1. *Tulczyjew W. M.* Sur la differentielle de Lagrange.— C. r. Acad. sci. A, 1975, 280, N 19, p. 1295—1298.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 21.05.79

УДК 534.1 : 531.221.3

Р. М. Таций

О ПОРЯДКЕ РОСТА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО РЯДА

Приведем некоторые необходимые сведения из теории целых функций [4]. На основании известной теоремы Адамара всякую целую функцию

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{1}$$

конечного порядка p можно представить в виде

$$F(z) = e^{g_n(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{p_{mk}(z)}, \tag{2}$$

где z_k — нули функции $F(z)$; $p_{mk}(z)$, $g_n(z)$ — полиномы степеней m и n соответственно, причем $m \leqslant p$, $n \leqslant p$ Большее из чисел m, n называется родом функции $F(z)$.

Пусть $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |F(z)|$. Функция $F(z)$ называется функцией конечного порядка, если существует положительное число a такое, что

$$M(r) < e^{r^a}, \quad r > r_0(a). \tag{3}$$

Нижняя грань p чисел a называется порядком роста функции $F(z)$. Порядок роста функции (1) можно вычислить по формуле

$$p = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k \ln k}{\ln |c_k|^{-1}}. \tag{4}$$

Порядок p и род ρ функции $F(z)$ связаны соотношением

$$p - 1 \leqslant \rho \leqslant p. \tag{5}$$

Порядок суммы и произведения двух функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$ равен большему из них.

Рассмотрим уравнение

$$M[y] = \lambda N[y], \tag{6}$$

где M, N — линейные однородные обыкновенные дифференциальные выражения порядков m и n соответственно $(m > n)$; λ — некоторый (комплексный) параметр, и поставим следующую задачу: определить порядок роста решений уравнения (6) как функций параметра λ.

Определение. Если некоторая функция $y(x)$, являясь решением уравнения (6), одновременно удовлетворяет (не удовлетворяет) уравнениям $M[y] = 0$ и $N[y] = 0$, то такое решение будем называть вырожденным (не вырожденным) по параметру λ.

Очевидно, что вырожденные по параметру λ решения имеют нулевой порядок роста.

Теорема. Пусть коэффициенты дифференциальных выражений M и N интегрируемые на промежутке $[a, b]$. Тогда все невырожденные по λ решения уравнения (6) и их производные по x вплоть до $(m - 1)$-го порядка являются целыми аналитическими функциями параметра λ с порядком роста

$$p \leqslant \frac{1}{m-n}. \tag{7}$$

Доказательство этого утверждения при несколько более жестких ограничениях на коэффициенты дифференциального выражения N приведено в работе [5] и основано на сведении дифференциального уравнения (6) к эквивалентной системе интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с дальнейшим применением метода последовательных приближений и формулы (4).

Следствие 1. Пусть M и N — самосопряженные дифференциальные выражения. Тогда решения уравнения (6) вместе с производными по x до $(m-1)$-го порядка являются целыми аналитическими функциями параметра λ нулевого рода.

Следствие 2. Если правая часть уравнения (6) имеет вид

$$N[y] \equiv \sum_{l=1}^{l} \beta_l N_l[y],$$

то по каждому из параметров β_l решения уравнения (6) и их производные до $(m-1)$-го порядка имеют порядок роста

$$p_i \leqslant \frac{1}{m-n_l}, \tag{8}$$

где $n_l < m$ — порядок старшей производной в дифференциальном выражении N_l.

Следствие 3. Порядок роста любого решения $y(x)$ (вместе с производными до $(m-1)$-го порядка) дифференциального уравнения

$$M[y] = \sum_{l=1}^{l} \lambda^l N_l[y] \tag{9}$$

по параметру λ равен

$$p \leqslant \max_{l}\left(\frac{l}{m-n_l}\right). \tag{10}$$

В качестве приложения рассмотрим вопрос об определении порядка роста, а значит, и рода характеристического определителя нелинейной по спектральному параметру задачи на собственные значения, возникающий, например, при исследовании колебаний и устойчивости загруженных континуальных механических систем.

Рассмотрим уравнение (9) вместе с краевыми условиями

$$u_\mu(\lambda, y) = 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots, m, \tag{11}$$

с целой аналитической зависимостью от λ. Пусть порядок роста форм U_μ как функций параметра λ не превышает величины P_u и пусть характеристическое уравнение нелинейной задачи на собственные значения (9), (11) имеет вид $\Delta(\lambda) = 0$. Тогда порядок роста функции (характеристического ряда) $\Delta(\lambda)$ равен

$$P_\Delta \leqslant \max\left\{\max_{l}\left(\frac{l}{m-n_l}\right), P_u\right\}. \tag{12}$$

На самом деле, поскольку при построении характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ используются производные функций фундаментальной системы решений уравнения (9), а также производится конечное число операций умножения и сложения над функциями, порядки роста которых по параметру λ не превосходят величин $\max_{l}\left(\frac{l}{m-n_l}\right)$ и P_u, то справедливость неравенства (12) очевидна.

Для задач о колебаниях стержневых систем разработаны способы построения последовательностей двусторонних оценок нулей функции $\Delta(\lambda)$ (собственных частот колебаний) при условии, что эта функция нулевого рода [1, 2]. Покажем, что это условие не является существенным и указанные результаты применимы к целым функциям произвольного конечного порядка роста.

Пусть характеристический ряд $\Delta(\lambda)$ имеет конечный порядок роста $P_\Delta \geqslant 1$. Рассмотрим функцию

$$\Delta_1(\lambda^2) = \Delta(\lambda)\Delta(-\lambda) \tag{13}$$

и назовем ее трансформированной по отношению к функции $\Delta(\lambda)$. Порядок роста функции $\Delta_1(\lambda_1)$ относительно переменной $\lambda_1 = \lambda^2$ не превышает величины $P_\Delta/2$, а ее нули равны квадратам соответствующих нулей функции $\Delta(\lambda)$. Если при этом $P_\Delta/2 < 1$, то в силу соотношений (5) функция $\Delta_1(\lambda_1)$ нулевого рода.

В общем случае при $P_\Delta \gg 1$ путем конечного числа трансформаций можно построить функцию

$$\Delta_n(\lambda_n) = \Delta_{n-1}(\lambda_{n-1})\Delta_{n-1}(-\lambda_{n-1}), \tag{14}$$

имеющую относительно переменной $\lambda_n = \lambda_{n-1}^2$ порядок роста $P_\Delta/2^n < 1$ и, следовательно, нулевой род. Если предположить нули функции $\Delta(\lambda)$ положительными, то найдя двусторонние оценки каких-нибудь нулей функции $\Delta_n(\lambda_n)$, тем самым найдем двусторонние оценки соответствующих нулей функции $\Delta(\lambda)$.

В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее поперечные колебания однородного стержня и учитывающее инерцию вращения, деформацию сдвига и поперечное расширение (по Ляву) [3]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - a_2\frac{\partial^4 w}{\partial t^2\partial x^2} + a_3\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + a_4\frac{\partial^6 w}{\partial t^4\partial x^2} = 0. \tag{15}$$

Если здесь $a_2 = a_3 = a_4 = 0$, то приходим к дифференциальному уравнению классической теории Бернулли — Эйлера. В частном случае гармонических во времени колебаний, когда необходимо искать решения уравнения (15) вида

$$w(x, t) = y(x)e^{i\omega t}, \tag{16}$$

где ω — частота колебаний, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-\omega^2 y + a_1 y^{IV} + a_2\omega^2 y'' + a_3\omega^4 y + a_4\omega^4 y'' = 0. \tag{17}$$

Каковы бы теперь ни были краевые условия полиномиального вида по ω^2, из уравнения (17) заключаем, что в силу сформулированного критерия (формула (12)) характеристический ряд $\Delta(\lambda)$ $(\lambda = \omega^2)$ соответствующей задачи на собственные значения для уравнения (17) может иметь первый порядок роста и, следовательно, ненулевой род. Однако трансформированная функция $\Delta_1(\lambda_1) = \Delta(\lambda)\Delta(-\lambda)$ будет заведомо функцией нулевого рода.

Отметим, что если задача (9), (11) является линейной и самосопряженной, то род функции $\Delta(\lambda)$ равен нулю. А это в случае принадлежности $N[y]$ к одночленному классу известный результат теории интегральных уравнений с симметричным ядром, поскольку здесь функция $\Delta(\lambda)$ тождественна знаменателю Фредгольма соответствующего интегрального уравнения.

1. *Балинский А. И., Зорий Л. М.* К исследованию зависимости низших частот деформируемых систем от параметров.— ФХММ, № 3, 1971, с. 69—71.
2. *Бернштейн С. А., Керопян К. К.* Определение частот колебаний стержневых систем методом спектральной функции.— М. : Госстройиздат, 1960.— 311 с.
3. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек.— М., 1973.— Т. 5. 331 с.— (Сер. Механика деформируемых тел.)
4. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М. : Гостехиздат, 1956.— 579 с.
5. *Таций Р. М.* Двусторонние оценки собственных значений в задачах о колебаниях и устойчивости упругих пластин сложной формы : Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1978.— 101 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 12.11.79