t, с	Аналитический метод	Численный метод	t, с	Аналитический метод	Численный метод
0,0	0,30000	0,30000	1,1	—0,20813	—0,30800
0,1	0,28530	0,28588	1,2	—0,18119	—0,18354
0,2	0,24445	0,24649	1,3	—0,13825	—0,14285
0,3	0,18348	0,18737	1,4	—0,08411	—0,09041
0,4	0,10955	0,11521	1,5	—0,02418	—0,03156
0,5	0,03030	0,03730	1,6	0,03569	0,02797
0,6	—0,04672	—0,03905	1,7	0,08992	0,08260
0,7	—0,11464	—0,10714	1,8	0,13365	0,12741
0,8	—0,16782	—0,16129	1,9	0,16317	0,15856
0,9	—0,20222	—0,19739	2,0	0,17621	0,17358
1,0	—0,21572	—0,21310	2,1	0,17209	0,17162

Отсюда

$$\delta_1^{(1)} = 0{,}03200; \quad \gamma_1^{(1)} = -0{,}06145$$

Аналогично

$$\delta_2^{(1)} = -0{,}13062, \ \gamma_2^{(1)} = 0{,}12309,$$

$$\delta_3^{(1)} = -0{,}00002, \ \gamma_3^{(1)} = 0{,}00898,$$

$$\delta_4^{(1)} = 0{,}00366, \quad \gamma_4^{(1)} = -0{,}00937,$$

$$\delta_5^{(1)} = -0{,}00011, \ \gamma_5^{(1)} = -0{,}00036 \text{ и т. д.}$$

Всего найдено 29 значений $\delta_n^{(1)}$ и $\gamma_n^{(1)}$. Вычисления, проведенные на кафедре вычислительной математики Львовского университета инженером М. А. Дзындрой, показали, что такого количества членов ряда достаточно для обеспечения заданной точности. Постоянные $B_1 = -0{,}4439$, $B_2 = 0{,}3582$ находились для начальных условий $t = 0$, $\alpha_0 = 0{,}3$ рад, $\alpha_0 = 0$.

В таблице приведены результаты вычислений аналитическим (когда решение представлено рядом) и численным методами.

1. *Латышева К. Я., Терещенко Н. И.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их приложения.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1970.— 393 с.
2. *Сокол Э. Н.* Движение материальной точки в криволинейном трубопроводе с учетом сил сопротивления.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 8, с. 124—127.

Киевское высшее военное инженерное училище связи
Украинский научно-исследовательский геолого-разведочный институт

Поступила в редколлегию 19.07.78

УДК 539.377

Г. С. Кит, И. П. Лысый

ВЛИЯНИЕ ИСТОЧНИКА ТЕПЛА НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОСЫ С ТРЕЩИНОЙ

Пусть упругая бесконечная полоса шириной $2d$, в которой имеется теплоизолированная трещина длиной $2l$, расположенная на средней линии полосы, нагревается стационарным источником тепла мощности W. Предположим, что на гранях полосы, свободных от внешних усилий, заданы температурные условия первого, второго или третьего рода.

Температуру $T(x, y)$ представим в виде двух слагаемых:

$$T(x, y) = t^*(x, y) + t(x, y). \tag{1}$$

Здесь $t^*(x, y)$ — основное температурное поле в сплошной полосе с источником тепла, размещенным в точке $A(b, c)$, которое определяем из уравнения [4]

$$\Delta t^*(x, y) = -\frac{W}{\lambda}\,\delta(x-b)\,\delta(y-c) \tag{2}$$

при заданных условиях на гранях полосы; $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака; λ — коэффициент теплопроводности. Для определения возмущенного температурного поля $t(x, y)$, обусловленного наличием трещины, имеем сингулярное интегральное уравнение [1]

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} t'(\xi)\,K\left(\frac{\xi-x}{\delta}\right)d\xi = \delta f(x),\quad |x|\leqslant 1,\\ K(w) = \int_0^\infty L(\eta)\sin\eta w\,d\eta,\quad f(x) = -\frac{\partial t^*(x, y=0)}{\partial y},\end{gathered} \tag{3}$$

где $\delta = \frac{d}{l}$, а $L(\eta)$ для рассматриваемых граничных условий имеет вид

$$1)\ L(\eta) = \operatorname{cth}\eta,\quad 2)\ L(\eta) = \operatorname{th}\eta,\quad 3)\ L(\eta) = \frac{\eta\operatorname{th}\eta + hd}{\eta + hd\operatorname{th}\eta};$$

h — приведенный коэффициент теплообмена.

Уравнение (3) при заданных на гранях полосы температуре или тепловых потоках решается точно, а при конвективном теплообмене в случае широкой полосы ($\delta > 1$) — приближенно, асимптотическим методом [1].

В качестве примера рассмотрим полосу с источником тепла постоянной мощности W, расположенным в точке $A(0, c)$, грани которой поддерживаются при нулевой температуре. Тогда из (2) имеем [4]

$$t^*(x, y) = \frac{W}{4\pi\lambda}\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{\delta} + \cos\frac{\pi(y+c)}{\delta}}{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{\delta} - \cos\frac{\pi(y-c)}{\delta}}. \tag{4}$$

Решим интегральное уравнение (3). В результате найдем

$$\begin{gathered}t(x) = \frac{W}{2\pi\lambda}\sqrt{1-x^2}\,\{[L_0(x) + L(x)](1-x^2)^{-1/2} + 2d_1(M_0+M)\,\delta^{-2} + \\ + [(M_0+M)(d_1^2 + d_2(1+x^2)) + d_2(N_0+N)]\,\delta^{-4} + O(\delta^{-6})\}.\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь введены обозначения

$$Z = \sum_{k=1}^{\infty}(Z_{+k} - Z_{-k});\quad d_k = \frac{(-1)^k}{(2k-1)!}\int_0^\infty [1 - L(\eta)]\,\eta^{2k-1}d\eta,$$

где Z обозначает любую из величин L, M, N:

$$L_{\pm k} = \ln\frac{c_{\pm k} + \sqrt{1-x^2}}{c_{\pm k} - \sqrt{1-x^2}},\quad M_{\pm k} = c_{\pm k} - |a_{\pm k}|,$$

$$N_{\pm k} = c_{\pm k} - 2a_{\pm k}^2 c_{\pm k} + 2|a_{\pm k}^3|,\quad a_{\pm k} = c \pm 2k\delta,\quad c_{\pm k} = \sqrt{1 + a_{\pm k}^2},$$

Z_0 обозначает $Z_{\pm k}$, вычисленное при $k = 0$.

В таблице для некоторых значений δ приведены величины $L(0)$, M и N при $c = 1$, а также максимальное значение температуры $t(x)$, подсчитанное по формуле (5) при $x = 0$.

Определим коэффициенты интенсивности напряжений. Возмущенное температурное поле вызывает в окрестности трещины только поперечный сдвиг, вследствие чего коэффициент $k_1^t = 0$, а k_2^t находим по формуле [6]

$$k_2^t = \mp\frac{E\sqrt{\pi l}}{2(1-\chi^2)}\lim_{x\to\pm 1}\sqrt{1-x^2}\,\frac{\partial u(x, 0)}{\partial x}, \tag{6}$$

δ	1,5	2	3	5	10	∞
$L(0)$	—0,7420	—0,4088	—0,1777	—0,0622	—0,0146	0
M	0,1838	0,1030	0,0454	0,0162	0,004	0
N	0,2549	0,1496	0,0599	0,0200	0,005	0
$\frac{\pi\lambda}{W} t\ (0)$	0,3804	0,6215	0,7599	0,8343	0,8495	0,8801

где $\chi = \nu$ в случае плоской деформации: $\chi = 0$ в случае обобщенного плоского напряженного состояния; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; $u(x)$ — смещение верхнего берега трещины в направлении оси Ox. Производная функции $u(x)$ определяется из интегрального уравнения [2]

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) R\left(\frac{\xi - x}{\delta}\right) d\xi = 0, \quad \varphi(x) = u'(x) - \beta t(x), \quad \beta = \alpha(1 + \chi), \tag{7}$$

$$R(w) = \int_{0}^{\infty} L^*(\eta) \sin \eta w \, d\eta, \quad L^*(\eta) = 2\,\frac{\operatorname{sh}^2 \eta - \eta^2}{\operatorname{sh} 2\eta - 2\eta}, \tag{8}$$

(α — коэффициент линейного теплового расширения). Из уравнения (7) найдем

$$u'(x) = \beta\left[t(x) - \frac{B\psi(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\right], \quad B = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} t(x)\, dx, \tag{9}$$

где

$$\psi(x) = 1 - e_1\left(\frac{1}{2} - x^2\right)\delta^{-2} - e_2\left(\frac{7}{8} - x^2 - x^4\right)\delta^{-4} -$$
$$-\left[\frac{3}{8} e_1 e_2\left(\frac{1}{2} - x^2\right) + e_3\left(\frac{13}{8} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{2}x^4 - x^6\right)\right]\delta^{-6} + O(\delta^{-8});$$

$$e_k = \frac{(-1)^k}{(2k - 1)!}\int_{0}^{\infty} [1 - L^*(\eta)]\,\eta^{2k-1} d\eta; \quad e_1 = -1{,}3289; \quad e_2 = 0{,}9667;$$

$$e_3 = -0{,}5154.$$

Подставляя найденное выражение $u'(x)$ в формулу (6), получаем

$$k_2^t = \mp \frac{\sqrt{\pi l}\, \beta B E \psi(1)}{2(1 - \chi^2)}.$$

Для определения коэффициентов интенсивности напряжений, обусловленных основным температурным полем (4), воспользуемся формулой

$$k_i^0 = l \int_{-1}^{1} k_i^*(x)\, \sigma_{jy}^0(x)\, dx, \quad i = 1, 2; \; j = x, y, \tag{10}$$

где k_i^* — фундаментальные коэффициенты интенсивности напряжений, обусловленные приложенными к берегам трещины в точке $\xi = x$ равными и противоположно направленными сосредоточенными единичными нормальными и касательными силами; $\sigma_{jy}^0(x)$ — нормальные и касательные напряжения на линии трещины в сплошной полосе, обусловленные источником тепла.

Выражения для k_i^* имеют вид [3]

$$k_i^*(\pm l, x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{\pi l}}\left\{\frac{1}{1\mp x} - c_{i1}\delta^{-2} + \left[\varepsilon_{i1} + c_{i2}x\left(\pm\frac{3}{2} - x\right)\right]\delta^{-4} + \right.$$

$$\left. + \left[\varepsilon_{i2} + \varepsilon_{i3}x^2 \pm \frac{5}{2}c_{i3}x(1+2x^2) - c_{i3}x^4\right]\delta^{-6} + O(\delta^{-8})\right\}, \qquad (11)$$

$$\varepsilon_{i1} = \frac{c_{i1}^2}{2} - 2c_{i2},\ \ \varepsilon_{i2} = \frac{1}{4}(7c_{i1}c_{i2} - c_{i2}^3 - 19c_{i3}),$$

$\varepsilon_{i3} = \frac{1}{2}(11c_{i3} - c_{i2}c_{i2})$, $c_{1i} = -2{,}2836$, $c_{12} = 1{,}6966$, $c_{13} = -0{,}8502$, $c_{2k} = e_k$.

Напряжения в сплошной полосе на линии трещины будут такими [4]:

$$\sigma_{yy}^0 = KG\left\{\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2\delta} - \cos\frac{\pi c}{2\delta}}{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2\delta} + \cos\frac{\pi c}{2\delta}} + \frac{x\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2\delta}\cos\frac{\pi c}{2\delta}}{\operatorname{ch}^2\frac{\pi x}{2\delta} - \cos^2\frac{\pi c}{2\delta}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\delta}{\pi}\int_0^\infty \frac{\eta c\operatorname{ch}\eta_1\operatorname{sh}\eta c - \eta_1\operatorname{sh}\eta_1\operatorname{ch}\eta c}{\operatorname{ch}^2\eta_1(\operatorname{sh}2\eta_1 + 2\eta_1)}\cos\eta x d\eta\right\},\ \ \eta_1 = \eta\delta; \qquad (12)$$

$$\sigma_{xy}^0 = KG\left\{\frac{x\sin\frac{\pi c}{2\delta}}{8\delta\left(\operatorname{ch}^2\frac{\pi x}{2\delta} - \cos^2\frac{\pi c}{2\delta}\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta}{\pi}\int_0^\infty \frac{(\eta c\operatorname{sh}\eta_1\operatorname{ch}\eta c - \eta_1\operatorname{ch}\eta_1\operatorname{sh}\eta c)(\eta_1\operatorname{ch}\eta_1 - \operatorname{sh}\eta_1)\sin\eta x d\eta}{\eta_1\operatorname{sh}^2\eta_1(\operatorname{sh}2\eta_1 - 2\eta_1)}\right\},$$

где $K = \frac{(1+\nu)\alpha W}{\lambda(1-\chi)}$; G — модуль сдвига.

Подставляя выражения (11), (12) в формулу (10), получаем значения k_i^0.

Пусть кроме тепловых воздействий к берегам трещины приложена нормальная нагрузка $p(x) = p = \text{const}$. Тогда из формул (10), (11) имеем

$$k_1^p = p\sqrt{\pi l}\left[1 - \frac{c_{11}}{2}\delta^{-2} + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{11} - \frac{c_{12}}{4}\right)\delta^{-4} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{12} + \frac{\varepsilon_{13}}{4} - \frac{c_{12}}{8}\right)\delta^{-6} + O(\delta^{-8})\right],\ \ k_2^p = 0. \qquad (13)$$

Коэффициенты интенсивности напряжений, обусловленные температурным полем и нагрузкой p, определяются формулой

$$k_i = k_i^t + k_i^0 + k_i^p. \qquad (14)$$

1. *Кит Г. С., Лысый И. П.* Стационарное температурное поле в полосе и слое при смешанных граничных условиях.— Инж.-физ. журн., 1972, 22, № 1, с. 123—128.
2. *Кит Г. С., Лысый И. П.* Плоская и осесимметричная задача термоупругости для слоя с трещиной.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 155—160.
3. *Кит Г. С., Лысый И. П.* Симметричная задача термоупругости для полосы с продольной трещиной.— В кн.: Математические методы в термомеханике. Киев : Наук. думка, 1978, с. 28—36.
4. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости.— М. : Изд-во АН СССР, 1962.— 364 с.
5. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами.— Киев : Наук. думка, 1968.— 246 с.
6. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения.— М.: Наука, 1974.— 640 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
26.02.79