УДК 534.26

В. Ф. Емец

ВНУТРЕННЯЯ ЗАДАЧА РАССЕИВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ АКУСТИЧЕСКОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Внешняя задача рассеивания сферической волны на поверхности упругого тела неканонической формы рассмотрена в работе [4]. В работе [7] изучена дифракция звуковых импульсов, генерируемых внутренним источником на поверхности акустической сферы. В данной статье рассмотрим задачу рассеивания сферической звуковой волны давления

$$p_i = p_0\rho^{-1}\delta(\tau-\rho) \tag{1}$$

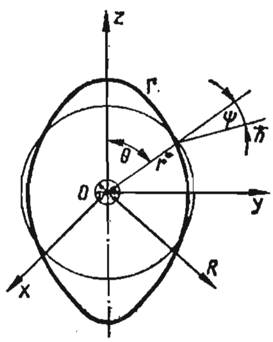

Рис. 1

на поверхности ($\rho = 1$) акустического тела в вакууме, образующейся вращением некоторой кривой Γ вокруг оси Oz (рис. 1). Полагаем, что форма тела мало отличается от сферической (радиус сферы a_0), p_0 — постоянная, имеющая размерность давления, $\tau = ct/a_0$ — безразмерное время, c — скорость звука в среде, t — время, r, θ, φ — сферическая, R, φ, z — цилиндрическая и x, y, z — декартова системы координат с началом отсчета в центре масс тела — точке источника возмущения (1) (см. рис. 1). Линейные величины задачи отнесены к радиусу сферы a_0.

Для определения переизлученной волны давления p_e необходимо решить волновое уравнение

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]p_e = 0 \tag{2}$$

с учетом условий причинности [5]

$$p_e \equiv 0 \equiv \frac{\partial p_e}{\partial\tau} \quad (\tau \leqslant 0) \tag{3}$$

и условия на свободной поверхности тела

$$p_e + p_i = 0 \quad (\rho = 1). \tag{4}$$

Задачу решаем с помощью метода возмущения формы границы [2], согласно которому

$$p_e(r, \theta, \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j p_e^{(j)}(r, \theta, \tau), \tag{5}$$

$$p_e(\rho, \gamma, \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j [p_e(\rho, \gamma, \tau)]^{(j)}, \tag{6}$$

где $p_e^{(j)}$ и $[p_e]^{(j)}$ ($j = 0, 1, \ldots$) — последовательные приближения искомого давления p_e в различных системах координат. При этом [2]

$$r = \sqrt{\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}}, \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{1}{i}\,\frac{\omega(\zeta) - \overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta) + \overline{\omega(\zeta)}},$$

$$e^{i\psi} = \frac{\zeta}{|\zeta|}\,\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{|\omega(\zeta)|}\,\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|},$$

где ψ — угол между касательными в точках пересечения кривых r и ρ, а функция

$$z + iR = a_0^{-1}\omega(\zeta) = \zeta + \varepsilon f(\zeta) = re^{i\theta}, \quad \zeta = \rho e^{i\gamma}, \quad |\varepsilon| \ll 1 \tag{7}$$

реализует конформное отображение плоскости с круговым отверстием единичного радиуса на плоскость с отверстием, ограниченным кривой Г. Так, в случае, когда

$$f(\zeta) = \zeta^{-N}, \tag{8}$$

выбирая различные значения N и ε, получаем всевозможные формы отверстий Г, например, эллиптическое с полуосями a и b ($N = 1$, $\varepsilon = (a - b)/(a + b)$), квадратное ($N = 3$, $\varepsilon = \pm 1/9$), равностороннее треугольное ($N = 2$, $\varepsilon = \pm 1/4$) и т. д. [1].

Используя связь между скалярными функциями в различных системах координат [3], а также формулы (5), (6), граничное условие (4) для последовательных приближений получаем в виде

$$p_e^{(j)}(\rho, \gamma, \tau) = -p_0\delta(\tau - \rho)\,\delta_{j0} - \sum_{l=0}^{j-1} \Lambda^{(j-l)} p_e^{(l)}(\rho, \gamma, \tau) \quad (\rho = 1,\ j = 0, 1, \ldots), \tag{9}$$

где формальным образом осуществлена замена r на ρ, θ на γ; δ_{lk} — символ Кронекера; Λ^l — дифференциальные операторы, общий вид которых приведен в работах [1, 3]. Исходя из представления (5) и условий (9) убеждаемся в том, что данная задача сводится к последовательности задач для акустической сферы с усложненными условиями на ее поверхности.

С помощью интегрального преобразования Лапласа решение для каждого приближения ($j = 0, 1, 2, \ldots$) легко получить в виде

$$p_e^{(j)}(r, \theta, \tau) = -p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\tau} I_n(r, \tau - x)\,\Phi^{(j)}(x)\,dx\,P_n(\cos\theta), \tag{10}$$

$$I_n(r, \tau) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{\infty} \{[\delta(\tau + r - 2i) - \delta(\tau - r - 2i)]\,\delta_{n0} + (1 - \delta_{n0})\,F_{ni}(r, \tau - 2i)\,H(\tau - 2i)\},$$

$$F_{n,1}(r, \tau) = \sum_{l=1}^{n} \begin{cases} \left.\dfrac{e^{s(\tau+r)} v_n(sr)\, s^n}{d_s[v_n(s)\, s^n]}\right|_{s=s_{nl}} & (\tau \leqslant r), \\[2ex] \left.\dfrac{e^{s(\tau+r)} v_n(sr)\, s^n - (-1)^n e^{s(\tau-r)} f_n(sr)}{d_s[v_n(s)\, s^n]}\, s^n\right|_{s=s_n} & (\tau > r), \end{cases}$$

$$F_{n,i+1}(r, \tau - 2i - 2) = \int_0^{\tau - 2i - 2} F_{ni}(r, x)\,Q_n(\tau - 2i - 2 - x)\,dx,$$

$$Q_n(\tau) = \sum_{l=1}^{n} \left.\frac{f_n(s)\, s^n \exp(s\tau)}{d_s[v_n(s)\, s^n]}\right|_{s=s_{nl}},$$

где $v_n(s)$, $f_n(s)$ — полиномы Стокса [6]; $P_n(x)$ — полиномы Лежандра; $H(x)$ — функция Хевисайда; $i_n(z)$ — сферические функции Бесселя мнимого аргумента; s_{nl} — корни уравнения $s^n v_n(s) = 0$. В приведенных формулах $\Phi_n^j(\tau)$ — оригинал преобразования Лапласа для функции

$$\varphi_n^{(j)}(s) = \delta_{j0}\delta_{n0} - \frac{2n+1}{2}\exp(s)\sum_{l=0}^{j-1}\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_m^{(l)}(s) \times$$

$$\times \int_0^{\pi} \Lambda^{(j-l)} i_m(s\rho)\,P_m(\cos\gamma)\sin\gamma\,d\gamma \quad (\rho = 1).$$

Рассмотрим случай, когда функция $f(\xi)$ имеет вид (8). Используя выражение для оператора Λ^j ($j = 0, 1, \ldots$), для функций Φ_n^j ($j = 0, 1, 2$) имеем

$$\Phi_n^{(0)}(\tau) = \delta(\tau)\,\delta_{n0},$$

$$\Phi_n^{(1)}(\tau) = \alpha_{1n}\left[\delta(\tau) - \delta'(\tau) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\delta'(\tau - 2k)\right], \tag{11}$$

$$\Phi_n^{(2)}(\tau) = -\left\{\alpha_{2n}\delta''(\tau) - \alpha_{3n}\left[\delta(\tau) - \delta'(\tau) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\delta'(\tau - 2k)\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{1m}\beta_{1mn}\left[\left(1 + \frac{\partial}{\partial\tau}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}I_m(\rho, \tau) - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\rho}I_m(\rho, \tau - 2k)\right]\right\}$$

$$(\rho = 1, \ n = 0, \ 1, \ \ldots),$$

$$\alpha_{1n} = \frac{2n+1}{2}\varkappa_{N+1,n}, \quad \alpha_{2n} = \frac{2n+1}{2}\varkappa_{2(N+1),n} + \frac{1}{4}\delta_{n0},$$

$$\alpha_{3n} = \frac{2n+1}{2}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{1m}\alpha_{2m} - \frac{3}{4}\varkappa_{2(N+1),n}\right] - \frac{1}{4}\delta_{n0},$$

$$\beta_{1mn} = \frac{2n+1}{2}\left(K_{N,n,m+1} - \frac{m+1}{2m+1}K_{N,m+1,n} - \frac{n}{2m+1}K_{N,m-1,n}\right),$$

$$\beta_{2mn} = \frac{m(m+1)}{2m+1}(K_{N,n,m+1} - K_{N,n,m-1}),$$

$$\varkappa_{p,n} = \frac{p}{8}\sum_{m=0}^{[p/2]}(-1)^{m+n}B_{pm}\left\{\left[1 + (-1)^p\right]\frac{(m + p/2)_n}{\left(\frac{p+1}{2} - m\right)_{n+1}} + [1 - (-1)^p] \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(m - (p-1)/2)_n}{((p+2)/2 - m)_{n+1}}\right\},$$

$$B_{pm} = 2^{p-2m}\frac{(p-m-1)!}{m!\,(p-2m)!}, \quad (\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)},$$

$$K_{N,k,n} = \sum_{S=0}^{N}\gamma_{Nks}\delta_{n+2s-N,k}.$$

Здесь $\Gamma(X)$ — гамма-функция, а величины γ_{Nks} определяются из рекуррентного соотношения

$$(N+2)\gamma_{N+1,n,s} - N\gamma_{N+1,n,s-1}(1 - \delta_{s,0})(1 - \ _{s,N+1}) = 2\left\{(1 - \delta_{s,0}) \times \right.$$

$$\times\left[\frac{n(n+1)}{2n+1}\gamma_{N,n+2s-N-1,N-s-1} - \frac{(n+2s-N)(n+2s-N-1)}{2n+4s-2N-1}\gamma_{N,n,s-1}\right] +$$

$$+ (1 - \delta_{s,N+1})\left[\frac{(n+2s-N-1)(n+2s-N)}{2n+4s-2N-1}\gamma_{N,n,s} - \frac{(n+1)n}{2n+1} \times \right.$$

$$\left.\left. \times \gamma_{N,n+2s-N-1,n-s}\right]\right\} \left(s = 0, \ 1, \ \ldots, \ N+1, \ N = 0, \ 1, \ \ldots; \ \gamma_{0n0} = \frac{2}{2n+1}\right).$$

На основании формул (10), (11) найдем давление в переизлученной волне. Полученное решение позволяет исследовать также смещения в акустическом теле. В частности, нормальные смещения поверхности, ограничивающей объект, в точках $\gamma = 0$ и $\gamma = \pi/2$ определяются по формулам

$$\omega(1, \gamma) = \omega^{(0)}(1, \gamma) + \varepsilon\omega^{(1)}(1, \gamma) + \ldots,$$

$$\omega^{(0)}(1, \gamma) = \varkappa\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{1}[1 - r_0^{-1}(-1)^{\nu}\tau^*]\,H(\tau^*),$$

$$\omega^{(1)}(1, \gamma) = \alpha_{10}\left[\omega^{(0)}(1, \gamma) - \varkappa r_0^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(2 - \delta_{k0}) \times \right.$$

$$\times H(\tau^* - 2k)\Bigg] + \varkappa \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{1n} \Bigg[\int_0^{\tau} x \frac{\partial}{\partial r_0} I_n(r_0, \tau - x)\, dx -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} (2 - \delta_{k0}) \int_0^{\tau-2k} \frac{\partial}{\partial r_0} I_n(r_0, \tau - x)\, dx \Bigg] P_n(\cos\gamma),$$

$$\tau^* = \tau + (-1)^{\nu} r_0 - 2j, \quad r_0 = (1 + 2\varepsilon\cos 2\gamma + \varepsilon^2)^{1/2}, \ \varkappa = \frac{a_0 p_0}{\rho_0 c^2 r_0},$$

где ρ_0 — плотность среды.

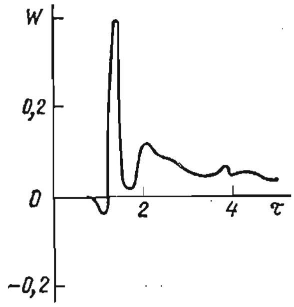

Рис. 2

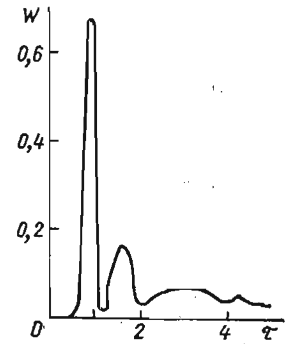

Рис. 3

На рис. 2, 3 приведены графики распределения величины $W = \frac{\rho_0 c^2}{a_0 p_0} \times$ $\times\, \omega(1, \gamma)$ в указанных точках в зависимости от времени τ для вытянутого сфероида ($N = 1$, $\varepsilon = 0, 2$), полученные с точностью до трех приближений ($j = 0, 1, 2$). Из этих результатов следует, что часть энергии объемных волн постепенно при повторных отражениях переходит в энергию волн поверхностных. Это явление можно использовать для управления перераспределением энергии источника в нужном направлении.

1. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко И. А.* Дифракция упругих волн.— Киев : Наук. думка, 1978.— 307 с.
2. *Гузь О. М.* Про наближений метод визначення концентрації напружень біля криволінійних отворів в оболонках.— Прикл. механіка, 1962, 8, № 6, с. 605—611.
3. *Немиш Ю. А.* Рекуррентные соотношения метода возмущения в пространственных задачах теории упругости.— Прикл. механика, 1973, 9, № 9, с. 64—70.
4. *Поддубняк А. П., Подстригач Я. С., Грилицкий Д. В.* Задача гидроакустики для упругого тела вращения.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 3—6.
5. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн.— М. : Мир, 1978,— Т. 1. 547 с.
6. *Эхо-сигналы* от упругих объектов / У. К. Нигул, Я. М. Метсавээр, Н. Д. Векслер, М. Э. Кутсер.— Таллин : Изд-во АН ЭССР, 1974.— Т. 2.— 346 с.
7. *Alterman Z., Kornfeld P.* Propagation of a pulse in a fluid sphere.— Geophysics, 1963, 29, N 2, p. 259—287.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
22.02.79

УДК 534.26

А. Н. Горечко

ПРИМЕНЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ ЛАГЕРРА К РЕШЕНИЮ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА ЦИЛИНДРЕ И СФЕРЕ

Задачи дифракции акустических волн на жестком цилиндре или сфере рассматривались многими авторами. Основным из методов, применяемых при решении этих задач, является метод интегрального преобразования Фурье