Здесь $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \nu} - \cos(\widehat{n, \nu}) \frac{\partial}{\partial n}$. Применяя аналог формулы интегрирования по частям на многообразии *

$$\int_G \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \tau} ds = -\int_G \psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + g' \varphi \right) ds,$$

где g' — некоторая функция, зависящая лишь от многообразия G, а $\bar{\tau}$ — гладкое векторное поле на G, получаем

$$\int_S \frac{a}{\cos(\widehat{l, \nu})} \left(\frac{\partial}{\partial l} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) |u|^2 ds = \int_S \left[-\frac{2a\sigma}{\cos(\widehat{l, \nu})} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\dot{a}}{\cos(\widehat{l, \nu})} \right) + \right.$$

$$\left. + g' \frac{a}{\cos(\widehat{l, \nu})} \right] |u|^2 ds,$$

$$\int_{S_r} a \cos(\widehat{\nu, n}) \left(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial t} \right) |u|^2 ds = \int_{S_r} a \cos(\widehat{\nu, n}) \frac{\partial |u|^2}{\partial n} ds +$$

$$+ \int_{S_r} a \cos(\widehat{\nu, n}) \frac{\partial |u|^2}{\partial t} ds = \int_{S_r} a \cos(\widehat{\nu, n}) \frac{\partial |u|^2}{\partial r} ds - \int_{S_r} |u|^2 \frac{\partial (a \cos(\widehat{\nu, n}))}{\partial t} ds.$$

Используя условия излучения (3) и устремляя радиус сферы к бесконечности, записываем

$$0 = -\iint_{D_t} \left\{ \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} \right) + 4 \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial |u|}{\partial x_i} |u| + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} + 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_i}{\partial x_i} + 2(\beta^2 - \alpha^2) \right) |u|^2 \right\} dD_t +$$

$$+ \int_S \left\{ \sum_{i=1}^{n} (2B_i + b_i) \cos(\widehat{n, x_i}) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{a}{\cos(\widehat{l, \nu})} \right) + \frac{(g' - 2\sigma) a}{\cos(\widehat{l, \nu})} \right\} |u|^2 ds.$$

Отсюда следует, что при выполнении неравенств (5), (6) решение $u = 0$.

Луцкий филиал Львовского политехнического института

Поступила в редколлегию 15.09.79

УДК 517.946 : 4/5

И. М. Ковальчик

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ В ВИДЕ КОНТИНУАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА

Вопросу представления решений дифференциальных уравнений через интегралы в функциональных пространствах посвящено много работ. В частности, выражение фундаментальных решений операторных и дифференциальных уравнений и систем через континуальные интегралы содержится в работах [1, 2], а решение задачи Гурса для уравнений и систем гиперболического типа второго порядка — в работах [3, 4]. В данной работе решение задачи Коши для одного уравнения гиперболического типа выражено через интеграл по пространству непрерывных функций двух переменных.

---

* *Данилова И. А.* Внешние краевые задачи для уравнения Гельмгольца.— Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1968, 53, с. 58—72.

Пусть C_2— пространство непрерывных функций $x = x(t, s)$, заданных на единичном квадрате $Q = [0 \leqslant t, s \leqslant 1]$ и удовлетворяющих условию $x(t, 0) = x(0, s) = 0$. На этом пространстве могут быть введены мера, обобщающая винеровскую, и интеграл по этой мере (см. библиогр. в работе [5]). Пусть $C_2(R)$ — пространство непрерывных функций $x = x(t, s)$, заданных на прямоугольнике $R = [a_1 \leqslant t \leqslant b_1] \times [a_2 \leqslant s \leqslant b_2]$ и таких, что $x(t, a_2) = x(a_1, s) = 0$. Мера и интеграл в нем вводятся так же, как и в пространстве C_2. Через $F(x)$ обозначим измеримый функционал, определенный на пространстве $C_2(R)$. Интеграл от этого функционала по обобщенной мере Винера в пространстве $C_2(R)$ будем обозначать так:

$$\int\limits_{C_2(R)} F(x)\, d_W x, \quad \text{или} \quad \int\limits_{C_2[[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]]} F(x)\, d_W x.$$

Если принять первое обозначение, то для $x \in Q \cup R$ получим легко проверяемые формулы

$$\int\limits_{C_2(R)} F(x)\, d_W x = \int\limits_{C_2} F\left[\sqrt{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}\; x\left(\frac{(\cdot) - a_1}{b_1 - a_1}, \frac{(\cdot) - a_2}{b_2 - a_2}\right)\right] d_W x,$$

$$\int\limits_{C_2} F(x)\, d_W x = \int\limits_{C_2(R)} F\left[\frac{1}{\sqrt{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}}\; x(a_1 + (\cdot)(b_1 - a_1),\ a_2 + (\cdot)(b_2 - a_2))\right] d_W x.$$

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$L(u) \equiv \frac{\partial^2 u(t, s)}{\partial t \partial s} + c(t, s)\, u(t, s) = f(t, s), \tag{1}$$

а на плоскости переменных (t, s) задана линия l, которая пересекается не более чем в одной точке с прямыми, параллельными координатным осям, и нигде не касается характеристических направлений. Задача Коши состоит в нахождении решения уравнения (1) в некоторой точке $M(t, s)$ в окрестности кривой l, т. е. нахождении функции $u(t, s)$ по заданным на кривой l значениям функции $u(t, s)$ и ее частных производных $u_t(t, s)$, $u_s(t, s)$. В прямоугольнике R выберем произвольную точку $M(t, s)$ и через нее проведем характеристики MA и MB, где точки $A(t_0, s)$ и $B(t, s_0)$ лежат на кривой l. Пусть D — криволинейный треугольник, образованный прямыми MA, MB и другой кривой l.

Теорема. Если $c(t, s)$, $f(t, s)$ — заданные на R непрерывные функции, то решение задачи Коши $u(t, s)$, $(t, s) \in R$ для уравнения (1) имеет вид

$$\begin{aligned} u(t, s) = {} & \frac{u(A) + u(B)}{2} + \iint\limits_D f(\tau, \sigma)\, d\tau d\sigma + \exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_t^{b_1}\int\limits_s^{b_2} c(t_1, s_1)\, dt_1 ds_1\right\} \times \\ & \times \int\limits_{C_2[[t,b_1]\times[s,b_2]]} \exp\left\{-2\int\limits_t^{b_1}\int\limits_s^{b_2} c(t_1, s_1)[1 + x(t_1, s_1)]\, dx(t_1, s_1) - 2\int\limits_t^{b_1}\int\limits_s^{b_2} c^2(t_1, s_1) \times \right. \\ & \left. \times [1 + x(t_1, s_1)]^2\, dt_1 ds_1\right\}\left[\iint\limits_D x(\tau, \sigma) f(\tau, \sigma)\, d\tau d\sigma\right] d_W x + \\ & + \frac{1}{2}\int\limits_l [v(t, s;\ \tau, \sigma)\, u_\tau(\tau, \sigma) - v_\tau(t, s;\ \tau, \sigma)\, u(\tau, \sigma)]\, d\tau - \\ & - [v(t, s;\ \tau, \sigma)\, u_\sigma(\tau, \sigma) - v_\sigma(t, s;\ \tau, \sigma)\, u(\tau, \sigma)]\, d\sigma, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$v(t, s;\ \tau, \sigma) = 1 + \exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_t^{b_1}\int\limits_s^{b_2} c(t_1, s_1)\, dt_1 ds_1\right\} \int\limits_{C_2[[t,b_1]\times[s,b_2]]} x(\tau, \sigma) \times$$

$$\times \exp\left\{-2\int_t^{b_1}\int_s^{b_2} c(t_1, s_1)[1 + x(t_1, s_1)]\,dx(t_1, s_1) - 2\int_t^{b_1}\int_s^{b_2} c^2(t_1, s_1)[1 + \right.$$

$$\left. + x(t_1, s_1)\right]^2 dt_1 ds_1\Big\} d_W x,$$

а интеграл $\int_R y(t, s)\,dx(t, s)$ ($y \in L_2(Q)$, $x \in C_2(R)$) следует понимать в смысле Пэли — Винера — Зигмунда.

Доказательство. По методу Римана решение задачи Коши для уравнения (1) находим по формуле

$$u(t, s) = \frac{u(A) + u(B)}{2} + \frac{1}{2}\int_l [v(t, s; \tau, \sigma) u_\tau(\tau, \sigma) - v_\tau(t, s; \tau, \sigma) u(\tau, \sigma)] \times$$

$$\times d\tau - [v(t, s; \tau, \sigma) u_\sigma(\tau, \sigma) - v_\sigma(t, s; \tau, \sigma) u(\tau, \sigma)]\,d\sigma +$$

$$+ \iint_D v(t, s; \tau, \sigma) f(\tau, \sigma)\,d\tau d\sigma, \tag{3}$$

где $v(t, s; t_0, s_0)$ — функция Римана оператора $L(u)$, являющаяся решением задачи

$$\frac{\partial^2 z(t, s)}{\partial t \partial s} + c(t, s) z(t, s) = 0, \quad z(t_0, s) = z(t, s_0) = 1.$$

Данная задача эквивалентна интегральному уравнению

$$w(t, s) = -\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} c(t_1, s_1) w(t_1, s_1)\,dt_1 ds_1 - \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} c(t_1, s_1)\,dt_1 ds_1. \tag{4}$$

Здесь $z(t, s) = 1 + w(t, s)$. Теперь необходимо выразить решение интегрального уравнения (4) через континуальный интеграл. Формулы о преобразовании интеграла Винера при замене переменной интегрирования, известные для интеграла по пространству C_2 [5], тривиально переносятся на интеграл по пространству $C_2(R)$. А именно, при сдвиге на функцию $a(t, s)$ в пространстве $C_2(R)$ справедлива формула

$$\int_{C_2(R)} F(x)\,d_W x = \exp\left\{-\int_R \left[\frac{\partial^2 a(t, s)}{\partial t \partial s}\right]^2 dt ds\right\} \int_{C_2(R)} F(x + a) \times$$

$$\times \exp\left[-\int_R \frac{\partial^2 a(t, s)}{\partial t \partial s}\,dx(t, s)\right] d_W x.$$

При линейном преобразовании

$$x(t, s) \to y(t, s) = x(t, s) + \int_R K(t, s; t_1, s_1)\,x(t_1, s_1)\,dt_1 ds_1 \equiv x + L_1 x -$$

$$- \int_{C_2(R)} F(x)\,d_W x = |D_1| \int_{C_2(R)} F(x + L_1 x) \exp\left\{-\int_R \left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\int_R K(t, s; t_1, s_1)\,x(t_1, s_1) \times\right.\right.$$

$$\left.\times\, dt_1 ds_1\right]^2 dt ds - 2\int_R \left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\int_R K(t, s; t_1, s_1)\,x(t_1, s_1)\,dt_1 ds_1\right] dx(t, s)\Big\} d_W x,$$

где D_1 — определитель Фредгольма. Используя эти формулы, можно выразить решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра через континуальные интегралы. Например, решение уравнения

$$y(t, s) = x(t, s) + \int_{a_1}^{t}\int_{a_2}^{s} K(t_1, s_1)\,x(t_1, s_1)\,dt_1 ds_1, \quad (t, s) \in R$$

представляется через следующий континуальный интеграл:

$$x(t, s) = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_R K(t_1, s_1)\,dt_1 ds_1\right\}\int_{C_2(R)} z(t, s)\exp\left\{2\int_R \left[\frac{\partial^2 y(t, s)}{\partial t\partial s} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - K(t, s)\,z(t, s)\right] dz(t, s) - \int_R \left[\frac{\partial^2 y(t, s)}{\partial t\partial s} - K(t, s)\,z(t, s)\right]^2 dtds\right\} d_W z. \quad (5)$$

На основании этой формулы выражение решения интегрального уравнения (4), а затем и функции Римана через континуальный интеграл очевидно. Подставляя найденную функцию $v(t, s; \tau, \sigma)$ в формулу (3), получаем формулу (2). Теорема доказана.

Отметим, что решение системы интегральных уравнений Фредгольма на R (ядро может допускать разрыв, так что система Вольтерра является частным случаем данной системы) вида

$$y_k(t, s) = x_k(t, s) + \sum_{l=1}^{p}\int_R K_{kl}(t, s;\ t_1, s_1)\,x_l(t_1, s_1)\,dt_1 ds_1 \quad (k = 1, p)$$

допускает следующее представление через континуальный интеграл (ср. с [4]):

$$x_k(t, s) = |D_2|\exp\left\{-\sum_{k=1}^{p}\int_R\left[\frac{\partial^2 y_k(t, s)}{\partial t\partial s}\right]^2 dtds\right\}\int_{C_2^p(R)} z_k(t, s)\ \times$$

$$\times \exp\left\{2\sum_{k=1}^{p}\int_R \frac{\partial^2 y_k(t, s)}{\partial t\partial s}\, d_{t,s}\left[z_k(t, s) + \sum_{l=1}^{p}\int_R K_{kl}(t, s;\ t_1, s_1)\,z_l(t_1, s_1)\ \times\right.\right.$$

$$\left.\times\, dt_1 ds_1\right] - \sum_{k=1}^{p}\int_R\left[\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\int_R\sum_{l=1}^{p} K_{kl}(t, s;\ t_1, s_1)\,z_l(t_1, s_1)\,dt_1 ds_1\right]^2 dtds\ -$$

$$\left. - 2\sum_{k,l=1}^{p}\int_R\left[\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\int_R K_{kl}(t, s;\ t_1, s_1)\,z_l(t_1, s_1)\,dt_1 ds_1\right] dz_k(t, s)\right\} d_W z_1 \ldots d_W z_p, \quad (6)$$

где D_2 — определитель Фредгольма системы интегральных уравнений.

В связи с обобщением этих результатов следует отметить, что любую задачу, содержащую дифференциальные выражения и допускающую замену интегральным уравнением (системой), можно представить в виде континуального интеграла, используя формулу (6) или аналогичные формулы через интегралы по пространству C непрерывных функций одной переменной, пространству $C^p = \underbrace{C\times\ldots\times C}_{p}$, пространству C_m m переменных или пространству $C_m^p = \underbrace{C_m\times\ldots\times C_m}_{p}$.

1. *Далецкий Ю. Л.* Континуальные интегралы и характеристики, связанные с группой операторов.— Докл. АН СССР, 1961, 141, № 6, с. 1290—1293.
2. *Далецкий Ю. Л.* Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями.— Успехи мат. наук, 1962, 17, № 5, с. 3—115.
3. *Баклан В. В.* Представлення розв'язку характеристичної задачі для телеграфного рівняння у вигляді континуального інтеграла.— Доп. АН УРСР, 1963, № 2, с. 149—152.
4. *Ковальчик І. М.* Кратний континуальний інтеграл і характеристична задача для деякої системи диференціальних рівнянь.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1971, № 4, с. 303—306.
5. *Ковальчик І. М.* Деякі теореми про інтеграл Вінера в просторі неперервних функцій багатьох змінних.— Доп. АН УРСР, 1964, № 11, с. 1426—1430.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 19.07.78