где x_0 — произвольная точка отрезка $[a, b]$. Поскольку c_1 — первый коэффициент характеристического ряда, то, очевидно,

$$B_1 = \left| \frac{\Delta' (U_\mu [\psi_i])}{\Delta (U_\mu [(\psi_i])} \right|_{\lambda=0}. \qquad (19)$$

Если рассматриваемая задача принадлежит одночленному классу, то, как известно, она равносильна интегральному уравнению Фредгольма второго рода. В этом случае функция $\Delta (\lambda)$ с точностью до постоянного множителя тождественна знаменателю Фредгольма, а величина B_ν — следам ν-итерированных ядер указанного интегрального уравнения. Однако в общем случае (многочленный класс) способ сведения задачи (1), (2) к соответствующему интегральному уравнению, по-видимому, неизвестен.

Таким образом, применение метода характеристических рядов позволило распространить полученные, а также и известные двусторонние оценки собственных значений на задачи многочленного класса.

1. *Бернштейн С. А., Керопян К. К.* Определение частот колебаний стержневых систем методом спектральной функции.— М. : Госстройиздат, 1960.— 364 с.
2. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения.— М. : Наука, 1958.— 503 с.
3. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике.— М. : Гостехиздат, 1957.— 571 с.
4. *Таций Р. М.* Двусторонние оценки собственных значений в задачах о колебаниях и устойчивости упругих пластинок сложной формы : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1978.— 20 с.
5. *Таций Р. М.* К построению характеристических рядов многопараметрических континуальных систем.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 9, с. 819—821.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 12.11.79

УДК 512.8

В. М. Петричкович

ВОПРОСЫ РАЗЛОЖИМОСТИ МАТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

Рассмотрим вопросы разложения на множители унитальных матричных многочленов

$$A(x) = Ex^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_m,$$

где E — единичная матрица; A_i $(i = 1, \ldots, m)$ — $n \times n$-матрицы над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Установим существование абсолютно разложимых матричных многочленов, верхней и нижней границ для числа линейных делителей и числа различных разложений на линейные множители матричных многочленов, все характеристические корни которых различны; докажем, что матричный многочлен, все характеристические корни которого имеют кратности не больше двух, разложим в произведение линейных множителей, а также приведем некоторые условия разложимости на множители клеточно-диагональных, клеточно-треугольных матриц и матричных многочленов с коммутирующими коэффициентами.

Понятия эквивалентности и скалярной эквивалентности полиномиальных матриц определены в работах [1, 9]. Введем еще такое определение.

Определение 1. Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — полиномиальные матрицы одинаковых размеров. Если существуют неособенная числовая матрица Q и обратимая матрица $R(x)$ такие, что $A(x) = QB(x)R(x)$, то матрицы $A(x)$ и $B(x)$ называются полускалярно эквивалентными.

Теорема 1*. Пусть $A_1(x), \ldots, A_k(x)$ — неособенные $n \times n$-матрицы, $\varepsilon_{ij}(x)$, $j = 1, \ldots, n$ — инвариантные множители матрицы $A_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$.

* Теорема получена совместно с П. С. Казимирским.

Тогда существуют неособенная числовая матрица Q и обратимые матрицы $R_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$ такие, что

$$QA_i(x)R_i(x) = \left\| \begin{matrix} \varepsilon_{i1}(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \varepsilon_{in}(x) \end{matrix} \right\|.$$

Доказательство теоремы 1 приведено в работе [7]. Из этой теоремы вытекает результат Ньюмена для полиномиальных матриц [16].

Следствие 1. Пусть $A(x) = B(x)C(x)$ — произведение неособенных матриц. Тогда инвариантные множители матрицы $A(x)$ делятся на соответствующие инвариантные множители матриц $B(x)$ и $C(x)$.

Рассмотрим абсолютную разложимость матричных многочленов. Напомним, что многочлен $\Delta(x) = \det A(x)$ называется характеристическим многочленом, а корни его — характеристическими корнями матричного многочлена (полиномиальной матрицы) $A(x)$.

Определение 2. Если для любого разложения

$$\Delta(x) = \Delta_1(x) \ldots \Delta_m(x), \ \deg \Delta_i = n, \quad i = 1, \ldots, m \tag{1}$$

характеристического многочлена $\Delta(x)$ существует параллельное разложение

$$A(x) = (Ex - B_1) \ldots (Ex - B_m)$$

на линейные множители матричного многочлена $A(x)$, т. е. такое разложение, что $\det(Ex - B_2) = \Delta_2(x)$, $i = 1, \ldots, m$, то матричный многочлен $A(x)$ называется абсолютно разложимым.

Очевидно, что если матричный многочлен $A(x)$ разложим на линейные множители параллельно любому разложению (1) его характеристического многочлена, то он также разложим на множители параллельно любому разложению его характеристического многочлена вида

$$\Delta(x) = \Delta_{k_1}(x) \ldots \Delta_{k_l}(x), \ \deg \Delta_{k_i} = k_i n, \ 1 \leqslant k_i \leqslant m-1, \quad i = 1, \ldots, l.$$

Пусть характеристические корни матричного многочлена $A(x)$ различны, т. е. $\Delta(x) = \prod_{j=1}^{mn}(x - \alpha_j)$, $\alpha_r \neq \alpha_s$, если $r \neq s$. Тогда на основании теоремы 1 матрица $A(x)$ полускалярными эквивалентными преобразованиями приводится к треугольному виду

$$F(x) = QA(x)R(x) = \left\| \begin{matrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ f_1(x) & \ldots & f_{n-1}(x) & \Delta(x) \end{matrix} \right\|,$$

где Q — числовая неособенная, $R(x)$ — обратимая матрицы. Запишем взаимную матрицу к матрице $F(x)$:

$$F_*(x) = \left\| \begin{matrix} \Delta(x) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \Delta(x) & \\ g_1(x) & \ldots & g_{n-1}(x) & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Через G_r обозначим такую матрицу:

$$G_r = \begin{Vmatrix} \alpha_1^r g_1(\alpha_1) & \ldots & \alpha_1^r g_{n-1}(\alpha_1) & \alpha_1^r \\ \alpha_2^r g_1(\alpha_2) & \ldots & \alpha_2^r g_{n-1}(\alpha_2) & \alpha_2^r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{mn}^r g_1(\alpha_{mn}) & \ldots & \alpha_{mn}^r g_{n-1}(\alpha_{mn}) & \alpha_{mn}^r \end{Vmatrix}.$$

Здесь α_i, $i = 1, \ldots, mn$ — характеристические корни матрицы $A(x)$.

Теорема 2. Матричный многочлен $A(x)$, характеристические корни которого различны, является абсолютно разложимым тогда и только тогда, когда в матрице $H_j = \| G_0 G_1 \ldots G_j \|$ для всех $j = 0, 1, \ldots, m-2$ каждые $(j+1)$ n-е строки линейно независимы.

Теорема 3. Существуют матричные многочлены с наперед заданными различными характеристическими корнями, обладающие свойством абсолютной разложимости.

Доказательство теорем 2 и 3 приведено в работе [12].

Следствие 2. Матричный многочлен $A(x)$, характеристические корни которого различны, обладает свойством абсолютной выделяемости левых линейных множителей [5] тогда и только тогда, когда в матрице G_0 каждые n-е строки линейно независимы.

Отметим, что задача об абсолютной разложимости матричных многочленов представляет наибольший интерес для случая, когда матричный многочлен $A(x)$ имеет все различные характеристические корни. Если эти корни равны, т. е. $\Delta(x) = (x - \alpha)^{mn}$, то задача тривиальна, так как из разложимости многочлена $A(x)$ на линейные множители следует его абсолютная разложимость.

Определим число линейных делителей матричного многочлена. Сформулируем вспомогательные предложения.

Лемма 1. Пусть mn различных векторов размерности n можно разбить на m непересекающихся множеств по n линейно независимых векторов в каждом. Тогда из этих векторов можно образовать не меньше чем m^n множеств по n линейно независимых векторов.

Лемма 2. Матричный многочлен $A(x)$, характеристические корни которого различны, имеет левый делитель $Ex - B_i$ с характеристическими корнями $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}$ тогда и только тогда, когда матрица

$$\begin{Vmatrix} g_1(\alpha_{i_1}) & \ldots & g_{n-1}(\alpha_{i_1}) & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_1(\alpha_{i_n}) & \ldots & g_{n-1}(\alpha_{i_n}) & 1 \end{Vmatrix}$$

неособенная.

Следуя работе [14], введем такое определение.

Определение 3. Набор из m левых линейных делителей $Ex - B_i$, $\det(Ex - B_i) = \Delta_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ матричного многочлена $A(x)$ называется полным, если $\prod_{i=1}^{m} \Delta(x) = \Delta(x)$.

Лемма 3. Если характеристические корни матричного многочлена $A(x)$ различны, то он имеет полный набор левых линейных делителей.

Доказательство. Матрица $H_{m-1} = \| G_0 G_1 \ldots G_{m-1} \|$ неособенная. Далее, разлагаем $\det H_{m-1}$ по формуле Лапласа и применяем лемму 2. Лемму 3 можно также получить, используя результаты работы [14].

Теорема 4. Если характеристические корни матричного многочлена $A(x)$ различны, то число d его левых линейных делителей удовлетворяет неравенству

$$m^n \leqslant d \leqslant \binom{mn}{n}. \qquad (2)$$

Доказательство. На основании лемм 2 и 3 mn строк матрицы

$$G_0 = \begin{Vmatrix} g_1(\alpha_1) & \dots & g_{n-1}(\alpha_1) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_1(\alpha_{mn}) & \dots & g_{n-1}(\alpha_{mn}) & 1 \end{Vmatrix},$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_{mn}$ — характеристические корни $A(x)$, можно разбить на m множеств по n линейно независимых строк в каждом. Тогда, применяя лемму 1 и учитывая, что линейные делители матричного многочлена $A(x)$ своими характеристическими многочленами определяются однозначно [3], получаем $d \geqslant m^n$. Если матрица $A(x)$ диагональная или преобразованием подобия приводится к диагональному виду, то $d = m^n$. Матричный многочлен $A(x)$, обладающий свойством абсолютной выделяемости линейных множителей, имеет максимальное число $d = \binom{mn}{n}$ линейных делителей. Теорема 4 доказана.

Следствие 3. Если характеристические корни матричного многочлена $A(x)$ различны, то число d различных решений матричного уравнения

$$X^m + X^{m-1}A_1 + \cdots + XA_{m-1} + A_m = 0 \tag{3}$$

удовлетворяет неравенству (2).

Отметим, что ранее рассматривались матричные уравнения, число решений которых конечно [2, 4, 6] или бесконечно [13]. В работе [14] приведено достаточное условие, при котором матричное уравнение (3) имеет $\binom{mn}{n}$ решений, однако неясно, существуют ли матричные уравнения, для которых это условие выполняется.

Следствие 4. Если характеристические корни матричного многочлена $A(x)$ различны, то число r различных разложений $A(x)$ в произведение линейных множителей удовлетворяет неравенству

$$\prod_{j=1}^{m} j^n \leqslant r \leqslant \prod_{j=1}^{m} \binom{jn}{n}. \tag{4}$$

Число $r = \prod_{j=1}^{m} \binom{jn}{n}$, если $A(x)$ — абсолютно разложимый матричный многочлен. Если матрица $A(x)$ диагональная или преобразованием подобия приводится к диагональному виду, то $r = \prod_{j=1}^{m} j^n$.

В работе [15] отмечено, что $r \geqslant \prod_{j=0}^{m-1} (nj+1)$. Легко видеть, что $\prod_{j=1}^{m} j^n > \prod_{j=0}^{m-1} (nj+1)$. Следует еще отметить, что в случае $n = 1$ (многочлен $a(x)$ со скалярными коэффициентами) из неравенств (2), (4) получаем известные результаты $d = m$ и $r = m!$.

Теорема 5. Если характеристические корни матричного многочлена $A(x)$ различны и число его линейных делителей $d = \binom{mn}{n}$, то преобразованием подобия $A(x)$ не приводит к клеточно-треугольному виду.

Доказательство этой теоремы проводится методом от противного. Обратное к теореме 5 утверждение неверно (см. пример в работе [12]).

Рассмотрим вопрос о разложимости полиномиальных матриц на линейные множители.

Определение 4. Пусть $A(x) = \| a_{ij}(x) \|_{i,j=1}^{l,n}$ $(l \leqslant n)$ — $l \times n$-матрица. Из матрицы $A(x)$ можно выделить регулярный множитель порядка k $(k \leqslant l)$, если существует неособенная числовая матрица Q такая, что

$$QA(x) = \begin{Vmatrix} B_k(x) & 0 \\ 0 & E_{l-k} \end{Vmatrix} \tilde{A}(x),$$

где $B_k(x)$ — регулярная матрица * порядка k; E_{l-k} — единичная матрица порядка $l - k$.

Лемма 4. Пусть $A(x) = \|a_{ij}(x)\|_{i,j=1}^{l,n}$ — полиноминальная матрица степени m, s — число ее элементарных делителей. Тогда из матрицы $A(x)$ выделяется линейный регулярный множитель простой структуры (элементарные делители которого линейны) порядка $k \geqslant \frac{s}{m}$.

Из этой леммы как следствие вытекает известный результат [5, 10, 15].

Следствие 5. Регулярная полиномиальная матрица простой структуры разложима в произведение линейных регулярных множителей.

Как уже отмечалось, регулярная полиномиальная матрица, характеристические корни которой различны, разложима в произведение линейных регулярных множителей. Следующая теорема расширяет это достаточное условие разложимости на множители.

Теорема 6. Регулярная полиномиальная матрица, все характеристические корни которой имеют кратности не больше двух, разложима в произведение линейных регулярных множителей.

Замечание. Если среди характеристических корней регулярной матрицы $A(x)$ имеются корни кратностей больше двух, то матрица $A(x)$ может и не допускать разложения на линейные регулярные множители.

Доказательство теоремы 6 можно найти в работе [8].

Рассмотрим матричный многочлен с коммутирующими коэффициентами

$$A(x) = Ex^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m, \qquad (5)$$

где A_i — $n \times n$-матрицы; $A_iA_j = A_jA_i$, $i, j = 1, \ldots, m$. Тогда преобразованием подобия многочлен $A(x)$ приводится к клеточно-диагональному виду

$$PA(x)P^{-1} = D_1(x) \oplus D_2(x) \oplus \cdots \oplus D_l(x) \qquad (6)$$

с диагональными блоками

$$D_i(x) = \begin{Vmatrix} \delta_i(x) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_i(x) \end{Vmatrix}$$

порядков n_i, причем $\delta_i(x) \neq \delta_j(x)$, если $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, l$.

Определение 5 Многочлен $[\delta_i(x)]^{n_i}$ назовем определяющим многочленом матрицы $D_i(x)$, а многочлены $[\delta_1(x)]^{n_1}, \ldots, [\delta_l(x)]^{n_l}$ — системой определяющих многочленов матричного многочлена $A(x)$ вида (5). Многочлен $\delta_i(x)$ назовем базой, а натуральное число n_i — порядком определяющего многочлена $[\delta_i(x)]^{n_i}$.

Укажем способ непосредственного вычисления системы определяющих многочленов матричного многочлена с коммутирующими коэффициентами.

Определение 6 [6]. Значением матрицы $G(x)$ на системе корней многочлена $\varphi(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \ldots (x - \alpha_r)^{k_r}$ назовем матрицу

$$M_{G(x)}(\varphi) = \begin{Vmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_r \end{Vmatrix}, \quad H_i = \begin{Vmatrix} G(\alpha_i) \\ G'(\alpha_i) \\ \vdots \\ G^{(k_i-1)}(\alpha_i) \end{Vmatrix},$$

* Полиномиальная матрица $A(x)$ называется регулярной или унитальной, если в записи ее в виде матричного многочлена коэффициент при старшей степени x неособенная или единичная матрица.

где $G^l(x)$ — производная порядка l от матрицы $G(x)$. Если $\varphi(x) = (x-\alpha)^p$, то матрицу $M_{G(x)}(\varphi)$ обозначаем также через $M_{G(x)}[\alpha^{(p)}]$.

Лемма 5. Пусть $G(x) = G_1(x) \oplus \cdots \oplus G_k(x)$ — клеточно-диагональная матрица. Тогда $\operatorname{rang} M_{G(x)}(\varphi) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rang} M_{G_i(x)}(\varphi)$.

Лемма 6. Пусть $\varphi(x)$ — делитель степени m характеристического многочлена матричного многочлена (5). Тогда в системе определяющих многочленов $A(x)$ есть определяющий многочлен с базой $\varphi(x)$ в том и только том случае, если ранг значения матрицы $A(x)$ на системе корней многочлена $\varphi(x)$ меньше n, т. е. $\operatorname{rang} M_{A(x)}(\varphi) < n$.

Доказательство. Поскольку $\operatorname{rang} M_{PA(x)P^{-1}}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{A(x)}(\varphi)$, то рассматриваем матрицу $D(x) = PA(x)P^{-1}$ вида (6), используя лемму 5.

Через $r_{\alpha_{i_1}^{j_1} \ldots \alpha_{i_k}^{j_k}}$ обозначим ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} M_{(A^{j_1}(x))_*}[\alpha_{i_1}^{(p_{i_1 j_1})}] \\ \vdots \\ M_{(A^{j_k}(x))_*}[\alpha_{i_k}^{(p_{i_k j_k})}] \end{matrix} \right\|,$$

где $G^{(l)}(x)$ — взаимная матрица от матрицы $A(x)$; $p_{i_l j_l}$ — кратность корня α_{i_l} многочлена $\det A^{(j_l)}(x)$, $l = 1, \ldots, k$; m — степень матричного многочлена $A(x)$.

Теорема 7. Порядок n_i определяющего многочлена

$$[\delta_i(x)]^{n_i} = [(x-\alpha_1)^{m_1} \ldots (x-\alpha_q)^{m_q}]^{n_i}$$

матричного многочлена $A(x)$ с коммутирующими коэффициентами равен $n_i = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k$, где $\sigma_k = (-1)^{k+1} \sum_{\substack{j_s < i_t \text{ или} \\ i_s = i_t,\ j_s < j_t\ (s<t)}} r_{\alpha_{i_1}^{j_1} \ldots \alpha_{i_k}^{j_k}}$,

т. е. сумма распространяется на все возможные лексикографические упорядоченные наборы из k неповторяющихся элементов из множества $\{\alpha_i^j,\ i = 1, \ldots, q,\ j = 0, 1, \ldots, m_i - 1\}$.

Доказательство. Так как

$$\operatorname{rang} M_{[(PA(x)P^{-1})^{(j)}]_*}[\alpha_i^{(p_{ij})}] = \operatorname{rang} M_{(A^{(j)}(x))_*}[\alpha_i^{(p_{ij})}],$$

то доказательство проводится для матрицы $D(x) = PA(x)P^{-1}$ вида (6). При этом используются элементы комбинаторики.

На основании леммы 6 и теоремы 7 можно найти систему определяющих многочленов матричного многочлена с коммутирующими коэффициентами, а значит, его клеточно-диагональную форму (6) без вычисления преобразующей матрицы P.

Следствие 6. Если все определяющие многочлены матричного многочлена (5) первого порядка, то преобразованием подобия многочлен $A(x)$ приводится к диагональному виду.

Теорема 8. Клеточно-диагональная унитальная матрица

$$D(x) = D_1(x) \oplus D_2(x) \oplus \cdots \oplus D_l(x),$$

характеристические многочлены $\Delta_i(x) = \det D_i(x)$, $i = 1, \ldots, l$ диагональных клеток которой попарно взаимно просты, разложима в произведение унитальных множителей тогда и только тогда, когда каждая диагональная клетка $D_i(x)$ разложима на унитальные множители соответствующих степеней. В случае существования такого разложения матрицы $D(x)$ множители имеют клеточно-диагональную форму.

Теорема 9. Пусть

$$T(x) = \begin{Vmatrix} T_1(x) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & T_l(x) \end{Vmatrix}$$

— унитальная клеточно-треугольная матрица. Если характеристические многочлены $\Delta_i(x) = \det T_i(x)$, $i = 1, \ldots, l$ диагональных клеток попарно взаимно просты и каждая диагональная клетка $T_i(x)$ разлагается в произведение унитальных множителей соответственно равных степеней, то и матрица $T(x)$ разложима на унитальные множители тех же степеней.

Доказательство теорем 8 и 9 приведено в работе [11]. Обратное к теореме 9 утверждение неверно (см. пример в работе [11]).

Используя понятие определяющего многочлена, приведем некоторые условия разложимости на множители матричного многочлена (5) с коммутирующими коэффициентами.

Теорема 10. Пусть система определяющих многочленов матричного многочлена (5) состоит только из многочленов вида $[(x-\alpha_i)^m]^{n_i}$. Тогда многочлен $A(x)$ разложим на множители в том и только том случае, если каждая клетка

$$D_i(x) = \begin{Vmatrix} (x-\alpha_i)^m & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & (x-\alpha_i)^m \end{Vmatrix},$$

соответствующая определяющему многочлену $[(x-\alpha_i)^m]^{n_i}$, разложима на множители соответствующих степеней.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 8.

Теорема 11. Матричный многочлен (5), имеющий только один определяющий многочлен вида $[(x-\alpha_{i_1})^{m_1} \ldots (x-\alpha_{i_q})^{m_q}]^n$, разложим на множители соответственно степеней $m_1, \ldots, m_q$.

Доказательство. Преобразованием подобия матричный многочлен $A(x)$ приводится к треугольному виду

$$\begin{Vmatrix} (x-\alpha_{i_1})^{m_1} \ldots (x-\alpha_{i_q})^{m_q} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & (x-\alpha_{i_1})^{m_1} \ldots (x-\alpha_{i_q})^{m_q} \end{Vmatrix}.$$

Далее поступаем аналогично доказательству теоремы 9.

Следствие 7. Матричный многочлен (5) с одним определяющим многочленом $[(x-\alpha_{i_1}) \ldots (x-\alpha_{i_m})]^n$ разложим в произведение линейных множителей.

Систему определяющих многочленов матричного многочлена (5) разобьем на подсистемы K_1, K_2, K_3 соответственно с определяющими многочленами вида $[(x-\alpha_k)^m]$, $(x-\alpha_{i_1})]^{m_{i_1}} \ldots (x-\alpha_{i_p})^{m_{i_p}n_i}$ $(p < m)$, $[(x-\alpha_{i_1}) \ldots$ $\ldots (x-\alpha_{i_m})]^{n_l}$. Тогда матрицу $A(x)$ преобразованием подобия можно привести к виду

$$PA(x)P^{-1} = D_1(x) \oplus D_2(x) \oplus D_3(x),$$

причем системами определяющих многочленов матриц $D_1(x)$, $D_2(x)$ и $D_3(x)$ являются соответственно системы K_1, K_2 и K_3.

Теорема 12. Если матрицы $D_1(x)$ и $D_2(x)$ разложимы на множители соответственно равных степеней, то и многочлен $A(x)$ разложим на множители тех же степеней.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании следствия 7 матрица $D_3(x)$ разложима на линейные множители. Поэтому она разложима и на множители любых степеней. Дальнейшее доказательство очевидно.

Следствие 8. Если определяющие многочлены системы K_i попарно взаимно просты с определяющими многочленами системы K_j $(i, j = 1, 2, 3;$ $i \neq j)$, то условие теоремы 12 является необходимым и достаточным для разложимости матричного многочлена (5) на множители.

Как следствие можно получить некоторые результаты о разложимости на линейные множители матричного квадратного трехчлена

$$A(x) = Ex^2 + A_1x + A_2, \quad A_1A_2 = A_2A_1 \tag{7}$$

с коммутирующими коэффициентами.

Теорема 13. Если диагональные клетки клеточно-диагональной формы трехчлена (7), соответствующие определяющим многочленам $[(x - \alpha_i)^2]^{n_i}$, разложимы в произведение линейных множителей, то и трехчлен (7) разложим на линейные множители.

Следствие 9. Если определяющие многочлены вида $[(x - \alpha_i)^2]^{n_i}$ трехчлена (7) попарно взаимно просты с определяющими многочленами вида $[(x - \alpha_r)(x - \alpha_s]^{n_j}$, $\alpha_r \neq \alpha_s$, то условие теоремы 13 является необходимым и достаточным для разложимости трехчлена (7) на линейные множители.

Следствие 10. Пусть элементарные делители трехчлена (7) попарно взаимно просты. Тогда он разложим на линейные множители в том и только том случае, если его определяющие многочлены вида $[(x - \alpha_i)^2]^{n_i}$ первого порядка, т. е. если $n_i = 1$.

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1966.— 576 с.
2. *Грига Б. С., Казімірський П. С.* До питання єдиності виділення унітального множника з матричного многочлена.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 4, с. 293—295.
3. *Казімірський П. С.* Про розклад матричного многочлена на множники.— Укр. мат. журн., 1972, 24, № 3, с. 315—325.
4. *Казимирский П. С.* Матричные многочлены и уравнения.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 23—31.
5. *Казимирский П. С.* Выделение из матричного многочлена регулярного линейного множителя простой структуры.— В кн.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 29—40.
6. *Казімірський П. С.* Квазіунітальні та супровідні матриці матричних многочленів.— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К. : Наук. думка, 1977, с. 29—52.
7. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць.— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К. : Наук. думка, 1977, с. 61—66.
8. *Казимирский П. С., Петричкович В. М.* Разложимость полиномиальных матриц на линейные множители.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978- вып. 8, с. 3—9.
9. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры.— М. : Наука, 1970.— 400 с.
10. *Маркус А. С., Мереуца И. В.* О некоторых свойствах простых λ-матриц.— Мат. исслед., 1975, 10, № 3, с. 207—213.
11. *Петричкович В. М.* Розкладність на множники кліткова-діагональних і кліткова-трикутних поліноміальних матриць.— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К. : Наук. думка, 1977, с. 92—97.
12. *Петричкович В. М.* Абсолютная разложимость матричных многочленов.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1979, вып. 9, с. 37—41.
13. *Bell J. H.* Families of solutions of the unilateral matrix equation.— Pros. Amer. Math. Soc., 1950, N 1, p. 151—159.
14. *Dennis J. E., Traub J. F., Weber R. P.* The algebraic theory of matrix polinomials.— SIAM. J. Numer. Anal., 1976, 13, N 6, p. 831—845.
15. *Gohberg J., Lancaster P., Raum L.* Spectral analysis of matrix polynomials. I. Canonical forms and divisors.— Linear Algebra and Its Appl., 1978, 20, p. 1—44.
16. *Newman M.* On the Smith normal form.— Journ. Res. Nat. Bur. Stand. B, 1971, 75, p. 81—84.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
23.05.79