8. *Солодяк М. Т.* Термоупругое состояние магнитомягкого упругого полупространства в установившемся периодическом во времени электромагнитном поле.— В кн.: Материалы V конф. молодых ученых Льв. фил. мат. физики Ин-та математики АН УССР. Секция механики и деформируемого твердого тела.— Львов, 1978, с. 106—108. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 3778—78 Деп.
9. *Термоупругость* электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская.— Киев : Наук. думка, 1977.— 248 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

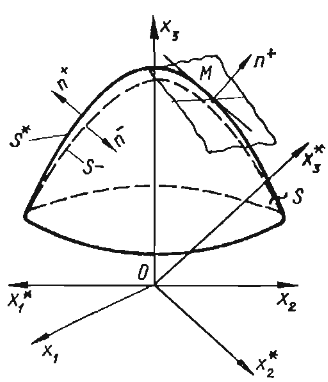
Поступила в редколлегию
26.06.79

УДК 539.377

М. В. Хай

ТЕРМОУПРУГИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛА С ТРЕЩИНОЙ, РАЗМЕЩЕННОЙ ПО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В настоящее время большинство исслёдований термоупругого состояния тел с трещинами проведено для случая плоских трещин. Такое состояние объясняется тем, что исходные задачи достаточно просто сводятся к сингулярным интегро-дифференциальным двумерным уравнениям, которые для частных случаев решаются в замкнутом виде. Когда имеется трещина, размещенная по произвольной поверхности, непосредственное применение методики сведения задач теплопроводности и термоупругости к интегральным уравнениям затруднительно. Однако решения дифференциальных уравнений задач теплопроводности и термоупругости, полученные при рассмотрении плоских трещин, могут быть эффективно использованы для построения соответствующих термоупругих потенциалов, с использованием которых уже можно свести исходные задачи к сингулярным интегральным уравнениям, в которых интегрирование ведется по поверхности трещины. Для построения потенциалов теории упругости в литературе известны подходы, основанные на использовании фундаментальных решений уравнений теории упругости и обобщенных теорем Бетти [4]. Предлагаемая в настоящей работе методика построения потенциалов термоупругости, с помощью которых решается задача термоупругости для бесконечного тела с размещенной по произвольной поверхности трещиной, основана на использовании результатов, полученных при решении аналогичных задач в случае плоских трещин.



Рассмотрим бесконечное тело, ослабленное размещенной по произвольной поверхности трещиной и находящееся под действием заданных на поверхностях трещины тепловых и механических нагрузок. Требуется свести задачу об определении температурных полей и обусловленных ими напряжений к интегральным уравнениям. Отметим, что к рассматриваемой задаче сводятся задачи теплопроводности и термоупругости, когда значения тепловых и механических нагрузок заданы не на поверхностях трещины, а на произвольной поверхности в теле, в частности на бесконечности.

Обозначим через S область, занятую трещиной, а через S^+ и S^- — противоположные ее поверхности. Выберем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ в произвольной точке тела и установим направление нормалей на поверхностях $S^{\pm}$. Направление нормалей зададим таким образом, что направление нормали на S^- противоположно направлению нормали на S^+, как это показано на рисунке.

Рассмотрим задачу стационарной теплопроводности. Для ее сведения к интегральным уравнениям воспользуемся результатами работы [1], в которой плоские трещины моделируются непрерывно распределенными тепловыми источниками и диполями с плотностями соответственно μ и γ. Тогда стационарное температурное поле в теле, обусловленное тепловыми источниками и диполями, определяется функцией

$$T(x)=\iint\limits_S\left[\frac{\mu(\xi)}{|x-\xi|}+\gamma(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi^+}\left(\frac{1}{|x-\xi|}\right)\right]d_\xi S, \qquad (1)$$

где x — произвольная точка тела с координатами (x_1, x_2, x_3); ξ — точка поверхности трещины с координатами (ξ_1, ξ_2, ξ_3), а n_ξ^+ — нормаль к поверхности S^+ в точке ξ.

Функции μ и γ должны быть определены таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия задачи теплопроводности на поверхностях $S^\pm$. В частности, если на поверхностях $S^\pm$ задана температура $T^\pm$, то $\gamma(\xi) = [T^+(\xi) - T^-(\xi)]/4\pi$, а функция $\mu(\xi)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\iint\limits_S\frac{\mu(\xi)}{|x-\xi|}d_\xi S=\frac{T^+(x)+T^-(x)}{2}+\iint\limits_S\frac{T^+(\xi)-T^-(\xi)}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_\xi^+}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{|x-\xi|}\right)d_\xi S,\quad x\in S. \qquad (2)$$

В случае, когда на поверхностях $S^\pm$ задано значение теплового потока $q^\pm$, то $\mu(\xi) = -[q^+(\xi)+q^-(\xi)]/4\pi\lambda_t$, а функция $\gamma(\xi)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\iint\limits_S\gamma(\xi)\frac{\partial}{\partial n_x^+\partial n_\xi^+}\left(\frac{1}{|x-\xi|}\right)d_\xi S=\frac{q^+(x)-q^-(x)}{2\lambda_t}+$$
$$+\iint\limits_S\frac{q^+(\xi)+q^-(\xi)}{4\pi\lambda_t}\frac{\partial}{\partial n_x^+}\left(\frac{1}{|x-\xi|}\right)d_\xi S,\quad x\in S, \qquad (3)$$

где n_x^+ — нормаль к поверхности S^+ в точке x; λ_t — коэффициент теплопроводности тела.

Когда имеется теплопроницаемая трещина, то $\mu = 0$, а функция $\gamma(\xi)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\frac{4\pi h_t}{\lambda_t}\gamma(x)-\iint\limits_S\gamma(\xi)\frac{\partial^2}{\partial n_x^+\partial n_\xi^+}\left(\frac{1}{|x-\xi|}\right)d_\xi S=\frac{1}{\lambda_t}f(x),\quad x\in S, \qquad (4)$$

где h_t — теплопроницаемость трещины; $f(x)$ — заданная функция.

Для решения задачи термоупругости введем в рассмотрение еще локальную систему координат $O\overset{*}{x}_1\overset{*}{x}_2\overset{*}{x}_3$ с началом в точке O, ось $O\overset{*}{x}_3$ которой направлена вдоль нормали n_ξ^+ в точке M, а плоскость $\overset{*}{x}_1O\overset{*}{x}_2$ параллельна касательной плоскости к поверхности S в этой же точке (см. рисунок). Пусть в точке M имеет место разрыв компонент перемещений, характеризуемый функциями $\overset{*}{\alpha}_j$, которые определяют скачок перемещений вдоль направлений координатных осей $O\overset{*}{x}_j$. Используя результаты работы [2], компоненты вектора перемещений, обусловленные скачками перемещений, тепловыми источниками и диполями в точке M, определим по формулам

$$u_j^*(x^*, r_0) = \alpha_j^*(r_0)\frac{\partial}{\partial x_3^*}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x_j^*}\left\{2\nu\frac{\alpha_3^*(r_0)}{R} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_3^*}\left[\alpha_1^*(r_0)\frac{\partial}{\partial x_1^*} + \alpha_2^*(r_0)\frac{\partial}{\partial x_2^*} + \alpha_3^*(r_0)\frac{\partial}{\partial x_3^*}\right]R\right\} +$$

$$+ \frac{\alpha_0}{2(1-\nu)}\left[\mu(r_0)\frac{\partial R}{\partial x_j^*} + \gamma(r_0)\frac{\partial^2 R}{\partial x_j^* \partial x_3^*}\right]. \qquad (5)$$

Здесь $u_j^*(x^*, r_0)$ — компоненты вектора перемещений в системе координат $Ox_1^*x_2^*x_3^*$; $R = \sqrt{(x_1^* - r_1)^2 + (x_2^* - r_2)^2 + (x_3^* - r_3)^2}$ — расстояние между произвольной точкой тела x^* и точкой M с координатами r_0 (r_1, r_2, r_3); $\alpha_0 = \alpha_t(1+\nu)$, где α_t и ν — соответственно коэффициенты линейного теплового расширения и коэффициент Пуассона.

Располагая формулами (5), определим компоненты $u_{jM}(x^*, r_0)$ вектора перемещений в системе координат $Ox_1x_2x_3$:

$$u_{jM}(x^*, r_0) = u_1^*(x^*, r_0)\, l_j(r_0) + u_2^*(x^*, r_0)\, m_j(r_0) + u_3^*(x^*, r_0)\, n_j(r_0), \qquad (6)$$

где l_j, m_j, n_j — направляющие косинусы координатных осей в системе $Ox_1x_2x_3$, которые задаются таблицей:

	x_1^*	x_2^*	x_3^*
x_1	l_1	m_1	n_1
x_2	l_2	m_2	n_2
x_3	l_3	m_3	n_3

Равенство (6) можно представить в виде

$$u_{jM}(x, \xi) = u_1^*(x, \xi)\, l_{j\xi} + u_2^*(x, \xi)\, m_{j\xi} + u_3^*(x, \xi)\, n_{j\xi}, \qquad (7)$$

где x — произвольная точка тела с координатами (x_1, x_2, x_3); ξ — точка M поверхности S с координатами (ξ_1, ξ_2, ξ_3) в системе $Ox_1x_2x_3$. Индекс ξ возле направляющих косинусов означает, что они являются функциями переменной ξ. Если скачок смещений, источники и диполи тепла заданы на всей поверхности S, то обусловленные ими перемещения u_j в системе координат $Ox_1x_2x_3$ определяются равенством

$$u_j(x) = \iint u_{jM}(x, \xi)\, d_\xi S \quad (j = 1, 2, 3). \qquad (8)$$

Подынтегральное выражение здесь после несложных преобразований приведем к виду

$$u_{jM}(x, \xi) = \left\{\frac{\nu}{1-\nu}\left[\alpha_1(\xi) n_{1\xi} + \alpha_2(\xi) n_{2\xi} + \alpha_3(\xi) n_{3\xi}\right]\frac{\partial}{\partial x_j} + n_{j\xi}\left[\alpha_1(\xi)\frac{\partial}{\partial x_1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \alpha_2(\xi)\frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3(\xi)\frac{\partial}{\partial x_3}\right] + \alpha_j(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi^+}\right\}\left(\frac{1}{|x-\xi|}\right) -$$

$$- \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\alpha_1(\xi)\frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2(\xi)\frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3(\xi)\frac{\partial}{\partial x_3}\right]\frac{\partial}{\partial n_\xi^+}(|x-\xi|) +$$

$$+ \frac{\alpha_0}{2(1-\nu)}\left[\mu(\xi)\frac{\partial}{\partial x_j} + \gamma(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial n_\xi^+}\right](|x-\xi|), \qquad (9)$$

где функции α_j характеризуют скачок смещений противоположных точек поверхностей трещины вдоль осей Ox_j и определяются через α_j^* и направляющие косинусы по формулам

$$\alpha_j(\xi) = \alpha_1^*(\xi)\, l_{j\xi} + \alpha_2^*(\xi)\, m_{j\xi} + \alpha_3^*(\xi)\, n_{j\xi} \quad (j = 1,\ 2,\ 3).$$

Для получения формул (9) из (7) и (5) необходимо воспользоваться тем, что величина R инвариантна при переносе и повороте системы координат, а производные по x_j^* можно рассматривать в системе координат $Ox_1x_2x_3$ как производные по направлению.

Формулы (8) можно записать в векторной форме

$$\vec{U}(x) = \iint\limits_S \left[\boldsymbol{\Gamma}_2^I(x,\ \xi)\, \vec{\alpha}(\xi) + \frac{\alpha_0}{2(1-\nu)} \boldsymbol{\Gamma}_t(x,\ \xi)\, \vec{\omega}(\xi) \right] d_\xi S, \tag{10}$$

где $\vec{U}\,(u_1,\ u_2,\ u_3)$, $\vec{\alpha}\,(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ — трехкомпонентные векторы; $\vec{\omega}\,(\mu,\ \gamma)$ — двухкомпонентный вектор; $\boldsymbol{\Gamma}_2^I$ — квадратная матрица размерности 3×3, а $\boldsymbol{\Gamma}_t$ — прямоугольная матрица размерности 2×3. Компоненты этих матриц с учетом формул (9) представим в виде

$$\Gamma_{2ij}^I = \left[\delta_{ij} n_{l\xi} \frac{\partial}{\partial n_\xi^+} + n_{i\xi} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\nu}{1-\nu} n_{j\xi} \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \left(\frac{1}{|x-\xi|} \right) - $$

$$- \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^3 (|x-\xi|)}{\partial x_i \partial x_j \partial n_\xi^+}, \tag{11}$$

$$\Gamma_{tij} = \left(\delta_{j1} \frac{\partial}{\partial x_i} + \delta_{j2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial n_\xi^+} \right) (|x-\xi|) \quad (i = 1,\ 2,\ 3;\ j = 1,\ 2).$$

Решение (10) представляет собой термоупругий потенциал двойного слоя первого рода и определяет перемещение, обусловленное скачками смещений противоположных точек поверхности трещины, источниками и диполями тепла, размещенными по поверхности S. Матрица $\boldsymbol{\Gamma}_2^I$ совпадает с матрицей упругого потенциала двойного слоя первого рода [4]. Поэтому термоупругий потенциал двойного слоя первого рода обладает всеми свойствами упругого потенциала двойного слоя [3, 4].

Учитывая простую аналогию между упругим и термоупругим потенциалами двойного слоя первого рода, можно ввести в рассмотрение и термоупругий потенциал простого слоя, определяющий перемещения в теле, обусловленные усилиями $\vec{p}\,(p_1,\ p_2,\ p_3)$, тепловыми источниками и диполями, заданными на произвольной поверхности S. Это выражение легко получить из формулы (10), если вместо матрицы $\boldsymbol{\Gamma}_2^I$ подставить матрицу Кельвина — Сомильяни $\boldsymbol{\Gamma}$ [3, 4], а вместо $\vec{\alpha}(\xi)$ — вектор $\vec{p}(\xi)$. Аналогично можно рассматривать и термоупругий потенциал двойного слоя второго рода. Для этого достаточно вместо матрицы $\boldsymbol{\Gamma}_2^I$ в формуле (10) подставить матрицу $\boldsymbol{\Gamma}_2^{II}$, выражение которой приведено в работе [3].

Термоупругие потенциалы простого и двойного слоя в краевых задачах термоупругости играют такую же роль, как упругие потенциалы при решении задач теории упругости, так как термоупругие потенциалы обладают соответствующими свойствами упругих потенциалов. С использованием термоупругого потенциала двойного слоя первого рода легко свести задачу термоупругости для бесконечного тела с размещенной по произвольной поверхности трещиной к интегральным уравнениям. В случае, когда заданные на поверхности трещины внешние усилия не самоуравновешенные, для решения задачи термоупругости необходимо воспользоваться суммой теплового потенциала двойного слоя первого рода и упругого потенциала простого слоя с плотностью $\vec{p} = (\vec{N}^+ - \vec{N}^-)/4\pi$.

Ввиду большой важности матриц Γ_2^I и Γ_t запишем их компоненты в развернутом виде

$$\Gamma^{l}_{2ij} = -\frac{1}{2(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\,\delta_{ij} + \frac{3(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{|x-\xi|^2}\right]\sum_{k=1}^{3}\frac{n_{k\xi}(x_k-\xi_k)}{|x-\xi|^3} +$$

$$+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\frac{n_{i\xi}(x_j-\xi_j)}{|x-\xi|^3} - \frac{n_{j\xi}(x_i-\xi_i)}{|x-\xi|^3}\right],$$

$$\Gamma_{tij} = \delta_{j1}\frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|} + \left[\frac{n_{i\xi}}{|x-\xi|} - \frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|^3}\sum_{k=1}^{3} n_{k\xi}(x_k-\xi_k)\right]\delta_{j2}.$$

Располагая решением (10), определим компоненты σ_{ij} тензора напряжений через неизвестный скачок смещений противоположных поверхностей трещины. Компоненты N_{xj} вектора усилия на произвольной площадке поверхности трещины с нормалью n_x^+ (n_x^+ — означает, что нормаль берется в произвольной точке поверхности S с координатами (x_1, x_2, x_3)), обусловленные скачками смещений α_i, определяются через σ_{ij} по формулам

$$N_{xj}(x) = \sigma_{1j}(x)\,n_{1x} + \sigma_{2j}(x)\,n_{2x} + \sigma_{3j}(x)\,n_{3x} \quad (j = 1,\ 2,\ 3), \tag{12}$$

где $n_{jx} = n_j$ — направляющие косинусы нормали к поверхности S^+ в точке x, а индекс x означает, что n_j является функцией переменной x. Величины N_{xj} зависят от выбора координатной системы. Поэтому определим величины N_j, характеризующие нормальные N_3 и касательные N_1 и N_2 усилия на поверхностях трещины в точке x, а N_j определим через N_{xj} и направляющие косинусы l_j, m_j и n_j, заданные таблицей, по формулам

$$N_1(x) = \sum_{j=1}^{3} N_{xj}(x)\,l_{jx}, \quad N_2(x) = \sum_{j=1}^{3} N_{xj}(x)\,m_{jx}, \quad N_3(x) = \sum_{j=1}^{3} N_{xj}(x)\,n_{jx}, \tag{13}$$

где индекс x имеет тот же смысл, что и выше.

Приравнивая $N_j(x)$ к заданным на поверхностях трещин нормальным $N_3^*(x)$ и касательным $N_1^*(x)$ и $N_2^*(x)$ внешним усилиям, получаем интегральные уравнения для определения скачков перемещений, которыми моделируется трещина. В векторной форме эту систему интегральных уравнений запишем в виде

$$\iint_S \left[\mathbf{T}_n(x,\ \xi)\,\vec{\alpha}(\xi) + \frac{\alpha_0}{2(1-\nu)}\,\mathbf{T}_t(x,\ \xi)\,\vec{\omega}(\xi)\right] d_\xi S = -\frac{N_j^*(x)}{2G},\quad x\in S, \tag{14}$$

где матрицы $\mathbf{T}_n$ и $\mathbf{T}_t$ по своей структуре аналогичны соответственно матрицам Γ_2^l и Γ_t, а их элементы определяются по формулам

$$T_{nij}(x,\ \xi) = \left[\delta_{i3}\frac{2\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial n_\xi^+} + L_{jlx}\frac{\partial^2}{\partial n_x^+\partial n_\xi^+} + n_{jx}\frac{\partial^2}{\partial\tau_x^l\partial n_\xi^+} + \right.$$

$$\left. + \cos(\widehat{n_x^+,\ n_\xi^+})\frac{\partial^2}{\partial\tau_x^l\partial x_j} + \sum_{k=1}^{3} L_{klx}\left(n_{k\xi}\frac{\partial^2}{\partial n_x^+\partial x_j} + \frac{2\nu}{1-\nu}\,n_{i\xi}\frac{\partial^2}{\partial n_x^+\partial x_k}\right)\right]\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2|x-\xi|}\right) - \frac{1}{2(1-\nu)}\sum_{k=1}^{3} L_{kix}\frac{\partial^4(|x-\xi|)}{\partial n_x^+\partial x_k\partial x_j\partial n_\xi^+}, \tag{15}$$

$$\Gamma_{nij}(x,\ \xi) = -2\delta_{i3}\left(\delta_{j1} + \delta_{j2}\frac{\partial}{\partial n_\xi^+}\right)\left(\frac{1}{|x-\xi|}\right) + \sum_{k=1}^{3}\left(\delta_{j1} + \right.$$

$$\left. + \delta_{j2}\frac{\partial}{\partial n_\xi^+}\right)L_{kix}\frac{\partial^2(|x-\xi|)}{\partial n_x^+\partial x_k},$$

где $\dfrac{\partial}{\partial\tau_x^j}$ — производная по направлению оси Ox_j^* в точке x поверхности трещины;

$$L_{klx} = l_{kx}\delta_{l1} + m_{kx}\delta_{l2} + n_{kx}\delta_{l3}. \qquad (16)$$

Систему интегральных уравнений (14) после достаточно громоздких вычислений можно привести к удобному для ее решения виду

$$\iint_S \Big\langle \sum_{l=1}^{3} \alpha_l(\xi) \Big[\frac{a_{lj}(x,\ \xi)}{|x-\xi|^3} + \sum_{r,q=1}^{3} \Big\{ a_{ljrq}(x,\ \xi) \frac{(x_r-\xi_r)(x_q-\xi_q)}{2|x-\xi|^5} +$$

$$+ d_{ljrq}(x,\ \xi) \frac{(x_r-\xi_r)^2 (x_q-\xi_q)^2}{2|x-\xi|^7} + d^*_{ljrq}(x,\ \xi) \frac{(x_r-\xi_r)^3 (x_q-\xi_q)}{|x-\xi|^7} \Big\} +$$

$$+ \{K_{lj123}(x_1-\xi_1) + K_{lj213}(x_2-\xi_2) + K_{lj312}(x_3-\xi_3)\} \frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)(x_3-\zeta_3)}{|x-\xi|^7} \Big] -$$

$$- \alpha_0 \Big\{ \mu(\xi) \Big[\frac{\delta_{l3}}{|x-\xi|} + \sum_{r,q=1}^{3} n_{irqx}(x) \frac{(x_r-\xi_r)(x_q-\xi_q)}{2|x-\xi|^3} \Big] +$$

$$+ \gamma(\xi) \Big[\sum_{q=1}^{3} c_{iq}(x,\ \xi) \frac{x_q-\xi_q}{|x-\xi|^3} - \sum_{r,q=1}^{3} c_{irq}(x,\ \xi) \frac{(x_r-\xi_r)^2 (x_q-\xi_q)}{|x-\xi|^5} -$$

$$- c_i(x,\ \xi) \frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)(x_3-\xi_3)}{|x-\xi|^5} \Big] \Big\} \Big\rangle d_\xi S = - \frac{(1-\nu) N_i^*(x)}{G}$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3),\ x \in S. \qquad (17)$$

В формулах (17) функции при степенях $|x-\xi|^{-n}$ определяются через направляющие косинусы и постоянные материала выражениями

$$c_{lq}(x,\ \xi) = -n_{qx}\delta_{l3} + \sum_{k=1}^{3} n_{k\xi} n_{ikq}, \quad n_{ikq} = n_{ihqx}(x) = n_{qx} L_{klx} + n_{kx} L_{qlx},$$

$$c_{lrq}(x,\ \xi) = \frac{3}{1+2\delta_{rq}} (n_{rx} n_{q\xi} L_{rlx} + n_{r\xi} n_{lqr}),$$

$$c_l(x,\ \xi) = 3(n_{1\xi} n_{l23} + n_{2\xi} n_{l13} + n_{3\xi} n_{l12}),$$

$$a_{lj}(x,\ \xi) = (1-4\nu) n_{j\xi}\delta_{l3} - (1-2\nu) \Big[L_{jlx} \cos(\widehat{n_x^+,\ n_\xi^+}) + n_{jx} \sum_{k=1}^{3} n_{k\xi} L_{klx} \Big],$$

$$d_{ljrq}(x,\ \xi) = \frac{15}{1+2\delta_{rq}} [n_{r\xi} n_{qx} \delta_{jr} L_{qlx} + n_{q\xi} n_{rx} \delta_{jq} L_{rlx} + m_{jrq} n_{lrq}],$$

$$m_{jrq} = n_{r\xi}\delta_{jq} + n_{q\xi}\delta_{jr},$$

$$d^*_{ljrq}(x,\ \xi) = 15[(n_{r\xi}\delta_{jr} n_{l12} + n_{rx} L_{rlx} m_{j12})(1-\delta_{q3}-\delta_{r3}) + (n_{r\xi}\delta_{jr} n_{l23} +$$

$$+ n_{rx} L_{rlx} m_{j23})(1-\delta_{q1}-\delta_{r1}) + (n_{r\xi}\delta_{jr} n_{l13} + n_{rx} L_{rlx} m_{j13})(1-\delta_{q2}-\delta_{r2})](1-\delta_{rq}),$$

$$K_{ljrq\omega} = 15[n_{r\xi}\delta_{jr} n_{lq\omega} + n_{rx} L_{rlx} m_{lq\omega} + m_{j12} n_{lr3}(1-\delta_{r3}) +$$

$$+ m_{j13} n_{lr2}(1-\delta_{r2}) + m_{j23} n_{lr1}(1-\delta_{r1})],$$

$$a_{ljrq}(x,\ \xi) = 3 \Big\langle (2\nu-1)(n_{j\xi} n_{lrq} + \delta_{l3} m_{jrq}) + 2(1-\nu) \Big\{ (n_{qx} n_{r\xi} +$$

$$+ n_{rx} n_{q\xi} L_{jlx} + [n_{jx} n_{q\xi} + \delta_{jq} \cos(\widehat{n_x^+,\ n_\xi^+})] L_{rlx} + [n_{jx} n_{r\xi} +$$

$$+ \delta_{jr} \cos(\widehat{n_x^+,\ n_\xi^+})] L_{qlx} + (n_{qx}\delta_{jr} + n_{rx}\delta_{jq}) \sum_{k=1}^{3} n_{k\xi} L_{klx} \Big\} -$$

$$- \frac{2}{1+\delta_{rq}} [(n_{r\xi}\delta_{jr} + n_{q\xi}\delta_{jq}) n_{lrq} + (n_{rx} L_{rlx} + n_{qx} L_{qlx}) m_{jrq}] -$$

$$- 2[m_{j12} n_{l12}(1-\delta_{q3}) + m_{j13} n_{l13}(1-\delta_{q2}) + m_{j23} n_{l23}(1-\delta_{q1})]\delta_{rq} -$$

$$- 2\,[(m_{j13}n_{i23} + m_{j23}n_{i13})\,\delta_{r1}\delta_{q2} + (m_{j12}n_{i23} + m_{j23}n_{i12})\,\delta_{r1}\delta_{q3} +$$

$$+ (m_{j12}n_{i13} + m_{j13}n_{i12})\,\delta_{r2}\delta_{q3}] \rangle. \qquad (18)$$

Здесь L_{jix} определяются равенством (16). Функции $\alpha_j(\xi)$, удовлетворяющие уравнениям (17), должны обращаться в нуль на контуре области S, так как перемещения вне трещины являются непрерывными функциями.

Таким образом, задача термоупругости для бесконечного тела с трещиной, размещенной по произвольной поверхности S, сведена к системе трех интегро-дифференциальных уравнений. Для многих задач полученные интегральные уравнения можно решать аналитически методом малого параметра. В частности, когда трещина размещена по поверхности сферы, за малый параметр можно выбрать отношение диаметра контура трещины к диаметру сферы.

1. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач теплопроводности для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 8, с. 704—707.
2. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А., 1975, № 12, с. 1108—1112.
3. *Партон В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости.— М. : Наука, 1977.— 312 с.
4. *Трехмерные* задачи математической теории упругости и термоупругости / В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелиа, М. О. Башелейшвили, Г. В. Бурчуладзе.— М. : Наука, 1976.— 663 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 16.02.79

УДК 539.3

И. М. Зашкильняк

ВЛИЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ НА КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ТЕЛА С ТРЕЩИНАМИ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрим бесконечное тело с инородным цилиндрическим включением радиуса R, ослабленное произвольно расположенными криволинейными трещинами. Тело находится в состоянии антиплоской деформации, обусловленной некоторыми сдвигающими усилиями. Выберем декартову систему координат xOy с началом в центре включения и введем обозначения: S_1 — область $|z| < R$, S_2 — область $|z| > R$, $S = S_1 \cup S_2$, L_j — совокупность трещин в S_j ($j = 1, 2$). В дальнейшем все величины с индексом «1» будут относиться к включению, а с индексом «2» — к матрице.

Считаем, что в области S без трещин известно напряженное состояние τ_{0iz} ($i = x, y$), на линии спая Γ включения и матрицы имеют место условия идеального механического контакта, трещины свободны от внешних нагрузок. При сформулированных условиях найдем напряженное состояние τ_{iz} ($i = x, y$), обусловленное наличием трещин. Решение задачи продольного сдвига сводится к нахождению аналитической функции $F(z)$ ($z = x + iy$). Компоненты перемещений и напряжений выражаются при этом через функцию $F(z)$ следующим образом:

$$w(x, y) = \operatorname{Re} F(z), \quad \tau_{nz} = \mu \operatorname{Re}[F'(z)\, e^{i\alpha}], \qquad (1)$$

где α — угол между нормалью n и осью Ox; μ — модуль сдвига.

Для определения τ_{iz} имеем граничные условия

$$w_1(\sigma) = w_2(\sigma) = f(\sigma), \quad \tau_{nz}^{(1)}(\sigma) = \tau_{nz}^{(2)}(\sigma), \quad \sigma = \operatorname{Re}^{i\theta} \in \Gamma, \qquad (2)$$

$$\tau_{nz}(t) = 0, \quad t \in L = L_1 \cup L_2. \qquad (3)$$