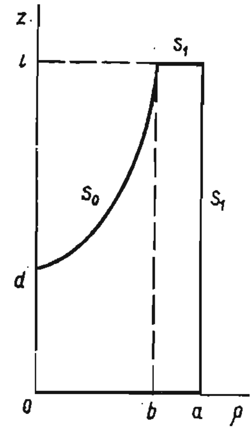
УДК 563.2

А. П. Слесаренко, Н. А. Сафонов

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В КОНЕЧНОМ ТЕПЛОИЗЛУЧАЮЩЕМ ЦИЛИНДРЕ С ПОЛОСТЬЮ

Рассмотрим задачу о распределении температуры в конечном цилиндре с полостью (см. рисунок) при условии, что поверхность S_0 поддерживается при температуре αT_0, нижнее основание ($z = 0$) теплоизолировано, а остальная поверхность S_1 излучает тепло по закону Стефана — Больцмана.

Определение температурного поля в цилиндре в этом случае сводится к интегрированию уравнения теплопроводности



$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (1)$$

при следующих граничных условиях:

$$u|_{S_0}=\alpha, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}+h^*u^4|_{S_1}=0, \qquad (3)$$

где ν — направление внешней нормали к поверхности S_1;

$$\gamma=\frac{h}{l}; \quad \rho=\frac{r}{l}; \quad z=\frac{z_1}{l};$$

$$\beta=\frac{a}{l}; \quad u=\frac{u^*}{T_0}; \quad h^*=\frac{\sigma_0\varepsilon a_0 T_0^3}{\lambda}.$$

Сведем решение задачи (1) — (3) к решению последовательности линейных краевых задач тепловодности [1]:

$$\begin{gathered}\Delta u_{ij}=0,\\ u_{ij}|_{S_0}=\alpha, \qquad \left.\frac{\partial u_{ij}}{\partial z}\right|_{z=0}=0,\\ \frac{\partial u_{ij}}{\partial\nu}+h^*u^3_{p_{ij}}u_{ij}|_{S_1}=0,\end{gathered} \qquad (4)$$

$$u_{3j}=\frac{1}{2}(u_{1j}+u_{2j}), \quad u_{11}=\alpha, \quad p_{1j}\to 3,\ j-1; \quad p_{2j}\to 1,\ j,$$

где j — номер итерации.

Структуры решения краевых задач (4) представим в виде [1]

$$u_{ij}=\Phi_0+\sum_{k,s}C_{ks}^{(ij)}X_{ks}(\rho, z)=\Phi_0+T_{ij}, \qquad (5)$$

где $X_{ks}=\omega\rho^{2k}z^{2s}$; $\Phi_0=\alpha$; ω — уравнение кривой S_0. Задачи (4) сведем к соответствующим задачам о минимизации функционала относительно функций T_{ij}:

$$I(T_{ij})=\int\limits_{\Omega}[(\operatorname{grad}T_{ij})^2-2FT_{ij}]\,d\Omega+\int\limits_{S_1}[h^*u^3_{p_{ij}}T^2_{ij}-2f_{ij}T_{ij}]\,dS_1, \qquad (6)$$

$$f_{ij}=-\left.\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\nu}+h^*u^3_{p_{ij}}\Phi_0\right)\right|_{S_1}, \quad F=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi_0}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2},$$

$$p_{1j}\to 3,\ j-1, \quad p_{2j}\to 1,\ j.$$

Неопределенные коэффициенты $C_{ks}^{(ij)}$ для вариационных задач (6) находятся из соответствующих систем Ритца [2].

Для краевой задачи о нелинейной теплопроводности в бесконечном полом цилиндре внутренняя поверхность которого $r = b$ поддерживается

Таблица 1

u_{3j}	ρ				
	0,2000	0,2125	0,2250	0,2375	0,2500
u_T	1925,98	1856,46	1790,91	1728,90	1670,08
u_{31}	1943,29	1889,70	1839,33	1791,88	1746,67
u_{32}	1923,93	1852,05	1784,47	1720,82	1660,18
u_{33}	1926,42	1856,89	1791,53	1729,97	1671,31
u_{34}	1926,11	1856,29	1790,65	1728,83	1669,93
u_{35}	1925,15	1856,37	1790,76	1728,97	1670,10
u_{36}	1926,14	1856,36	1790,75	1728,95	1670,08
u_{37}	1926,14	1856,36	1790,75	1728,96	1670,08

при постоянной температуре αT_0, а внешняя $r = a$ излучает тепло по закону Стефана — Больцмана, можно получить точное решение.

Если принять

$$a_0 = 1 \text{ м}, \quad \gamma = \frac{b}{a_0}, \quad \rho = \frac{r}{a_0}, \quad \beta = \frac{a}{a_0}, \quad u = \frac{u^*}{T_0}; \quad h^* = \frac{\sigma \varepsilon a_0 T_0^3}{\lambda},$$

Таблица 2

t	ρ					
	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
1,0					1866 1848 1835	1531 1488 1501
0,8	1913 1909 1906	1872 1866 1864	1762 1756 1756	1617 1618 1626	1480 1489 1499	1377 1374 1372
0,6	1173 1170 1166	1168 1165 1160	1156 1150 1143	1137 1125 1116	1110 1092 1085	1066 1056 1055
0,4	919 927 932	916 924 930	908 917 924	894 907 914	877 894 900	860 882 879
0,2	868 841 833	866 840 832	861 837 829	853 831 822	846 821 813	843 804 807
0,0	733 742 745	733 741 744	731 737 740	727 730 734	717 723 726	696 719 712

то для нелинейной краевой задачи получим

$$\begin{gathered} \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) = 0, \quad u|_{\rho=\gamma} = \alpha, \\ \frac{\partial u}{\partial\rho} + h^* u^4|_{\rho=\beta} = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Точное решение имеет вид $u_T = \alpha\left(1 - 0,5734044 \ln\frac{\rho}{\gamma}\right)$.

Решение краевой задачи (7) сведем к решению последовательности линейных краевых задач аналогично (4), структуры решений которых выберем в виде

$$u_{ij} = f + \psi_{ij},$$

где

$$\psi_{lj} = \sum_k C_k^{(lj)} X_k(\rho); \quad f = \frac{\alpha\rho^{\gamma}}{\gamma^2}; \quad X_k = (\rho^2 - \gamma^2)\rho^{2k}.$$

Неопределенные коэффициенты $C_k^{(lj)}$ находятся из систем Ритца для последовательности соответствующих краевых задач относительно функций $\psi_{lj}(\rho)$.

В табл. 1 приведены значения температуры в отдельных точках полого бесконечного цилиндра для точного решения u_T и приближенных решений

Таблица 3

z	ρ					
	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
1,0					1894 1888 1854	1535 1515 1540
0,8					1930 1920 1923	1679 1655 1661
0,6					1844 1830 1839	1598 1614 1610
0,4				1911 1907 1900	1695 1675 1664	1513 1500 1497
0,2	2000 2000 2000	1943 1943 1937	1809 1802 1788	1647 1633 1606	1492 1480 1455	1383 1360 1352
0,0	1460 1433 1365	1431 1397 1353	1364 1322 1325	1289 1274 1297	1232 1261 1278	1188 1214 1207

$u_{3j}(\rho)$ для $j = \overline{1,7}$ при трех координатных функциях и следующих значениях:

$$\gamma = 0{,}1875, \quad \beta = 0{,}25, \quad h^* = 5896 \cdot 10^{-9}, \ \alpha = 2000.$$

В табл. 2, 3 приведены результаты расчета краевой задачи (1) — (3) для 15, 21 и 28 координатных функций, когда полость имеет форму полусферы ($\beta = 0{,}1875$) (см. табл. 2) и полуэллипсоида вращения ($\gamma = 0{,}1875$, $d = 0{,}2$) (см. табл. 3) и при следующих значениях: $\gamma = 0{,}1875$, $\beta = 0{,}25$, $l = 1$, $\alpha = 2000$, $h^* = 0{,}5896 \cdot 10^{-9}$.

1. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа.— М.: Физматгиз, 1962.— 279 с.
2. *Рвачев В. Л., Слесаренко А. П., Сафонов Н. А.* О решении стационарных нелинейных краевых задач теплопроводности.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1974, № 11, с. 1015—1021.

Институт проблем
машиностроения АН УССР

Поступила в редколлегию
02.01.79