_2 \in \mathfrak{H}_2$. Тогда $A_{11}h_1 = -A_{12}h_2 \in R(A_{11}) \cap R(A_{12} | Z(A_{22})) = \{0\}$, следовательно, $h_1 \in Z(A_{11}) = \{0\}$, $h_2 \in Z(A_{12}) \cap Z(A_{22}) = \{0\}$.

Предположим, что $R(A) = \mathfrak{H}$ и A^{-1} — правый обратный к A оператор. Доказательство соотношения (4) аналогично доказательству второго утверждения леммы 1. Справедливость соотношения 5) следует из того, что для всякого $h_1 \in \mathfrak{H}_1$ имеем $h_1 = (A_{11}P_1A^{-1} + A_{12}P_2A^{-1})(\mathfrak{h}_1, 0)$.

Если выполняются соотношения 4), 5), то для всякого $h_2 \in \mathfrak{H}_2$ существует решение уравнения $A_{22}y = h_2$ и для всякого $h_1 \in \mathfrak{h}_1$ существует решение системы $A_{11}x + A_{12}z = h_1 - A_{12}y$, $A_{22}z = 0$. Ясно, что $A[(0, y) + (x, z)] = (h_1, h_2)$. Теорема 1 доказана.

Аналогичное утверждение справедливо и для нижних треугольных матриц. Теперь нетрудно сформулировать критерий корректной обратимости рассматриваемых операторов.

Теорема 2. Пусть $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2)$ и $B_{12} = 0$. Тогда $B^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2)$ тогда и только тогда, когда 1) $Z(B_{22}) = \{0\}$, 2) $R(B_{11}) = \mathfrak{H}_1$, 3) $Z(B_{21}) \cap Z(B_{11}) = \{0\}$, 4) $R(B_{22}) \dotplus R(B_{21} | Z(B_{11})) = \mathfrak{H}_2$ ($\dotplus$ — знак прямой суммы).

Следствие 3. Операторы, стоящие на главной диагонали треугольной матрицы второго порядка, соответствующей корректному оператору, нормально разрешимы и дефект каждого из них равен кодефекту другого.

Справедливость этого результата вытекает из теорем 1, 2 и нормальной разрешимости оператора, сопряженного к нормально разрешимому [1].

1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
2. *Халмош Н.* Гильбертово пространство в задачах.— М. : Мир, 1970.— 352 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
17.10.78